Nierówności wymierne, w których licznik i mianownik to jednomiany

Nierówności wymierne, w których licznik i mianownik to jednomiany

Źródło: Rainer Bleek, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Ciekawostka

W 2017 roku rekordzistą w przepłynięciu Zatoki Płuckiej był Petar Stoychev (Bułgaria). Kilkunastokrotny Mistrz Świata na dystansie 25 km pokonał dystans ponad 18 km z Helu

> do Gdyni w ciągu 3 h $51\,$ min.

Wodolot to jednostka pływająca służąca do przewozu pasażerów, np. między miejscowościami Gdynia–Hel.

Załóżmy, że wodolot musi przepłynąć z Gdyni do Helu ($18\,$ km) w czasie krótszym niż $20\,$ min.

Wodolot
Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Jaka powinna być średnia prędkość wodolotu?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy posłużyć się nierównością wymierną:

$\frac{18}{v} < \frac{20}{60}$, gdzie v to prędkość wodolotu.

W tym materiale rozwiążesz nierówności wymierne, w których w liczniku i w mianowniku występuje jednomian. Przypomnij sobie definicję jednomianu oraz sposoby rozwiązywania nierówności wymiernej.

> **Twoje cele**
>
> - Rozwiążesz nierówności wymierne, w których w liczniku i w mianowniku występuje jednomian.
> - Doprowadzisz nierówność wymierną do równoważnej nierówności wielomianowej przy wyznaczonej dziedzinie nierówności wymiernej.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję jednomianu oraz twierdzenie o równoważności nierówności:

Definicja: Jednomianu

Jednomianem nazywamy wyrażenie algebraiczne, które jest liczbą, literą lub iloczynem liczb i liter,

np. $(-5); 2x; 4x^5; 0,56x^8$.

Twierdzenie: o równoważności nierówności

1. $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} > 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) > 0 \wedge W_2(x) \neq 0$
2. $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} < 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) < 0 \wedge W_2(x) \neq 0$
3. $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} \geq 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) \geq 0 \wedge W_2(x) \neq 0$
4. $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} \leq 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) \leq 0 \wedge W_2(x) \neq 0$

Zatem przy rozwiązywaniu nierówności wymiernych często skorzystamy z twierdzenia, że nierówność wymierną możemy zapisać w postaci równoważnej nierówności iloczynowej.

Warto przypomnieć algorytm rozwiązywania nierówności wymiernych.

I **sposób:**

1. Wyznaczamy dziedzinę nierówności wymiernej.
2. Sprowadzamy nierówność do postaci ogólnej - przenosimy wszystkie wyrażenia na jedną stronę nierówności.
3. Wykonujemy wskazane działania.
4. Nierówność wymierną rozwiązujemy doprowadzając ją do równoważnej postaci wielomianowej przy wyznaczonej dziedzinie nierówności wymiernej (zastępujemy iloraz iloczynem z uwzględnieniem założeń).
5. Wyznaczamy pierwiastki wielomianu oraz szkicujemy wykres.
6. Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań danej nierówności.
7. Wyznaczamy rozwiązanie nierówności wymiernej uwzględniając dziedzinę.

II **sposób:**

1. Wyznaczamy dziedzinę nierówności wymiernej.
2. Mnożymy obustronnie nierówność przez kwadrat mianownika lub przez inne wyrażenia, których znak jest jednoznacznie określony.

3. Wykonujemy wskazane działania.
4. Wyznaczamy pierwiastki wielomianu oraz szkicujemy wykres.
5. Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań danej nierówności.
6. Wyznaczamy rozwiązanie nierówności wymiernej uwzględniając dziedzinę.

Ważne!

Zwróćmy uwagę na to , że przy rozwiązywaniu nierówności wymiernej drugim sposobem, nie możemy mnożyć obustronnie nierówności przez mianownik wyrażenia wymiernego, jeśli nie wiemy jaki on ma znak, czy ujemny czy dodatni. Jeśli znak mianownika byłby ujemny, to po pomnożeniu nierówności przez ten mianownik, musielibyśmy zmienić zwrot nierówności.

