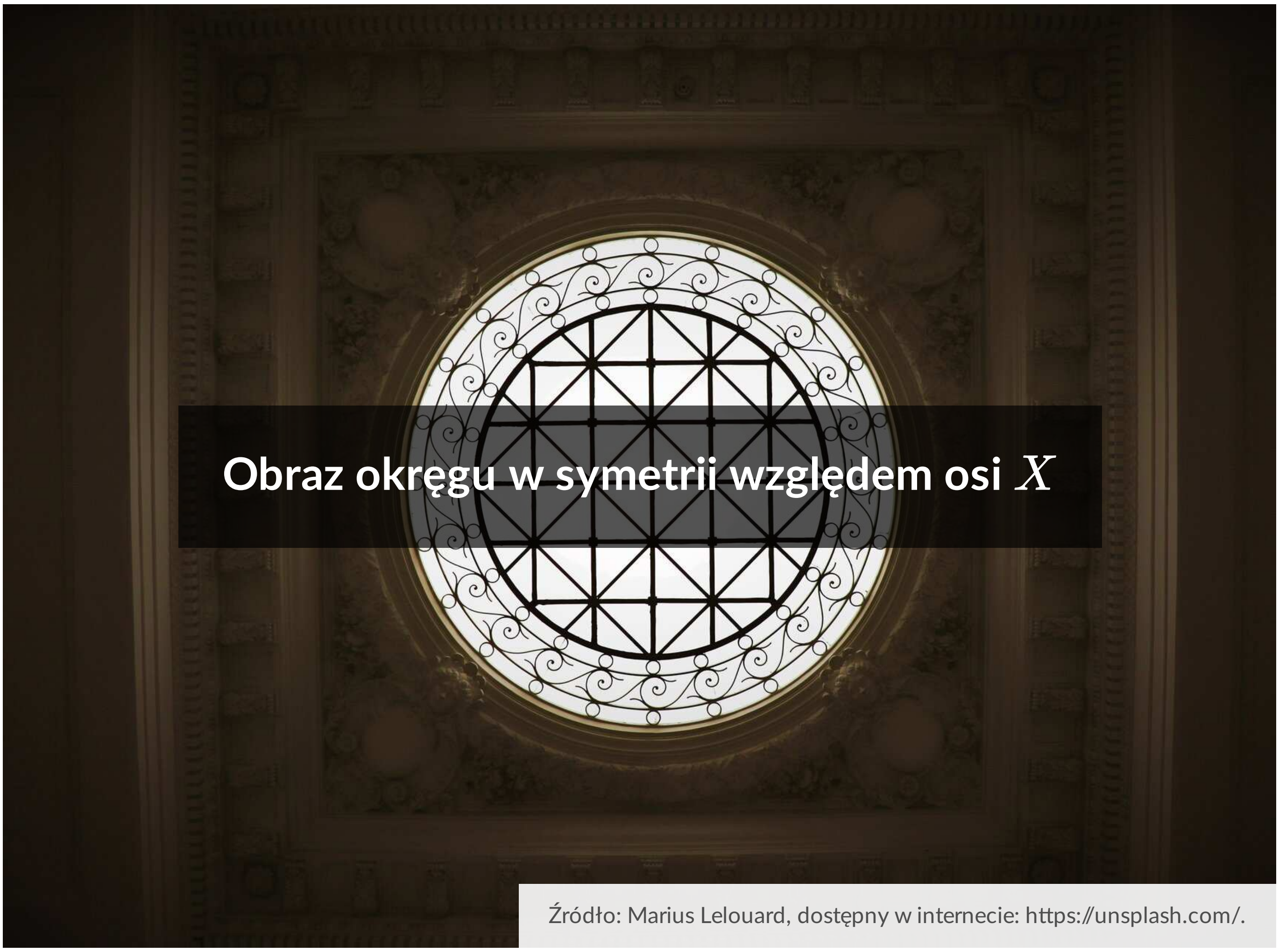
Obraz okręgu w symetrii względem osi X



Źródło: Marius Lelouard, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Wykres funkcji $y=-f(x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y=f(x)$ przez symetrię osiową względem osi X. Jak jednak wyznaczyć obraz okręgu w symetrii względem tej osi, skoro równanie okręgu nie jest funkcją?

