Najmniejsza/największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

Najmniejsza/największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tej lekcji zaprezentujemy metodę wyznaczania wartości najmniejszej/największej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym. Umiejętność wyznaczania wartości najmniejszej/największej danej funkcji jest pomocna w wyznaczaniu zbioru wartości takiej funkcji.

Twoje cele

- Przeanalizujesz sposoby wyznaczania wartości najmniejszej/największej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.
- Obliczysz wartość najmniejszą/największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.
- Wyznaczysz zbiór wartości funkcji kwadratowej, określonej w przedziale domkniętym.

Przeczytaj

Wyznaczanie najmniejszej/największej wartości funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym możemy opisać za pomocą algorytmu.

Dane są liczby a i b, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$. Do wyznaczenia wartości najmniejszej/największej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ zastosujemy poniższą procedurę:

1. Obliczamy wartości funkcji kwadratowej na końcach podanego przedziału $\langle a, b\rangle$ oraz wartość pierwszej współrzędnej p wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji.

2. Jeżeli:

- $p \in \langle a, b\rangle$, to obliczamy $q = f(p)$ i wybieramy wartość najmniejszą oraz wartość największą z liczb: $f(a),\ f(b),\ f(p)$,
- $p \notin \langle a, b\rangle$, to wybieramy wartość najmniejszą i wartość największą z liczb: $f(a), f(b)$.

Na istnienie wartości najmniejszej lub największej ma także wpływ fakt, czy ramiona paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej są skierowane do góry, czy do dołu.

Ważne!

Jeżeli funkcja kwadratowa jest określona na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$, to:

- dla $a > 0$ ramiona paraboli, która jest wykresem tej funkcji, są skierowane do góry,
- dla $a < 0$ ramiona paraboli, która jest wykresem tej funkcji, skierowane są do dołu.

Przykład 1

Wyznaczymy wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $a > 0$, wykresem funkcji f jest parabola o ramionach skierowanych w górę, a funkcja przyjmuje wartość najmniejszą w wierzchołku paraboli. Funkcja f nie przyjmuje tym samym wartości największej.

Pierwszą współrzędną wierzchołka $W = (p, q)$ tej paraboli wyznaczymy korzystając ze wzoru:

$p = -\frac{b}{2a}$, zatem $p = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1$.

Najmniejszą wartość funkcji f możemy obliczyć ze wzoru na $q = -\frac{\Delta}{4a}$ lub przez obliczenie wartości funkcji f dla argumentu p.

Wybierając drugi sposób otrzymujemy:

$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4.$

Zatem wartością najmniejszą funkcji f jest liczba -4.

Przykład 2

Wyznaczymy wartość najmniejszą i wartość największą w każdym z przedziałów: $\langle -2, 0 \rangle$, $\langle -1, 2 \rangle$, $\langle 2, 4 \rangle$ funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Rozwiązanie:

Zanim wyznaczymy wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f, naszkicujemy wykres tej funkcji.

Do naszkicowania wykresu funkcji f, poza współrzędnymi wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji, wyznaczymy miejsca zerowe funkcji.

W tym celu obliczamy najpierw wartość wyróżnika odpowiedniego trójmianu kwadratowego:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16.$

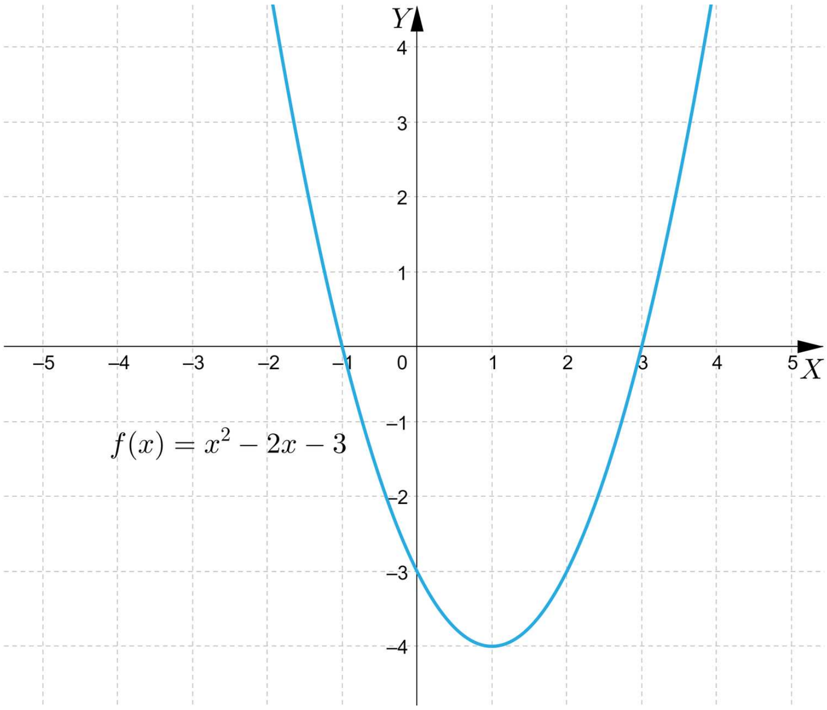
Wykorzystując wzory na miejsca zerowe funkcji kwadratowej f, otrzymujemy:

