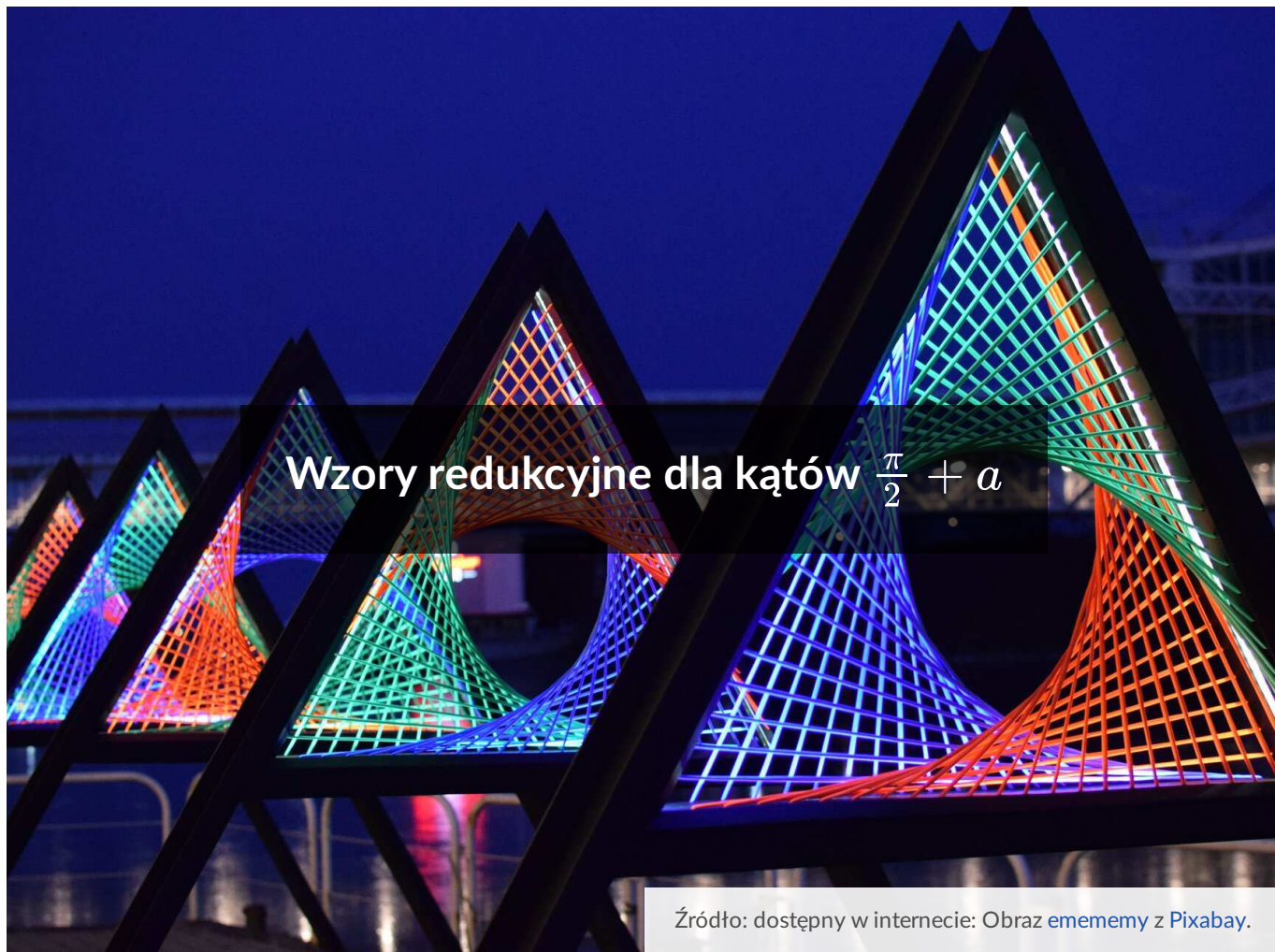




## Wzory redukcyjne dla kątów $\frac{\pi}{2} + a$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Wzory redukcyjne dla kątów $\frac{\pi}{2} + a$

Źródło: dostępny w internecie: Obraz [emememy](#) z [Pixabay](#).