Twoje cele

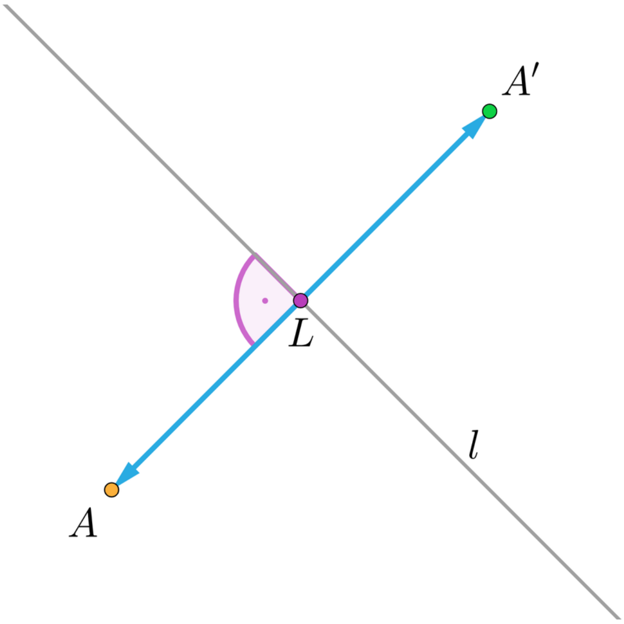
- Wyznaczysz równanie okręgu symetrycznego do danego względem osi X.
- Wyznaczysz równanie okręgu symetrycznego do danego względem prostej równoległej do osi X.
- Zastosujesz poznane zależności rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Przeczytaj

Na początek przypomnimy pojęcie symetrii względem prostej.

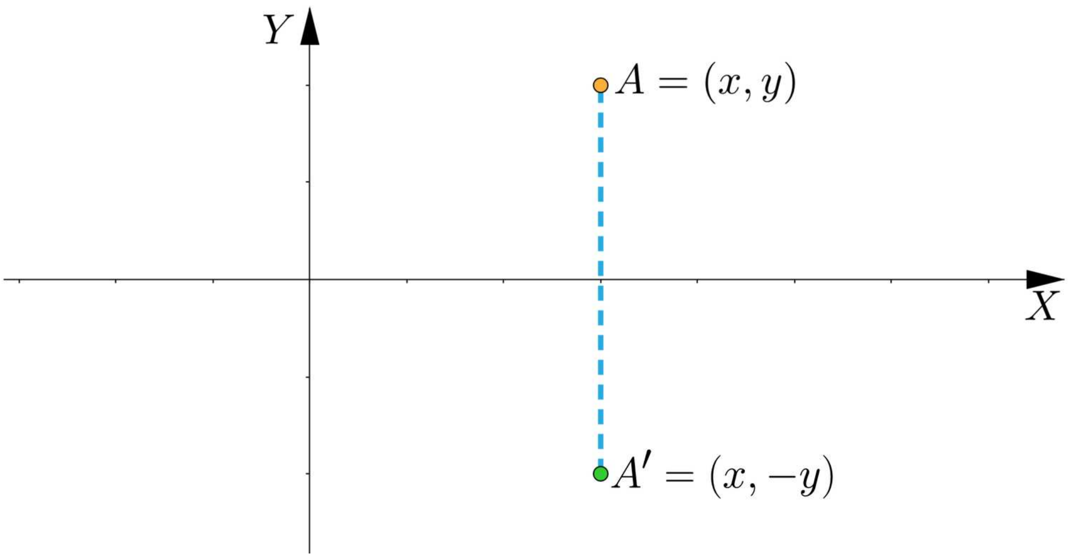
Definicja: Symetria osiowa

Symetrią osiową względem prostej l nazywamy przekształcenie geometryczne, w którym każdemu punktowi A, $A \notin l$, przyporządkowujemy taki punkt A', dla którego prosta AA' jest prostopadła do prostej l i wektory $\overrightarrow{LA}$ oraz $\overrightarrow{LA}$' są przeciwne, gdzie punkt L jest punktem wspólnym prostej AA' i prostej l.