Przykład 1

Załóżmy, że wodolot musi przepłynąć z Gdyni do Helu $(18\ \text{km})$ w czasie krótszym niż $20\ \text{min}$.

Rozwiążmy nierówność $\frac{18}{v} < \frac{20}{60}$, gdzie v to prędkość wodolotu.

Zauważmy, że $v \in (0; +\infty)$.

Wówczas

$\frac{18}{v} < \frac{1}{3} \mid \cdot 3v$,

gdzie $3v > 0$

$3 \cdot 18 < v$,

$54 < v$.

Wodolot przepłynie z Gdyni do Helu $(18\ \text{km})$ w czasie krótszym niż $20\ \text{min}$, gdy średni prędkość wodolotu będzie większa niż $54\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Przykład 2

Rozwiążmy nierówność $\frac{2}{x} < 0$.

Wyrażenie $\frac{2}{x}$ zapisane w nierówności jest określone, gdy $x \neq 0$.

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Rozwiążemy nierówność wymierną I sposobem.

Skorzystajmy z poniższej równoważność:

$\frac{W_1(x)}{W_2(x)} < 0 \ \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) < 0 \ \wedge \ W_2(x) \neq 0.$

Wówczas otrzymujemy

$\frac{2}{x} < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \wedge x \neq 0.$

Zatem $x < 0 \wedge x \neq 0.$

Rozwiązaniem nierówności $\frac{2}{x} < 0$ jest przedział $(-\infty; 0)$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $\frac{5\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2} \leq 2$.

Rozwiązując powyższą nierówność nie możemy zapomnieć o założeniach. Zatem $x^2 \neq 0$, czyli $x \neq 0$.

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Następnie rozwiązujemy nierówność $\frac{5x}{x^2} \leq 2$, wykonując działania na potęgach po lewej stronie nierówności.

Stąd $\frac{5}{x} \leq 2$.

Pomnóżmy obie strony nierówności przez x^2. Zauważmy, że $x^2 > 0$, więc zwrot nierówności nie ulega zmianie.

Wówczas $5x \leq 2x^2$,

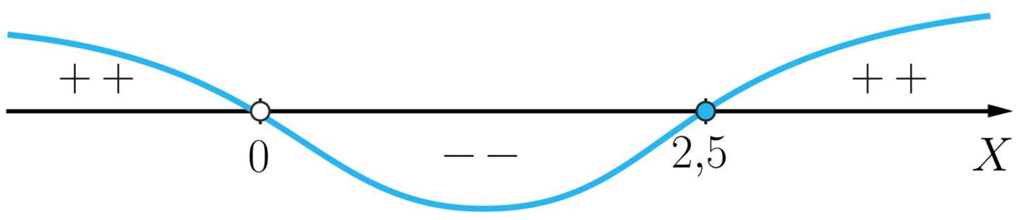
$2x^2 - 5x \geq 0.$

Wyłączmy $2x$ przed nawias

$2x\left(x - \frac{5}{2}\right) \geq 0.$

Wielomian $W(x) = 2x\left(x - \frac{5}{2}\right)$ ma dwa pierwiastki jednokrotne: 0 oraz $2,5$.

Uwzględniając dziedzinę nierówności wymiernej $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ szkicujemy wykres.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór $(-\infty; 0) \cup \langle 2,5; +\infty)$.

Przykład 4

Funkcja określona jest wzorem $f(x) = \frac{10}{x}$. Wyznaczmy te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje niemniejsze wartości niż funkcja $g(x) = -\frac{80}{x^4}$.

Rozwiążemy nierówność $\frac{10}{x} \geq -\frac{80}{x^4}$.

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pomnóżmy obustronnie nierówność wymierną przez x^4, bo $x^4 > 0$.