Udowodnić wzory redukcyjne dla kątów  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  jest stosunkowo łatwo. Korzystamy wtedy z własności trójkąta prostokątnego. W tej lekcji zastanowimy się, jak udowodnić wzory redukcyjne dla kątów  $\frac{\pi}{2} + \alpha$ . Tym razem musimy skorzystać z bardziej zaawansowanych narzędzi. Przeanalizuj dokładnie dowody przedstawione w tej lekcji.

### Twoje cele

- Poznasz wzory redukcyjne dla kątów  $\frac{\pi}{2} + a$ .
- Wykorzystasz definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens oraz zależności między funkcjami trygonometrycznymi do wyprowadzenia wzorów redukcyjnych dla kątów  $\frac{\pi}{2} + a$ .
- Wykorzystasz wzory redukcyjne oraz inne własności funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania zadań.

# Przeczytaj

---

## Definicje funkcji trygonometrycznych

Już wiesz, że między funkcjami trygonometrycznymi różnych kątów zachodzą pewne związki. Poznałeś wzory dla kątów  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . Posłużymy się nimi w tym materiale.

Niech  $P = (x, y)$  będzie dowolnym punktem leżącym na końcowym ramieniu kąta skierowanego  $\beta$ . Analizując poniższe slajdy przypomnimy definicje funkcji trygonometrycznych.

Zajmijmy się teraz udowodnieniem poniższego twierdzenia.

### Twierdzenie: o wzorach redukcyjnych dla kątów

Dla dowolnego kąta  $\alpha$  zachodzą równości:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \text{ o ile } \operatorname{tg} \alpha \neq 0.$$

Przeanalizujmy dwa dowody omawianego twierdzenia. Oba wykorzystują wzory dla kątów  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ :

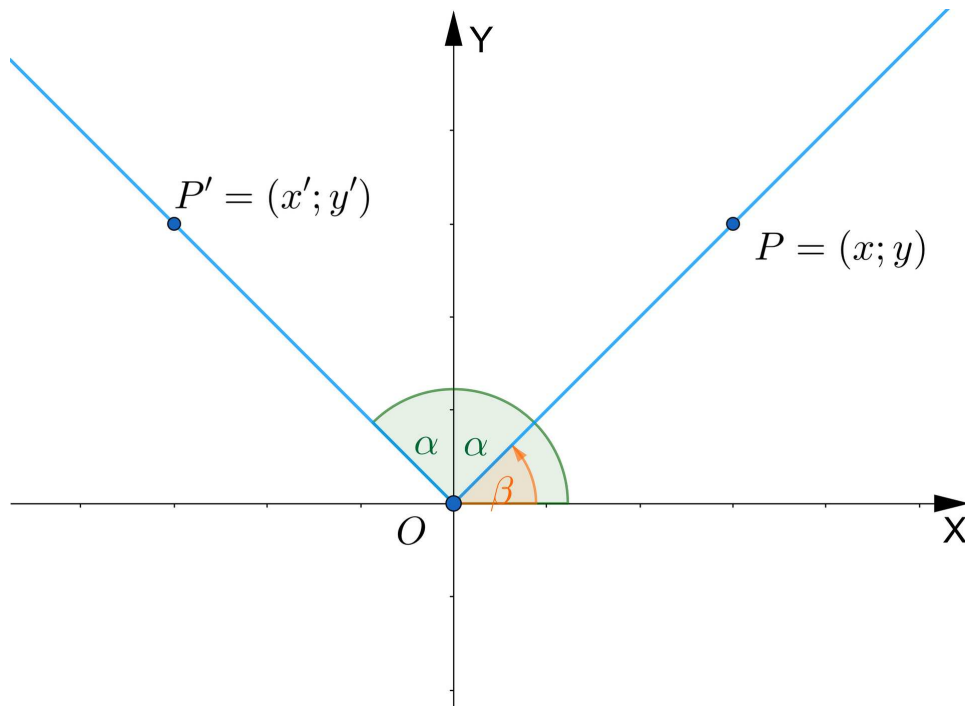
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \text{ o ile } \operatorname{tg} \alpha \neq 0.$$