Jeśli $A \in l$, to obrazem tego punktu w symetrii osiowej względem prostej l jest ten sam punkt. Symetrię osiową względem prostej l oznaczamy S_l.

Określimy zależności między współrzędnymi punktów symetrycznych względem prostej o równaniu $y = 0$ (oś X):



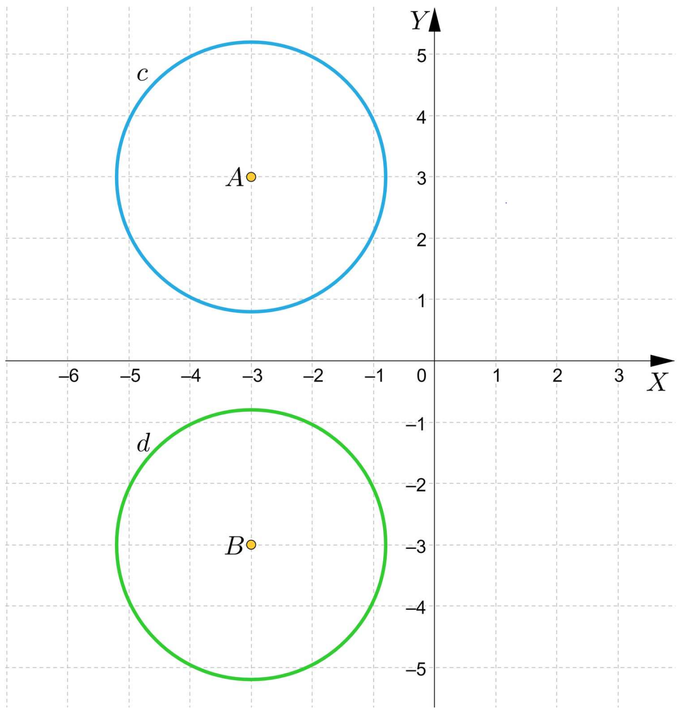
Zauważmy, że:

- odcięte punktów A i A’ są równe,
- rzędne punktów A i A’ są liczbami przeciwnymi.

Zatem:

$$S_x : \begin{cases} x’ = x \\ y’ = -y \end{cases}.$$

Narysujemy teraz okręgi symetryczne względem osi X.



Zauważmy, że środki tych okręgów są punktami symetrycznymi względem osi X, zaś promienie są równe.

Przykład 1

Wyznaczymy równanie obrazu okręgu o równaniu $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ w symetrii osiowej względem osi X.

Rozwiązanie:

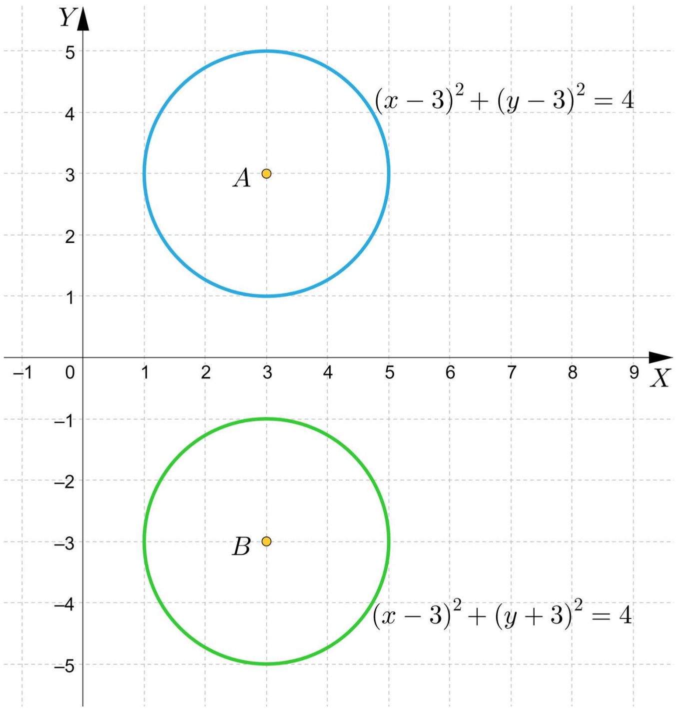
Obrazem punktu $A=(x,y)$ w symetrii osiowej względem osi X jest punkt $A' = (x,-y)$, więc zmieniając y na $(-y)$, otrzymujemy:

$(-y-3)^2=(-(y+3))^2=(y+3)^2.$

Stąd równanie obrazu okręgu ma postać:

$(x-3)^2+(y+3)^2=4.$

Poniższy rysunek przedstawia dany okrąg oraz jego obraz w symetrii osiowej względem osi X.



Przykład 2

Napiszemy równanie okręgu, którego obrazem w symetrii względem osi X jest okrąg o równaniu $x^2+y^2-2x+2y-2=0$.

Rozwiązanie:

Zmieniając y na $(-y)$, otrzymujemy:

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$

Przykład 3

Udowodnimy, że okrąg o średnicy AB, gdzie $A = (-3, 4)$; $B = (-1, 0)$, jest symetryczny do okręgu o średnicy CD, gdzie $C = (-4, -1)$; $D = (0, -3)$, względem osi X.

Rozwiązanie:

Wyznaczymy współrzędne środków tych okręgów i długości ich promieni.

Dla okręgu o średnicy AB:

$S_1 = \left(\frac{-3-1}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$, czyli $S_1 = (-2, 2)$ i $r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(-1+3)^2 + (0-4)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5}.$

Dla okręgu o średnicy CD:

$S_2 = \left(\frac{-4+0}{2}, \frac{-1-3}{2}\right)$, czyli $S_2 = (-2, -2)$ i
$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(0+4)^2 + (-3+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5}.$

Ponieważ promienie tych okręgów mają równe długości: $r_1 = r_2 = \sqrt{5}$, a środki S_1 i S_2 są punktami symetrycznymi względem osi X, to okręgi są symetryczne względem osi X.

Przykład 4

Wyznaczymy pole trójkąta ABC, jeśli A jest środkiem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$, B jest środkiem okręgu o' symetrycznego do danego okręgu względem osi X, zaś C jest punktem styczności okręgu o' i prostej o równaniu $y = -3x + 9$.

Rozwiązanie:

Wyznaczymy współrzędne punktu A oraz długość promienia r_1 okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0.$

Skorzystamy z równania ogólnego okręgu: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (punkt $A = (a, b)$ jest jego środkiem, zaś promień r ma długość: $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$). Zatem:

$-2a = 2$, stąd $a = -1$,

$-2b = 4$, stąd $b = -2$,

$r_1 = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 - (-5)} = \sqrt{1+4+5} = \sqrt{10}.$

Ponieważ punkt B jest środkiem okręgu symetrycznego do danego okręgu względem osi X, to $B = (-1, 2)$ i jego promień ma długość $r_2 = \sqrt{10}$. Równanie tego okręgu ma postać: $x^2+y^2+2x-4y-5=0$.

Wyznaczymy teraz współrzędne punktu C.

Rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} y=-3x+9 \\ x^2+y^2+2x-4y-5=0 \end{cases}.$$

Po podstawieniu za zmienną y w drugim równaniu zależności z pierwszego równania, mamy:

$x^2+(-3x+9)^2+2x-4(-3x+9)-5=0$

$x^2+9x^2-54x+81+2x+12x-36-5=0$

$10x^2-40x+40=0$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$x=2$.

Punkt C ma współrzędne: $C=(2,3)$.