$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1,$

$x_1 = \frac{2+4}{2} = 3.$

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby (-1) oraz 3.

Wykres funkcji f przedstawia się następująco:



Wyznaczamy wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji f w przedziałach:

- $\langle -2, 0\rangle$

Ponieważ $p = 1 \notin \langle -2, 0\rangle$, zatem wystarczy obliczyć wartości funkcji f na końcach tego przedziału.

Wobec tego: $f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 5$, $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$.

Ponieważ $-3 < 5$, zatem wartość najmniejsza funkcji f w przedziale $\langle -2, 0\rangle$ wynosi (-3), a wartość największa f wynosi 5.

- $\langle -1, 2\rangle$

Ponieważ $p = 1 \in \langle -1, 2\rangle$, zatem funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 1$, a wartość największą w jednym z końców podanego przedziału.

Wobec tego: $f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$, $f(1) = -4$, $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3$.

Ponieważ $-3 < 0$, to wartość najmniejsza funkcji f w przedziale $\langle -1, 2\rangle$ wynosi (-4), a wartość największa funkcji f wynosi 0.

- $\langle 2, 4\rangle$

Ponieważ $p = 1 \notin \langle 2, 4\rangle$, zatem wystarczy obliczyć wartości funkcji f na końcach tego przedziału.

Wobec tego: $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3$, $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 5$.

Ponieważ $-3 < 5$, to wartość najmniejsza funkcji f w przedziale $\langle 2, 4\rangle$ wynosi (-3) , a wartość największa funkcji f wynosi 5.

Analogicznie wyznacza się wartość najmniejszą oraz największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym, gdy ramiona paraboli, która jest wykresem tej funkcji, są skierowane do dołu.

Przykład 3

Wyznaczymy wartość najmniejszą i wartość największą w przedziale $\langle -2, 1\rangle$ funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -2x^2 + x + 6.$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $a = -2 < 0$, zatem funkcja kwadratowa f przyjmuje wartość największą w wierzchołku paraboli, która jest wykresem tej funkcji.

Sprawdźmy, czy wartość pierwszej współrzędnej wierzchołka p paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej f należy do przedziału $\langle -2, 1\rangle$.

Obliczamy $p = \frac{-1}{2\cdot(-2)} = \frac{1}{4}$.

Ponieważ $p = \frac{1}{4} \in \langle -2, 1\rangle$, zatem funkcja kwadratowa f przyjmuje wartość największą w wierzchołku, a wartość najmniejszą w jednym z końców przedziału $\langle -2, 1\rangle$.

Zatem:

$f(-2) = -2 \cdot (-2)^2 - 2 + 6 = -4$,

$f\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + 6 = 6\frac{1}{8}$,

$f(1) = -2 \cdot 1^2 + 1 + 6 = 5$.

Wobec tego, że $-4 < 6\frac{1}{8}$, to wartość najmniejsza funkcji f w przedziale $\langle -2, 1\rangle$ wynosi (-4), a wartość największa funkcji f wynosi $6\frac{1}{8}$.

Metodę wyznaczania wartości najmniejszej i wartości największej w podanym przedziale domkniętym możemy zastosować do znajdowania zbioru wartości funkcji kwadratowej, która jest określona w podanym przedziale.

Przykład 4

Funkcja f określona w przedziale $\langle -2, 2\rangle$ przyporządkowuje każdej liczbie z tego przedziału jej kwadrat pomniejszony o połowę tej liczby. Wyznaczymy zbiór wartości tej funkcji.