$\frac{10}{x} \geq -\frac{80}{x^4} \Big| \cdot x^4$

Zwrot nierówności nie ulegnie zmianie

$10x^3 \geq -80 \big| : 10,$

$x^3 \geq -8,$

$x^3 + 8 \geq 0.$

Skorzystajmy ze wzoru skróconego mnożenia

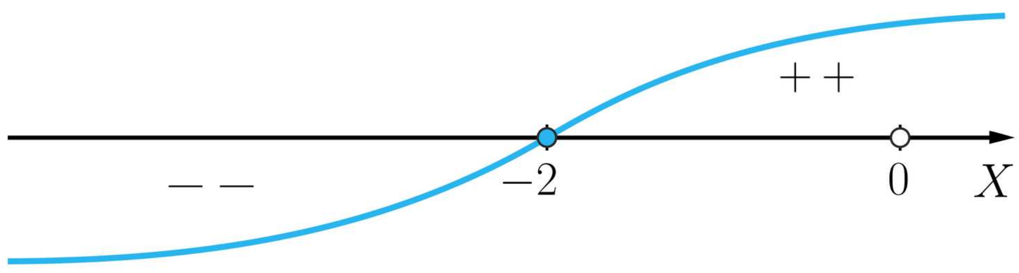
$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right).$

Wówczas

$(x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right) \geq 0.$

Wielomian $W(x) = (x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right)$ ma jeden jednokrotny pierwiastek: (-2).

Uwzględniając $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ szkicujemy wykres.



Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$ jest zbiór $x \in \langle -2; 0) \cup (0; +\infty)$.

Przykład 5

Rozwiążemy nierówność $\left|\frac{1}{x^3}\right| \leq \frac{1}{27}$.

Rozwiązując powyższą nierówność nie możemy zapomnieć o założeniach. Zatem $x^3 \neq 0$, czyli $x \neq 0$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Rozwiążemy nierówność w przedziale $(-\infty; 0)$:

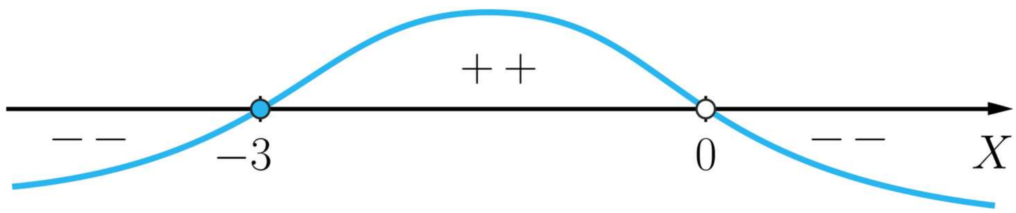
$-\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{27} \Big| \cdot 27x^6$, gdzie $27x^6 > 0$

$-27x^3 \leq x^6$,

$-x^3\left(x^3 + 27\right) \leq 0.$

Wielomian $W(x) = -x^3\left(x^3 + 27\right)$ ma jeden trzykrotny pierwiastek: 0 oraz jeden jednokrotny pierwiastek: (-3).

Szkicujemy wykres uwzględniając dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Rozwiązaniem nierówności $-\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{27}$ jest przedział $(-\infty; -3\rangle \cup (0; +\infty)$.

Wyznaczamy część wspólną przedziałów:

$(-\infty; 0) \cap [(-\infty; -3\rangle \cup (0; +\infty)] = (-\infty; -3\rangle$.

Następnie rozwiążmy nierówność w przedziale $(0; +\infty)$:

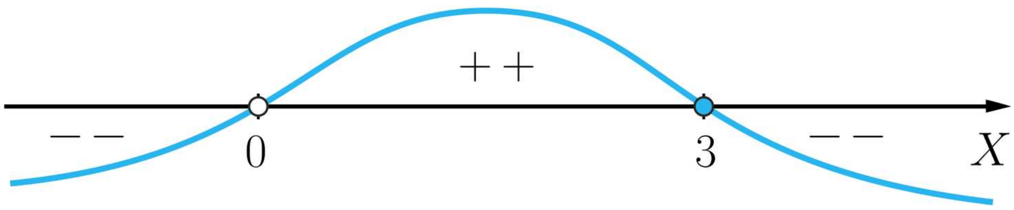
$\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{27} \Big| \cdot 27x^6$, gdzie $27x^6 > 0$

$27x^3 \leq x^6$,

$x^3\left(-x^3 + 27\right) \leq 0.$

Wielomian $P(x) = x^3\left(-x^3 + 27\right)$ ma jeden pierwiastek trzykrotny: 0 oraz jeden jednokrotny pierwiastek: 3.

Uwzględniając dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ szkicujemy wykres.



Rozwiązaniem nierówności $\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{27}$ jest zbiór $(-\infty;\ 0) \cup \langle 3; +\infty)$.

Wyznaczamy część wspólną przedziałów:

$(0; +\infty) \cap [(-\infty;\ 0) \cup \langle 3; +\infty)] = \langle 3; +\infty)$.

Wyznaczmy sumę przedziałów:

$(-\infty; -3\rangle \cup \langle 3; +\infty)$.

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $(-\infty; -3\rangle \cup \langle 3; +\infty)$.

Słownik

dziedzina nierówności wymiernej

dziedziną nierówności wymiernej są wszystkie liczby rzeczywiste za wyjątkiem pierwiastków wielomianu $W_2(x)$ znajdującego się w mianowniku danego wyrażenia $\frac{W_1(x)}{W_2(x)}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x : W_2(x) = 0\}$$

pierwiastek wielomianu

pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy liczbę rzeczywistą a, dla której $W(a) = 0$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładem przedstawionym na infografice, a następnie wykonaj polecenie 2 i 3.

Polecenie 2

Uzupełnij zdania.

Zbiorem rozwiązań nierówności:

$\frac{1}{x^2} > 0$ jest ______.

$\frac{1}{x^2} < 0$ jest ______.

$\frac{1}{x^2} \geq 0$ jest ______.

$\frac{1}{x^2} \leq 0$ jest ______.

zbiór pusty | zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem zera | zbiór liczb rzeczywistych dodatnich | zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem zera | zbiór pusty | zbiór liczb rzeczywistych ujemnych

Zbiorem rozwiązań nierówności:

$\frac{1}{x^3} > 0$ jest ______.

$\frac{1}{x^3} < 0$ jest ______.

$\frac{1}{x^3} \geq 0$ jest ______.

$\frac{1}{x^3} \leq 0$ jest ______.

zbiór liczb rzeczywistych ujemnych | zbiór liczb rzeczywistych dodatnich | zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem zera | zbiór pusty | zbiór liczb rzeczywistych ujemnych | zbiór liczb rzeczywistych dodatnich

Polecenie 3

Rozwiązaniem nierówności $\frac{3}{x^2} \geq \frac{12}{x^6}$ jest

- $x \in \left\langle -\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{2}\right\rangle$
- $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right\rangle \cup \left\langle \sqrt{2}; +\infty\right)$
- $x \in \langle -2; 0) \cup (0; 2\rangle$
- $x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; +\infty)$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wskaż liczby spełniające nierówność $\frac{5x^4}{x^{12}} \geq 0$

- [ ] $\sqrt{6}$
- [ ] 5
- [ ] 0
- [ ] π

Ćwiczenie 2

Pogrupuj nierówności ze względu na ich rozwiązanie:

$x \in (0; +\infty)$

$x \in (-\infty; 0)$

$\frac{-3x^{11}}{-2x^6} \geq 0$

$\frac{5x^{10}}{x^5} \leq 0$

$-\frac{3x}{x^2} \geq 0$

$\frac{2}{x} > 0$

$\frac{2x^6}{x^3} \leq 0$

$\frac{-2x^6}{5x^{15}} \leq 0$

$\frac{3x^6}{x^{15}} > 0$

$\frac{-6}{x} > 0$

Ćwiczenie 3

Rozwiązaniem nierówności $\frac{5x^6}{x^{20}} \geqslant 5$ są:

- $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty)$
- $x \in \langle -1; 0) \cup (0; 1\rangle$
- $x \in \langle -1; 1\rangle$

Ćwiczenie 4

Rozwiązaniem nierówności

$-\frac{2}{x} < -2$	jest	$x \in (0; 1)$
$\frac{1}{x} \geq 1$	jest	$x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$
$\frac{x^2}{x^7} > \frac{1}{32}$	jest	$x \in (0; 1\rangle$
$\frac{x^2}{x^6} > \frac{1}{16}$	jest	$x \in (0; 2)$

Ćwiczenie 5

Spośród poniższych nierówności wskaż tę, którą spełnia dokładnie sześć liczb całkowitych.

- $\left|\frac{1}{x}\right| > 6$
- $\left|\frac{1}{x}\right| > 4$
- $\left|\frac{1}{x}\right| > \frac{1}{6}$
- $\left|\frac{1}{x}\right| > \frac{1}{4}$

Ćwiczenie 6

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{\pi}{x}$. Wyznacz argument będący największą liczbą całkowitą, dla której funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż $\frac{1}{30}$.

Zakoduj kolejno cyfrę setek, dziesiątek i jedności kwadratu otrzymanego wyniku, gdzie $\pi = 3,14$.

Ćwiczenie 7

Funkcja określona jest wzorem $f(x) = \frac{2}{x^3}$. Wyznacz te argumenty, dla których funkcja f przyjmuje mniejsze wartości niż funkcja $g(x) = \frac{54}{x^6}$.

Ćwiczenie 8

Rozwiąż nierówność $|x| \leq \frac{16}{x^3}$.

Dla nauczyciela

Autor: Monika Dudek

Przedmiot: Matematyka

Temat: Nierówności wymierne, w których licznik i mianownik to jednomiany

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż $\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności wymierne, gdzie w liczniku i w mianowniku występuje jednomian;
- doprowadza nierówność wymierną do równoważnej nierówności wielomianowej przy wyznaczonej dziedzinie nierówności wymiernej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- analiza materiału źródłowego (porównawcza);
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie przed lekcją przypominają sobie sposoby rozwiązywania równań wymiernych, nierówności wielomianowych, wyznaczania dziedziny ułamka algebraicznego, skracania i rozszerzania ułamków algebraicznych.
- Uczniowie czytają w domu przykłady z sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Nierówności wymierne, w których licznik i mianownik to jednomiany", wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji „Infografika". Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
2. Uczniowie wykonują w grupach 3-osobowych lub 4-osobowych polecenie nr 2 i 3 z sekcji „Infografika".
3. Nauczyciel sprawdza poprawność zadań. W razie wątpliwości udziela odpowiedzi na zadane przez uczniów pytania.
4. Następnie uczniowie rozwiązują ćwiczenia 2,5,6 w sekcji „Sprawdź się". Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić

uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie realizują indywidualnie kolejne ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
- Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Nierówność wymierna, w których licznik i mianownik to jednomiany” i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli).
- Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i uzupełnia informacje.

Praca domowa:

- Uczniowie tworzą dwa własne przykłady nierówności wymiernej, w których licznik i mianownik to jednomiany. Jednym z rozwiązań nierówności wymiernej ma być zbiór liczb rzeczywistych lub zbiór pusty.

Materiały pomocnicze:

- Rozwiązywanie nierówności wymiernych
- Nierówności wielomianowe

Wskazówki metodyczne:

Infografikę można wykorzystać na lekcji „Nierówności wymierne” jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy z nierówności wymiernych.