### Dowód I

W pierwszym dowodzie, oprócz wzorów dla kątów  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ , wykorzystamy definicje funkcji trygonometrycznych. Rozważmy kąty  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  i  $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$  i umieśćmy je w układzie współrzędnych. Dla przejrzystości zapisu oznaczmy kąt  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  jako  $\beta$ . Wówczas  $\frac{\pi}{2} = \alpha + \beta$  stąd  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Punkt  $P(x(\frac{\pi}{2} - \alpha), y(\frac{\pi}{2} - \alpha))$  jest dowolnym punktem leżącym na końcowym ramieniu kąta skierowanego  $\beta$  natomiast punkt  $P(x', y')$  leży na końcowym ramieniu kąta skierowanego  $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ .



Zauważmy, że:

1.  $(\beta + \alpha) + \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha$
2. punkty  $P(x, y)$  i  $P(x', y')$  są symetryczne względem osi  $Y$ . Zatem  $x' = -x$  a  $y = y'$ .

$$(\beta + \alpha) + \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

Otrzymujemy zatem następujące równości:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{y'}{r} = \frac{y}{r} = \sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{x'}{r} = \frac{-x}{r} = -\cos \beta = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{y}{x} = \frac{y}{-x} = \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Udowodniliśmy tym samym twierdzenie o wzorach redukcyjnych dla kątów.

Zauważmy, że wzoru  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$  nie musimy wyprowadzać z definicji. Możemy zastosować poznany wcześniej związek między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Podstawiając otrzymamy:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Przejdźmy do alternatywnego dowodu.

## Dowód II

Tym razem skorzystamy z parzystości i nieparzystości odpowiednich funkcji trygonometrycznych. Udowodnimy je na końcu tego materiału, w tym miejscu przypomnijmy jedynie, że zachodzą równości:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}(-\alpha)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Prześledzimy teraz przykłady.

### Przykład 1

Wyznamy wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta  $\frac{5\pi}{6}$ .

Wykorzystamy wyprowadzone powyżej wzory.

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{3\pi+2\pi}{6} = \sin\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

### Przykład 2

Doprowadzimy do najprostszej postaci wyrażenie:  $\sin \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos^2 \alpha$ .

Wykorzystamy następujące wzory:

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  przekształconym do postaci  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

**Rozwiązanie:**

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos^2 \alpha &= \sin \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \sin \alpha \sin^2 \alpha = \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

### Przykład 3

Uprościmy ułamek  $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$ .

W rozwiązaniu wykorzystamy, kolejno, [wzory redukcyjne](#):

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ ,

jedynkę trygonometryczną oraz wzór skróconego mnożenia:

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

Możemy zapisać ciąg równości:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{1 + \sin \alpha} = 1 - \sin \alpha.$$

Zatem wyrażenie  $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$  można zapisać jako  $1 - \sin \alpha$ .

#### Przykład 4

Udowodnimy, że dla dowolnego kąta  $\alpha$  prawdziwa jest równość:

$$\left(2 \sin \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 + \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 2 \cos \alpha\right)^2 = 5.$$

Będziemy przekształcać lewą stronę równości tak długo, aż dojdziemy do prawej.

$L$  - lewa strona równości

$P$  - prawa strona równości

$$L = \left(2 \sin \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 + \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 2 \cos \alpha\right)^2$$

$$P = 5$$

Będziemy teraz przekształcać lewą stronę wyrażenia korzystając ze wzorów  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ . Mamy więc, że

$$\begin{aligned} L &= \left(2 \sin \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 + \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 2 \cos \alpha\right)^2 = \\ &= (2 \sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (-(-\sin \alpha) - 2 \cos \alpha)^2 = \\ &= (2 \sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - 2 \cos \alpha)^2 \end{aligned}$$

Zastosujmy teraz wzory skróconego mnożenia:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ,

$$(2 \sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 4 \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$$

- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ,

$$(\sin \alpha - 2 \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned}
 & (2 \sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - 2 \cos \alpha)^2 = \\
 & = 4 \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha = \\
 & = 5 \sin^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha = 5(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 5.
 \end{aligned}$$

Wykazaliśmy, że  $L = P$  więc równość jest prawdziwa.