Rozwiązanie:

Funkcję z zadania zapisujemy za pomocą wzoru $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x$, gdzie $x \in <-2, 2>$.

Wyznaczenie zbioru wartości funkcji f sprowadza się do znalezienia wartości najmniejszej i największej tej funkcji w przedziale $\langle -2, 2\rangle$.

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, na której leży wykres funkcji f:

$p = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

Ponieważ $p = \frac{1}{4} \in \langle -2, 2\rangle$, zatem wykorzystując przedstawioną wcześniej metodę, obliczamy wartości funkcji f w trzech punktach:

$f(-2) = (-2)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-2) = 5$,

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{16}$,

$f(2) = 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 3$.

Ponieważ $-\frac{1}{16} < 5$, to najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -2, 2\rangle$ jest równa $\left(-\frac{1}{16}\right)$, a wartość największa funkcji f wynosi 5.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\left\langle -\frac{1}{16}, 5\right\rangle$.

Istnienie wartości najmniejszej lub największej funkcji kwadratowej pozwala w niektórych przypadkach na określenie własności innych funkcji.

Przykład 5

Wyznaczymy najmniejszą wartość oraz największą wartość w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ funkcji f określonej wzorem $f\left(x\right) = \frac{1}{x^2-4x+8}$.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy pomocniczo funkcję g określoną wzorem $g(x) = x^2 - 4x + 8$.

Wyznaczymy wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji g w przedziale $\langle 0, 4\rangle$.

Obliczamy pierwszą współrzędną p wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji g:

$p = \frac{4}{2} = 2$

Ponieważ $p = 2 \in \langle 0, 4\rangle$, zatem funkcja g przyjmuje wartość najmniejszą w wierzchołku paraboli, będącej wykresem tej funkcji, a wartość największą w danym przedziale w jednym z końców przedziału $\langle 0, 4\rangle$.

Zatem:

$g(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 8 = 8$

$g(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 8 = 4$

$g(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 8 = 8$

Ponieważ $4 < 8$, to wartość najmniejsza funkcji g w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ wynosi 4, a wartość największa funkcji wynosi 8.

Zauważmy, że zachodzi zależność: $f\left(x\right) = \frac{1}{g(x)}$ i funkcja g w rozpatrywanym przedziale przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Wobec tego wartość najmniejsza funkcji f w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ wynosi:

$f\left(0\right) = f\left(4\right) = \frac{1}{g(4)} = \frac{1}{8}$

a wartość największa funkcji f w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ wynosi $f\left(2\right) = \frac{1}{g(2)} = \frac{1}{4}$

Przykład 6

Wyznaczymy wartość najmniejszą oraz wartość największą w przedziale $\langle 2, 3\rangle$ funkcji f określonej wzorem $f\left(x\right) = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy pomocniczo funkcję g określoną wzorem $g(x) = -x^2 + 5x - 6$.

Wyznaczymy wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji g w przedziale $\langle 2, 3\rangle$.

Obliczamy pierwszą współrzędną p wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji g:

$p = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$

Ponieważ $p = \frac{5}{2} \in \left\langle 2, 3\right\rangle$, zatem funkcja g przyjmuje wartość największą w wierzchołku paraboli, będącej wykresem tej funkcji, a wartość najmniejszą w jednym z końców przedziału $\langle 2, 3\rangle$.

Zatem:

$g(2) = -2^2 + 5 \cdot 2 - 6 = 0$

$g(\frac{5}{2}) = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{5}{2} - 6 = \frac{1}{4}$

$g(3) = -3^2 + 5 \cdot 3 - 6 = 0$

Ponieważ $0 < \frac{1}{4}$, to wartość najmniejsza funkcji g w przedziale $\langle 2, 3 \rangle$ wynosi 0, a wartość największa funkcji wynosi $\frac{1}{4}$. Wynika stąd również, że w rozpatrywanym przedziale funkcja g przybiera tylko wartości nieujemne.

Zauważmy, że zachodzi zależność: $f\left(x\right) = \sqrt{g(x)}$.