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A=(x_A,y_A)$; $B=(x_B,y_B)$; $C=(x_C,y_C)$ wyraża się wzorem:

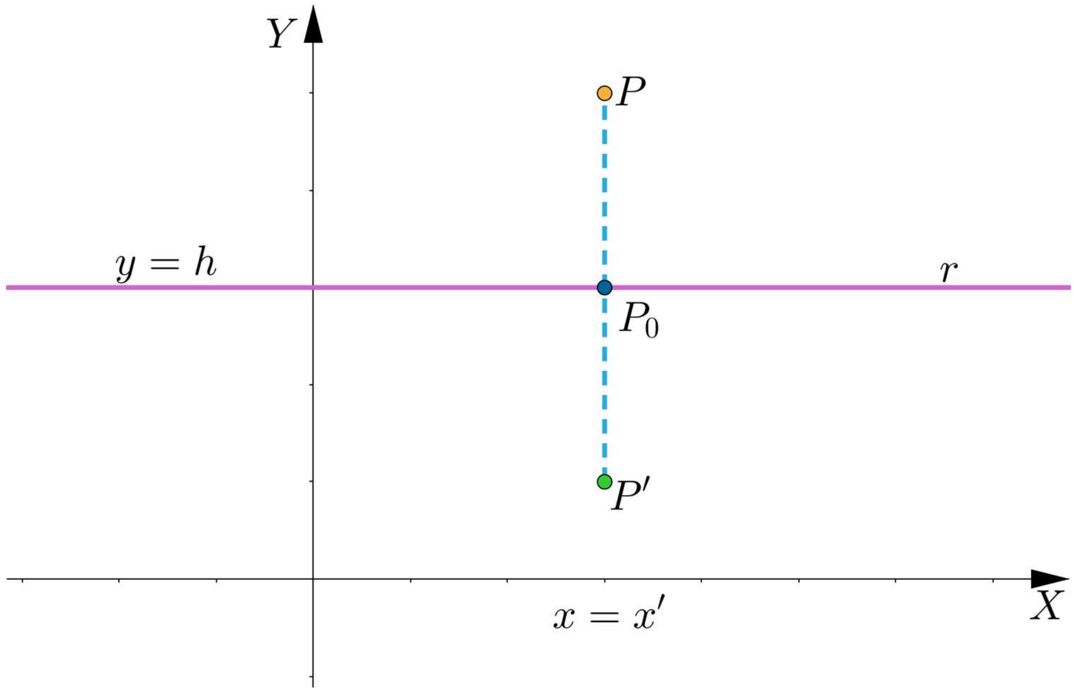
$P=\frac{1}{2}\cdot|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)|$.

Zatem:

$P=\frac{1}{2}\cdot|(-1-(-1))(3-(-2))-(2-(-2))(2-(-1))|=$

$=\frac{1}{2}\cdot|-12|=6$.

Niech $r:\ y=h$ będzie prostą równoległą do osi X, a $P'=(x',y')$ obrazem symetrycznym do punktu $P=(x,y)$ względem tej prostej.



Widzimy, że $x\text{'} = x$. Punkt P_0, jako środek odcinka PP', ma odciętą $y_0 = \frac{y+y\text{'}}{2}$, gdzie $y_0 = h$, zatem:

$$\begin{cases} x\text{'} = x \\ y\text{'} = 2h - y \end{cases}.$$

Zauważmy, że jeżeli $h = 0$, to z powyższych wzorów otrzymamy współrzędne punktu symetrycznego względem osi X:

$$\begin{cases} x\text{'} = x \\ y\text{'} = -y \end{cases}.$$

Przykład 5

Punkt P' jest symetryczny do punktu P o współrzędnych $\left(-\sqrt{7}, \sqrt{3}\right)$ względem prostej o równaniu $y = 4$. Wyznaczymy współrzędne punktu P' oraz równania okręgów o środkach w punktach P i P' i promieniu, którego długość jest jedyną liczbą całkowitą dodatnią spełniającą nierówność: $x^3 - 4x < 0$.