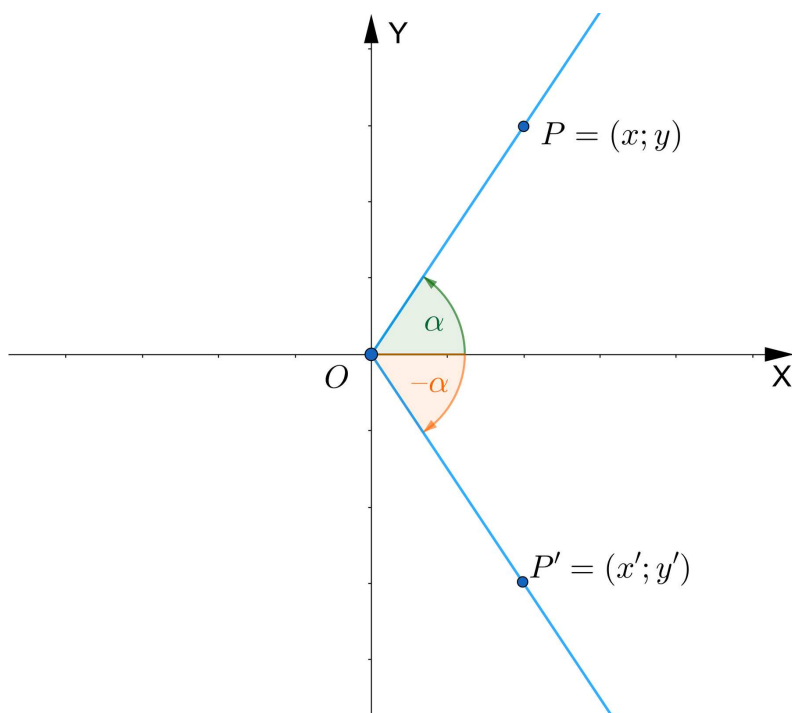
Na zakończenie wróćmy do dowodu nieparzystości funkcji sinus i tangens oraz parzystości funkcji cosinus. Chcemy pokazać, że dla dowolnego kąta  $\alpha$  zachodzą równości:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Narysujmy w układzie współrzędnych kąty skierowane  $\alpha$  i  $-\alpha$  oraz zaznaczmy punkty  $P(x, y)$  i  $P'(x', y')$  na ich ramionach końcowych.



Zauważmy, że punkty  $P(x, y)$  i  $P(x', y')$  są symetryczne względem osi  $X$ . Zatem  $x' = x$  a  $y' = -y$

$$\sin(-\alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -\operatorname{tg} \alpha$$

Udowodniliśmy zastosowane wzory.

**Ważne!**

Oprócz poznanych przez Ciebie funkcji trygonometrycznych są również dwie funkcje teraz już rzadko używane: secans i cosecans. Choć islamscy matematycy używali je już w X wieku, to w Europie funkcję secans wprowadził dopiero Mikołaj Kopernik w dziele „*O obrotach sfer niebieskich*”.

## Słownik

### wzory redukcyjne

wzory pozwalające wyrazić wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta  $\alpha$  za pomocą wartości funkcji kąta ostrego

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją i rozwiąż zadania.

Trwa wczytywanie danych..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1F2zuJ70>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wzorów redukcyjnych dla kątów pi drugich plus a.

---

## Polecenie 2

Wykorzystując wzory redukcyjne dla kątów  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos^2 \frac{5\pi}{6}}{\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} : \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}}$$

## Polecenie 3

Doprowadź do prostszej postaci:

$$\frac{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Wiadomo, że  $\sin \alpha = 0,25$  oraz  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Oceń, czy poniższe równości są prawdziwe. Zaznacz równość prawdziwą.