Wobec tego wartość najmniejsza funkcji f w przedziale $\langle 2, 3 \rangle$ wynosi:

$f\left(2\right) = f\left(3\right) = \sqrt{g(2)} = \sqrt{g(3)} = 0$

a wartość największa funkcji f w przedziale $\langle 2, 3 \rangle$ wynosi $f(\frac{5}{2}) = \sqrt{g(\frac{5}{2})} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Słownik

funkcja kwadratowa

funkcja określona na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet, a następnie przeanalizuj, jak zmienia się wartość najmniejsza/największa funkcji kwadratowej, w zależności od liczb, które są końcami podanego przedziału.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dg7GYREI0

Polecenie 2

Wyznacz wartość najmniejszą/największą w przedziale $\langle -4, 2\rangle$ funkcji kwadratowych f określonych wzorami:

a) $f(x) = -x^2 - x + 4$

b) $f(x) = x^2 - 6x - 2$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

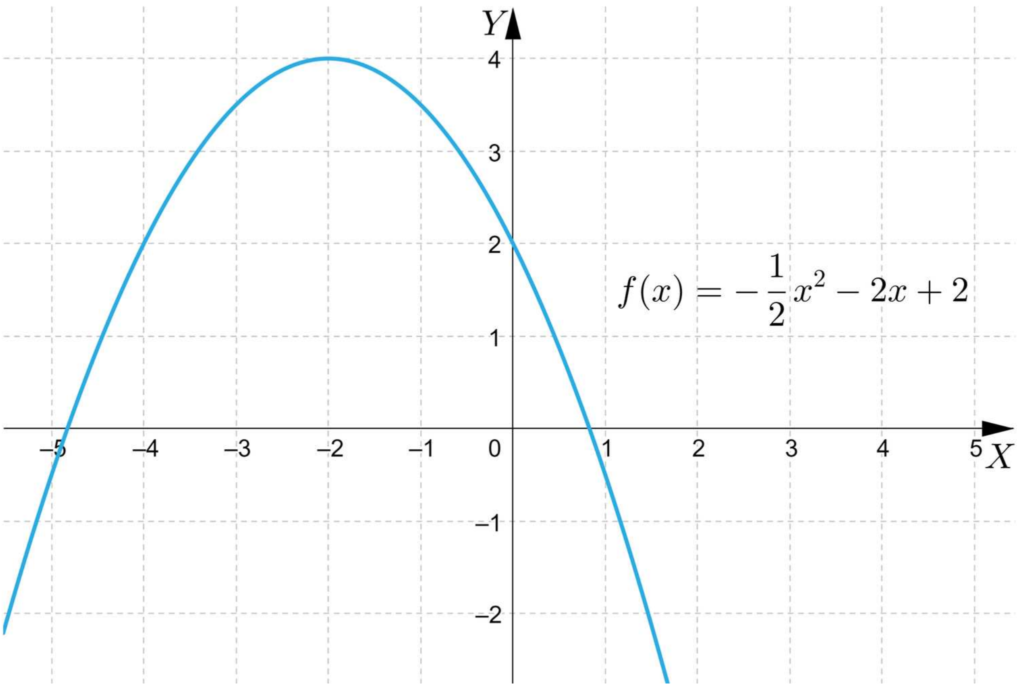
Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2.$



Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Wiadomo, że funkcja kwadratowa f dla $x = \frac{1}{2}$ przyjmuje wartość najmniejszą.

Wyznacz wartości współczynników b i c we wzorze tej funkcji kwadratowej, jeżeli funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$, a wyróżnik $\Delta = 49$.

Ćwiczenie 8

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Najmniejsza wartość funkcji f jest równa -2 oraz $f(-1) = f(3) = 2$. Wyznacz wzór funkcji f.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Najmniejsza/największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:
10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza wartość najmniejszą/największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym,
- stosuje wartość najmniejszą/największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym do wyznaczania wzoru funkcji kwadratowej,
- określa zbiór wartości funkcji kwadratowej określonej na przedziale domkniętym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda krokodyla;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Najmniejsza/największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym”, wskazuje cele zajęć, a następnie wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w 4-osobowych grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania przed całą klasą. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Wybrany uczeń odczytuje polecenie numer 1 z sekcji „Aplet”. Uczniowie zapoznają się z materiałem, a następnie wykonują polecenie numer 2. Po ustalonym czasie omawiają wspólnie z nauczycielem poprawność wykonanych poleceń, wyjaśniają wątpliwości.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po każdym zakończonym zadaniu wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie ma forum klasy.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienia rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Wartość najmniejsza oraz wartość największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Aplet” można wykorzystać do utrwalenia wiadomości w zakresie wyznaczania wartości najmniejszej/największej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.
- „Aplet” można wykorzystać do określania współrzędnych wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej.