Ciąg arytmetyczny określony wzorem rekurencyjnym

Ciąg arytmetyczny określony wzorem rekurencyjnym

Źródło: Navneet Mahajan, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

Turtles all the way down, czyli żółwie do samego końca to powiedzenie nawiązuje do legendy, według której to żółw podtrzymuje płaską Ziemię na plecach. Ten żółw stoi na grzbiecie jeszcze większego żółwia, który stoi na plecach jeszcze większego żółwia, który stoi na plecach jeszcze większego żółwia i tak – w nieskończoność ...

Żółwie rzeczne

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Żółwie stojący jeden na drugim to matematyczny odpowiednik rekurencji. W tym materiale pokażemy, jak rekurencyjnie można określać ciąg arytmetyczny i na podstawie takiego wzoru badać własności tego ciągu.

Twoje cele

- Określisz ciąg arytmetyczny w sposób rekurencyjny.
- Na podstawie wzoru rekurencyjnego ciągu arytmetycznego wyznaczysz własności tego ciągu.

Przeczytaj

Przykład 1

Szwaczka według planu powinna uszyć 10 sukienek dziennie. Za uszycie jedenastej sukienki otrzymuje 30 zł, a za uszycie każdej następnej sukienki otrzymuje o 10 zł więcej niż za uszycie poprzedniej.

Oznaczając przez s_n kwotę, którą otrzyma szwaczka za uszycie n–tej sukienki ponad plan, możemy zapisać:

$s_1 = 30$

$s_2 = s_1 + 10$

$s_3 = s_2 + 10$

$\dots$

$s_{n+1} = s_n + 10$

Zauważmy, że liczby s_1, s_2, s_3, $\dots$, s_n tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 10.

Ciąg ten zdefiniowany jest wzorem rekurencyjnym.

$$\begin{cases} s_1 = 30 \\ s_{n+1} = s_n + 10 \end{cases}$$

Istotą definicji rekurencyjnej jest odwoływanie się do samej siebie. W takiej definicji ciągu w wyrażeniu definiującym, obok symbolu zmiennej n występuje symbol definiowanego ciągu. Zatem wyraz ciągu zależy nie tylko od zmiennej n, ale też od jednego lub kilku wyrazów poprzednich.

Definicja: Ciąg zdefiniowany rekurencyjnie

Mówimy, że ciąg jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeżeli:

- określony jest pewien skończony zbiór wyrazów tego ciągu (zwykle jest to pierwszy wyraz ciągu lub kilka jego pierwszych wyrazów),
- pozostałe wyrazy ciągu są zdefiniowane za pomocą poprzednich wyrazów tego ciągu.

Wzór definiujący ciąg w taki sposób, nazywamy **zależnością rekurencyjną**.

Aby zapisać zależność rekurencyjną dla ciągu arytmetycznego (co najmniej trzywyrazowego), ustalamy najpierw pewną liczbę a (pierwszy wyraz ciągu) i liczbę r (różnicę ciągu).

Wzór rekurencyjny ciągu arytmetycznego (a_n):

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases},$$

gdzie:
a – pierwszy wyraz ciągu,
r – różnica ciągu, $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$

> **Przykład 2**
>
> Zapiszemy wzór rekurencyjny ciągu arytmetycznego siedmiowyrazowego (a_n) o wyrazach:
>
> 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27.
>
> Odczytujemy pierwszy oraz drugi wyraz ciągu i określamy różnicę ciągu.
>
> $a_1 = 3$
>
> $a_2 = 7$
>
> $r = 7 - 3 = 4$
>
> Zapisujemy wzór
>
> $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$, gdzie $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 7$.

> **Przykład 3**
>
> Ciąg (a_n) spełnia następujące warunki:
>
> - pierwszy wyraz jest równy 20, czyli $a_1 = 20$,
> - każdy następny wyraz jest o 3 mniejszy od poprzedniego.
>
> Powyższe warunki pozwalają na określenie kolejnych wyrazów ciągu:
>
> $a_1 = 20$
>
> $a_2 = 20 - 3 = 17$
>
> $a_3 = 17 - 3 = 14$

$\ldots$

Taki sposób wyznaczania wyrazów ciągu jest uciążliwy, bo gdybyśmy musieli obliczyć np. wyraz setny, to trwałoby to dość długo. Zatem wygodniej jest zapisać wzór ciągu w sposób rekurencyjny i na podstawie tego wzoru, znaleźć wzór ogólny ciągu.

Wzór rekurencyjny:

$\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \end{cases}$, gdzie $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Określamy różnicę ciągu.

$r = 17 - 20 = -3$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$a_n = 20 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 23$

Wiemy już, że na podstawie wzoru rekurencyjnego możemy znaleźć dowolny wyraz ciągu, ale procedura jest wtedy znacznie dłuższa, niż przy wykorzystaniu wzoru ogólnego. Gdyż, aby wyznaczyć wyraz k–ty, musimy znać wszystkie wyrazy o numerach mniejszych od k.

Przykład 4

Znajdziemy piąty wyraz ciągu arytmetycznego (c_n) określonego wzorem

$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = c_n + 1 \end{cases}$,

gdzie:
$n = 1, 2,\ 3,\ \ldots$

Wyznaczamy kolejne wyrazy ciągu, aż do c_5.

$c_1 = 1$

$c_2 = 1 + 1 = 2$

$c_3 = 2 + 1 = 3$

$c_4 = 3 + 1 = 4$

$c_5 = 4 + 1 = 5$

Odpowiedź:

Piąty wyraz ciągu jest równy 5.

Wzór rekurencyjny ciągu możemy zapisać również w przypadku, gdy znamy co najmniej dwa wyrazy ciągu arytmetycznego lub zależności łączące wyrazy ciągu.

Przykład 5

Wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, spełniają poniższy układ równań.

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -0,5 \\ a_4 + a_7 = -1,5 \end{cases}$$

Wyznaczymy wzór rekurencyjny tego ciągu.

Aby zapisać wzór rekurencyjny, na podstawie podanego układu równań, będziemy musieli znaleźć pierwszy wyraz ciągu i różnicę ciągu.

Zauważmy, że $a_4 = a_3 + r$ i $a_7 = a_6 + r$.

Układ równań zapisany w treści zadania przyjmuje więc postać:

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -0,5 \\ a_3 + r + a_6 + r = -1,5 \end{cases}.$$

Odejmujemy od drugiego równania pierwsze równanie układu i wyznaczamy różnicę ciągu.

$2r = -1$

$r = -\frac{1}{2}$

Zapisujemy wyrazy pierwszego równania za pomocą pierwszego wyrazu ciągu i różnicy ciągu.

$a_3 + a_6 = -0,5$

$a_1 + 2r + a_1 + 5r = -0,5$

W miejsce r podstawiamy wyznaczoną liczbę.

$2a_1 + 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -0,5$

$2a_1 = 3$

Z otrzymanego równania wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu.

$a_1 = 1,5$

Zapisujemy wzór rekurencyjny ciągu.

$\begin{cases} a_1 = 1,5 \\ a_{n+1} = \ a_n - 0,5 \end{cases}$, gdzie $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Na podstawie ciągu rekurencyjnego, możemy badać własności ciągu arytmetycznego.

Przykład 6

Zbadamy monotoniczność ciągu arytmetycznego (a_n) określonego wzorem:

$\begin{cases} a_1 = -\sqrt{3} \\ a_{n+1} = \ a_n + 2\sqrt{3} \end{cases}$, gdzie $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Obliczamy drugi wyraz ciągu i wyznaczymy różnicę ciągu.

$a_2 = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$r = \sqrt{3} - \left(-\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$a_n = -\sqrt{3} + (n-1) \cdot 2\sqrt{3} = 2n\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

Badamy różnicę dwóch kolejnych wyrazów ciągu.

$a_{n+1} - a_n = \left(2n\sqrt{3} - \sqrt{3}\right) - \left(2n\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right)$

$a_{n+1} - a_n = 2n\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2n\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} > 0$

Różnica jest liczbą dodatnią. Wnioskujemy, że $a_{n+1} > a_n$, a to oznacza, że ciąg jest rosnący.

Odpowiedź:

Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

Słownik

wzór rekurencyjny ciągu arytmetycznego

wzór rekurencyjny ciągu arytmetycznego (a_n):

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases},$$

gdzie:
a – pierwszy wyraz ciągu,
r – różnica ciągu, $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką – staraj się najpierw samodzielnie rozwiązać zadania.

Polecenie 2

Znajdź pięć początkowych wyrazów ciągu (b_n).

$\begin{cases} b_1 = -2 \\ b_{n+1} = b_n - 3 \end{cases}$, gdzie $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawną odpowiedź. Ciąg arytmetyczny (b_n) określony jest wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} b_1 = \sqrt{2} \\ b_{n+1} = b_n + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ gdzie } n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Szósty wyraz ciągu to:

- $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{7\sqrt{2}}{2}$
- $2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 2

Zaznacz wzór rekurencyjny ciągu arytmetycznego (a_n) o początkowych wyrazach:
$512,\ 320,\ 128,\ -64,\ \ldots$

- $\begin{cases} a_1 = \frac{5}{8} \\ a_{n+1} = 512 \cdot a_n \end{cases}$, gdzie $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
- $\begin{cases} a_1 = 512 \\ a_{n+1} = \frac{8}{5} \cdot a_n \end{cases}$, gdzie $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
- $\begin{cases} a_1 = 512 \\ a_{n+1} = 512 + a_n \end{cases}$, gdzie $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
- $\begin{cases} a_1 = 512 \\ a_{n+1} = a_n - 192 \end{cases}$, gdzie $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Ćwiczenie 3

Ciąg $(16,\ x,\ 9)$ jest arytmetyczny o wyrazach dodatnich. Uzupełnij obliczenia prowadzące do wyznaczenia wzoru rekurencyjnego ciągu. Wpisz odpowiednie liczby.

Ciąg jest arytmetyczny, zatem

$2x = 16+$ [ ]

$2x = 25$

$x = 12,5$

Wyznaczamy różnicę ciągu.

$12,5-$ [ ] $= -3,5$

Zapisujemy wzór rekurencyjny ciągu.

$a_1 =$ [ ] i $a_{n+1} = a_n - 3,5.$

Ćwiczenie 4

Długości a_1, a_2, a_3 krawędzi prostopadłościanu o objętości 28 tworzą (w tej kolejności) ciąg arytmetyczny rosnący, a ich suma jest równa 12. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu i uzupełnij wzór rekurencyjny ciągu, utworzonego przez długości tych krawędzi, przeciągając odpowiednie liczby lub wyrażenia.

$a_1 =$ [ ] oraz $a_{n+1} =$ [ ],

gdzie $n = 1,\ 2.$

16 | 4 | $3a_n$ | $a_n + 3$ | 7 | $a_n - 3$ | 1 | $a_n + 7$

Ćwiczenie 5

Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem
$\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = 2 + a_n \end{cases}$, gdzie $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Trzeci wyraz tego ciągu jest liczbą dodatnią.	○	○
Iloczyn drugiego i czwartego wyrazu ciągu jest równy iloczynowi trzeciego i piątego wyrazu tego ciągu.	○	○
Różnica między trzecim a drugim wyrazem tego ciągu jest równa różnicy między czwartym a trzecim wyrazem tego ciągu.	○	○
Różnica tego ciągu jest liczbą ujemną.	○	○
Wzór ogólny ciągu to $a_n = 2n - 7$.	○	○

Ćwiczenie 6

Połącz w pary wyrazy ciągu arytmetycznego i wzór ciągu zapisany w postaci rekurencyjnej.

$11,\ 16,\ 21,\ 26,\ \ldots$	$\begin{cases} a_1 = 11 \\ a_{n+1} = \sqrt{25} + a_n \end{cases}$
$-8,\ -5,\ -2$	$\begin{cases} a_1 = 64 \\ a_{n+1} = a_n - 2^5 \end{cases}$
$10,\ -50,\ -110,\ \ldots$	$\begin{cases} a_1 = (-2)^3 \\ a_{n+1} = 3 + a_n \end{cases}$
$64,\ 32,\ 0,\ -32,\ \ldots$	$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = -60 + a_n \end{cases}$

Ćwiczenie 7

Zapisz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazach dodatnich, określonego następującym wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = m \\ a_{n+2} = \frac{2a_n + 4}{2} \end{cases}$$, gdzie $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$ i $m \in \mathbb{R}$

Ćwiczenie 8

Suma trzech kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi $49,5$. Iloczyn pierwszego i drugiego wyrazu jest równy 231.

Zapisz wzór rekurencyjny tego ciągu.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciąg arytmetyczny określony wzorem rekurencyjnym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach

a) $\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_n = \ a_n + \frac{1}{2} \cdot a_n(1 - a_n) \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = \ a_{n+1} \ + \ a_n \end{cases}$;

3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;

5) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa ciąg arytmetyczny w sposób rekurencyjny
- na podstawie wzoru rekurencyjnego ciągu arytmetycznego wyznacza własności tego ciągu

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykres Ishikawy
- analiza morfologiczna
- metoda 2 – 1

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą 2 – 1 (dwóch zadaje pytania, jeden odpowiada) powtarzają wiadomości na temat sposobów wyznaczania wzoru ogólnego ciągu arytmetycznego.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z materiałami z sekcji „Przeczytaj” oraz z infografiką. Następnie analizują zależności przyczynowo – skutkowe w zadaniach związanych ze wzorem rekurencyjnym ciągu arytmetycznego i sporządzają wykres Ishawy pokazujący te zależności.
2. Grupy prezentują swoje wykresy i wspólnie ustalają algorytm rozwiązywania zadań z wykorzystaniem wzoru rekurencyjnego ciągu arytmetycznego.
3. Ostatnim elementem tej części lekcji jest wspólne rozwiązywanie ćwiczeń interaktywnych 1 – 4 i analiza morfologiczna problemów związanych z zastosowaniem rekurencji związanej z ciągiem arytmetycznym.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie w domu ćwiczeń 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Ciąg arytmetyczny

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wykorzystana na lekcji pokazującej sposoby tworzenia wzorów rekurencyjnych funkcji.