☐  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{4}$

☐  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{4}$

☐  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 0,25$

☐  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 0,25$

## Ćwiczenie 2



Wiemy, że  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$  oraz  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Oceń, czy poniższe równości są prawdziwe. Zaznacz wszystkie równości prawdziwe.

☐  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{12}{13}$

☐  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{5}{12}$

☐  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{5}{13}$

☐  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{12}{5}$

### Ćwiczenie 3



Uzupełnij lukę w zdaniu odpowiednią liczbą.

O kącie ostrym  $\alpha$  wiadomo, że  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Wynika stąd, że  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$

- ☐  $\frac{1}{2}$
- ☐  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ☐  $-\frac{1}{2}$

### Ćwiczenie 4



Ile wynosi wartość  $\sin \frac{3\pi}{4}$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

☐  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

☐  $\frac{1}{2}$

☐  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

### Ćwiczenie 5



Dokończ zdanie, wybierając poprawne odpowiedzi.

Dla kąta  $\beta = \frac{5\pi}{6}$  prawdą jest, że:

☐  $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{3}$

☐  $\operatorname{tg} \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

☐  $\sin \beta = \frac{1}{2}$

☐  $\cos \beta = -\frac{1}{2}$

## Ćwiczenie 6



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Wartość funkcji  $\cos \frac{8\pi}{3}$  wynosi:

☐  $-0,5$

☐  $\frac{1}{2}$

☐  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

☐  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

## Ćwiczenie 7



Uzupełnij tekst, wpisując odpowiednią liczbę w puste pole.

Wartość wyrażenia  $\operatorname{tg} \frac{19\pi}{4}$  wynosi .

## Ćwiczenie 8



Wiemy, że  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{8}{17}$  oraz  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Wartość wyrażenia  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos \alpha$  wynosi  $-\frac{135}{136}$ .

☐ Wartość wyrażenia  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin \alpha$  wynosi 0.

☐ Wartość wyrażenia  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos \alpha$  wynosi  $\frac{135}{136}$ .

☐ Wartość wyrażenia  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin \alpha$  wynosi  $-\frac{16}{17}$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Katarzyna Podfigurna

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Wzory redukcyjne dla kątów  $\frac{\pi}{2} + a$

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1. stosuje wzory skróconego mnożenia na:  $(a + b)^2$ ,  $(a - b)^2$ ,  $a^2 - b^2$ ,  $(a + b)^3$ ,  $(a - b)^3$ ,  $a^3 - b^3$ ,  $a^n - b^n$

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1. wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ;
2. korzysta z wzorów  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;
2. stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- poznaje różne sposoby dowodzenia wzorów redukcyjnych dla kątów  $\frac{\pi}{2} + a$ ,
- stosuje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta,
- wykorzystuje poznane definicje i wzory do dowodzenia wzorów redukcyjnych,
- analizuje przeprowadzone dowody twierdzeń,
- analizuje metody dowodzenia twierdzeń oraz wybiera najefektywniejszą metodę.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm
- konektywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- metoda tekstu przewodniego
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

**Formy pracy:**

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki

**Przebieg lekcji**

**Faza wstępna:**

- uczniowie przypominają definicje funkcji trygonometrycznych (zapisują je na tablicy)
- uczniowie podają związki między funkcjami trygonometrycznymi (zapisują je na tablicy)
- uczniowie podają wzory skróconego mnożenia (zapisują je na tablicy)
- nauczyciel podaje temat i cele zajęć

**Faza realizacyjna:**

- nauczyciel dzieli uczniów na 3-osobowe grupy
- każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji Przeczytaj metodą tekstu przewodniego

- uczniowie w grupach analizują dowody wzorów redukcyjnych dla kątów  $\frac{\pi}{2} + a$  oraz przykłady zawarte w sekcji Przeczytaj
- nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek
- po dyskusji zapisują udowodnione wzory i wnioski końcowe na tablicy
- uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem
- uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela

#### **Faza podsumowująca:**

- wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela; uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień
- nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów

#### **Praca domowa:**

- zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji

#### **Materiały pomocnicze:**

- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

Materiały zawarte w animacji uczniowie mogą wykorzystać w przygotowaniu się do lekcji. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.