Rozwiązanie:

Wyznaczymy najpierw współrzędne punktu P'.

Sposób I

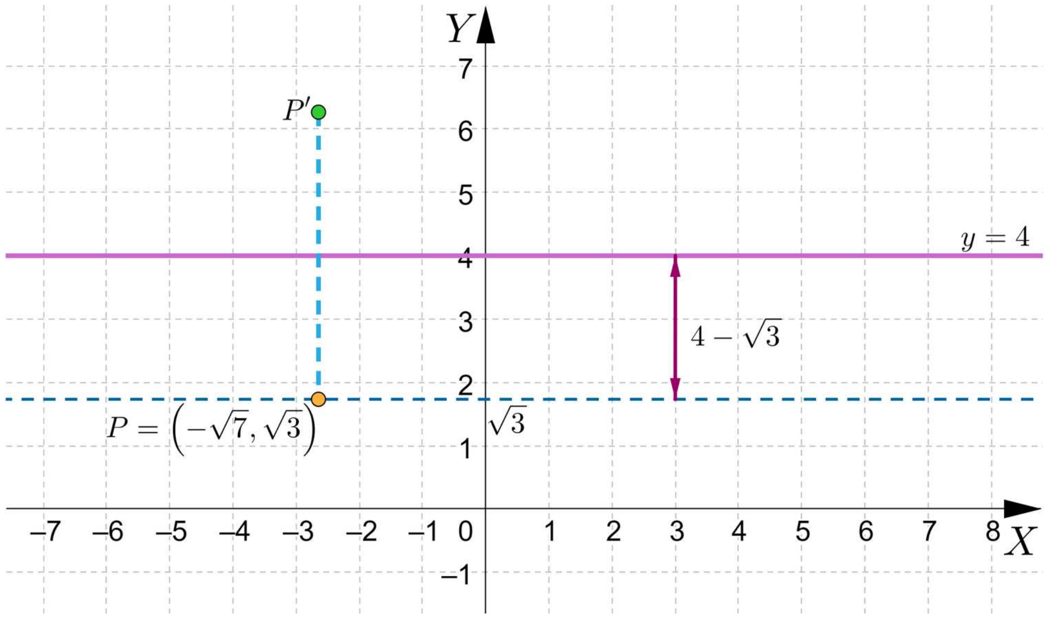
Wykorzystamy wzory $S_k : \begin{cases} x\text{'} = x \\ y\text{'} = 2h - y \end{cases}.$

Mamy zatem:

$P' = (x, 2h - y) = \left(-\sqrt{7}, 4 + 4 - \sqrt{3}\right) = \left(-\sqrt{7}, 8 - \sqrt{3}\right).$

Sposób II

Wykonamy rysunek pomocniczy.



$P' = (x_1, y_1),$

$x_1 = -\sqrt{7},$

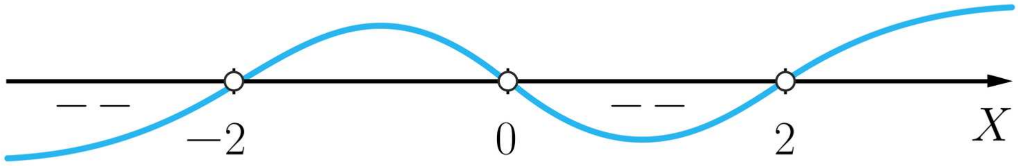
$y_1 = 4 + \left(4 - \sqrt{3}\right) = 8 - \sqrt{3},$

$P' = \left(-\sqrt{7}, 8 - \sqrt{3}\right).$

Rozwiążemy teraz nierówność $x^3 - 4x < 0$ i wyznaczymy długości promieni okręgów.

Zauważmy, że $x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x(x-2)(x+2).$

Nierówność przyjmuje więc postać: $x(x-2)(x+2) < 0.$



$x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$

Jedyną liczbą całkowitą dodatnią spełniającą nierówność jest 1, zatem $r = 1$.

Równanie okręgu o środku P i promieniu r ma więc postać:
$\left(x + \sqrt{7}\right)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 1$, zaś równanie okręgu o środku P' i promieniu r ma postać
$\left(x + \sqrt{7}\right)^2 + \left(y - 8 + \sqrt{3}\right)^2 = 1$.

Słownik

punkty symetryczne względem prostej

punkty, które leżą na prostej prostopadłej do tej prostej, po przeciwnych jej stronach i w równych od niej odległościach

punkty symetryczne względem osi X

punkty, których odcięte są równe, zaś rzędne są liczbami przeciwnymi

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, a następnie wykonaj polecenia pod nią.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D18ZA7nqU

Polecenie 2

Określ wzajemne położenie okręgu o i jego obrazu w symetrii względem osi X, jeśli:

a) $o: \ x^2 + (y-4)^2 = 20$

b) $o: \ (x-4)^2 + y^2 = 6$

c) $o: \ (x-3)^2 + (y-6)^2 = 32$

d) $o: \ (x+3)^2 + \left(y - 2\sqrt{3}\right)^2 = 12$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Uzupełnij tabelę tak, by punkt A' był obrazem punktu A względem danej prostej.

$A = (8, -3)$, $A = (8, -3)$, $A' = (8, -3)$, $A' = (8, 0)$, $y = -4$, $y = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $A = (8, 5)$, $A' = (8, 3)$

Punkt	Obraz punktu	Prosta
	$A' = (8, -3)$	$y = -4$
$A = (8, -3)$		$y = 1$
$A = (8, -3)$		$y = 0$
	$A' = (8, 0)$	$y = 1$

Ćwiczenie 2

Połącz w pary punkty symetryczne względem prostej $y = 3\sqrt{2}$.

$\left(0, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$	$\left(0, \frac{9}{2}\sqrt{2}\right)$
$\left(0, -\sqrt{2} - 1\right)$	$\left(0, 6\sqrt{2}\right)$
$(0, 0)$	$\left(0, 6\sqrt{2} + 1\right)$
$(0, 1)$	$\left(0, 6\sqrt{2} - 1\right)$
$(0, -1)$	$\left(0, 7\sqrt{2} + 1\right)$

Ćwiczenie 3

Uzupełnij tabelę by punkty A i A' były symetryczne względem danej prostej

$(3,5)$, $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $(3,-21)$, $\left(\sqrt{2},-3\sqrt{2}\right)$, $y=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}+1\right)$, $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}-1\right)$, $\left(\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$, $y=0$, $y=8$, $y=13$

Punkt A	Punkt A'	Prosta
$(3,5)$	$(3,-21)$	
$\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$		$y=\sqrt{2}$
	$\left(\sqrt{2},-3\sqrt{2}\right)$	$y=-\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

Dwa okręgi c i c' są symetryczne względem pewnej prostej równoległej do osi x. Na okręgu c leży punkt $B=(3,5)$. Jego obrazem na okręgu c' jest punkt B' $=(3,-4)$. Równaniem osi symetrii tych okręgów jest równanie:

- $y=2$
- $y=1$
- $y=\frac{1}{2}$
- $y=\frac{3}{2}$

Ćwiczenie 5

Zaznacz poprawną odpowiedź. Punktem symetrycznym względem osi X do punktu $(-267, 125)$ jest punkt:

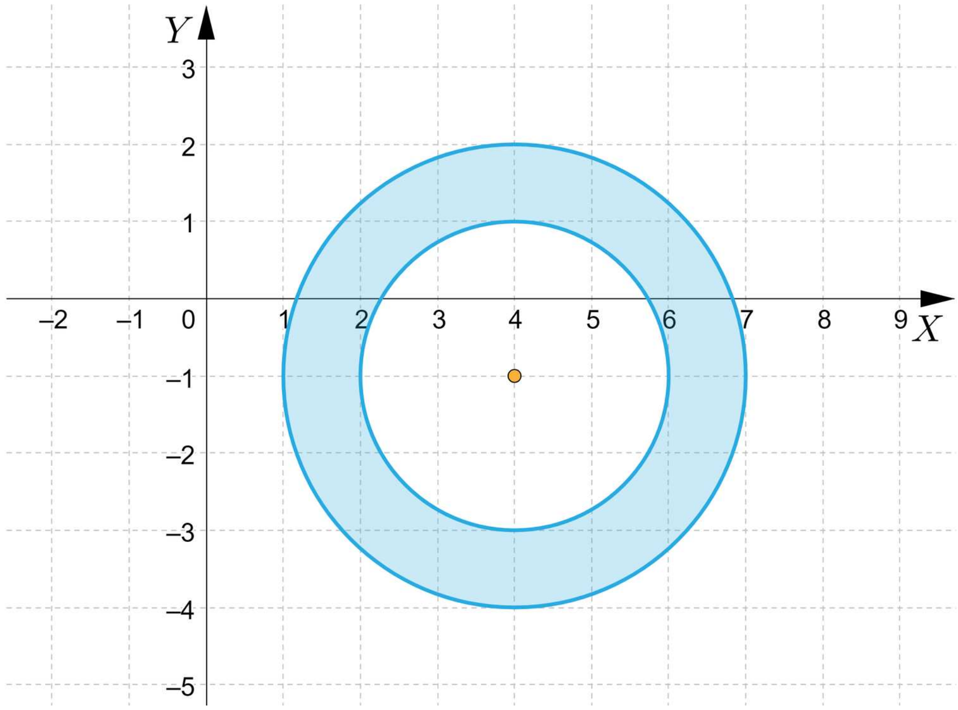
- $(267, 125)$
- $(267, -125)$
- $(-276, -125)$
- $(125, -267)$

Ćwiczenie 6

Wyznacz obraz okręgu o środku $(2, -3)$ i promieniu $1,5$ względem prostej o równaniu $y = 3$.

Ćwiczenie 7

Figura narysowana poniżej składa się z punktów o współrzędnych spełniających warunek zapisany pod rysunkiem.



$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y+1)^2 \geq 4 \\ (x-4)^2 + (y+1)^2 \leq 9 \end{cases}$$

a) Jaki warunek spełniają punkty obrazu tej figury (pierścień kołowy) w symetrii osiowej względem osi Y?

b) Jaki warunek spełniają punkty obrazu tej figury (pierścień kołowy) w symetrii osiowej względem prostej równoległej do osi X o równaniu $y = 3$?

Ćwiczenie 8

Rozważmy trójkąt, którego wierzchołkami są punkty $(-1, \ -1)$, $(3, \ -1)$ oraz $\left(1, 2\sqrt{3} - 1\right)$. Znajdź pole figury, która jest częścią wspólną tego trójkąta i jego obrazu w symetrii względem prostej $y = \sqrt{3} - 1$

Dla nauczyciela

Autor: Janusz Karkut

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obraz okręgu w symetrii względem osi X

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;

7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Zakres rozszerzony. Uczeń:

1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza równania okręgów symetrycznych do danych względem osi X;
- wyznacza równania okręgu symetrycznego do danego względem prostej równoległej do osi X;
- stosuje poznane zależności do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;

- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- pokaz multimedialny;
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora;
- materiały zawarte w e–podręczniku.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają zależności między współrzędnymi punktów symetrycznych względem osi X.
2. Uczniowie przypominają wiadomości dotyczące figur symetrycznych względem prostej.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3–osobowe grupy.
2. Każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji „Przeczytaj”.
3. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.
4. Uczniowie analizują prezentację multimedialną i omawiają ją wraz z nauczycielem.
5. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.
6. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych.
2. Uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień.

3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

- Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

Symetria osiowa

Wskazówki metodyczne:

Analiza problemów zawarta w prezentacji multimedialnej może pomóc uczniom do przygotowania się do pracy samodzielnej podczas lekcji.