



Kąty w figurach, przekątne

Twierdzenie i prezentacja multimedialna: suma miar kątów trójkąta. Suma miar kątów w n-kącie wypukłym. Twierdzenie i prezentacja multimedialna: o przekątnych wielokąta. Prezentacja multimedialna: kąty przyległe. Suma miar sąsiednich kątów wewnętrznych w równoległoboku. Suma miar kątów przy jednym ramieniu trapezu. Prezentacja multimedialna: pole równoległoboku, pole trójkąta, pole trapezu

Prezentacja wzorów na pole powierzchni równoległoboku, trójkąta, trapezu i czworokąta mającego prostopadłe przekątne. Prezentacja interaktywna: pole równoległoboku. Ilustracja interaktywna: pole powierzchni trójkąta. Prezentacja interaktywna: pole powierzchni trapezu.

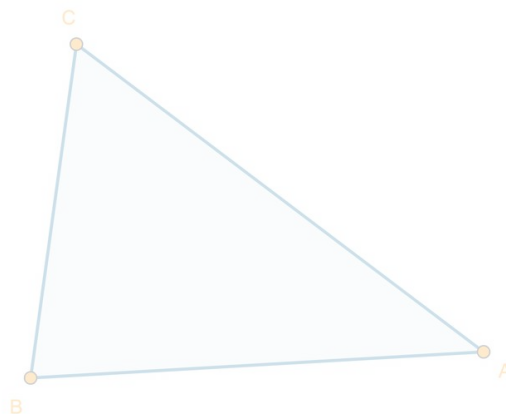
Kąty w figurach, przekątne

W tym materiale zawarte są wiadomości dotyczące kątów, przekątnych i pól wielokątów. Poznasz:

- twierdzenie o liczbie przekątnych wielokąta i jego zastosowanie,
- twierdzenia dotyczące sumy miar kątów w różnych wielokątach.

Polecenie 1

Uruchom aplet i zapoznaj się z dowodem dotyczącym sumy miar kątów w trójkącie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P17eDnFE2>

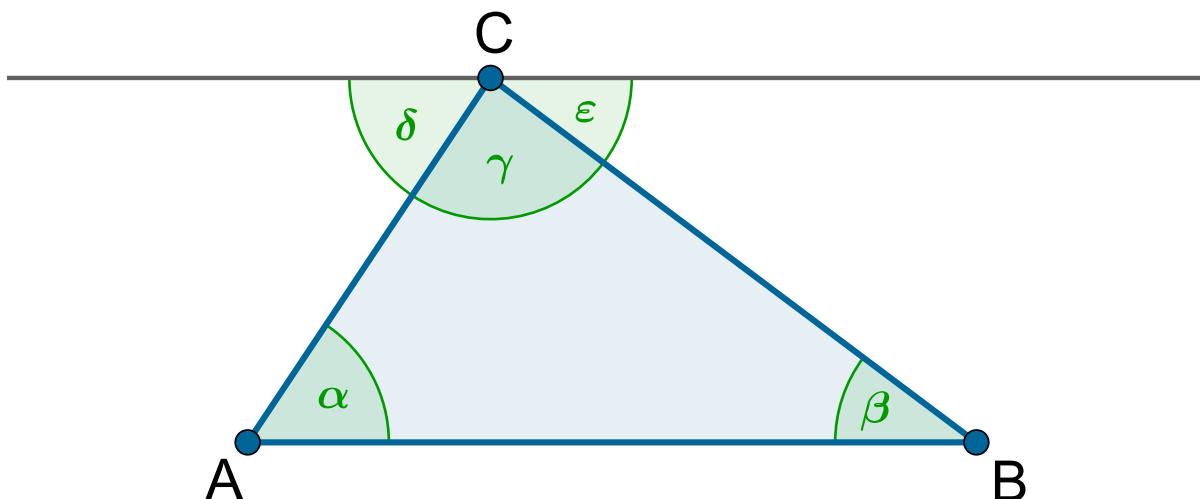
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: Suma miar kątów trójkąta

Suma miar kątów trójkąta jest równa 180° .

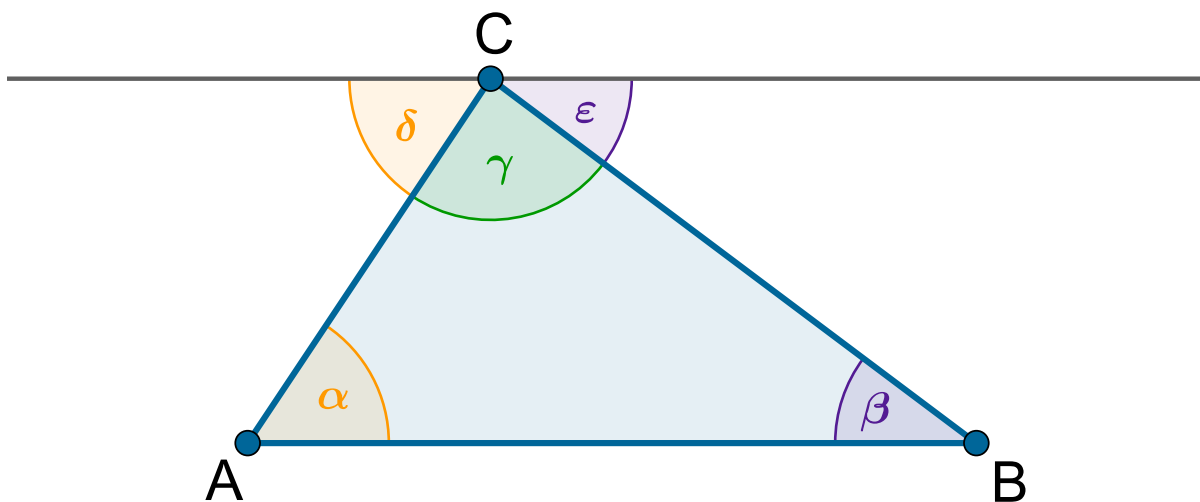
Dowód

Rozważmy dowolny trójkąt ABC . Rysujemy prostą równoległą do boku AB , która przechodzi przez wierzchołek C .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąty δ i α są równe jako kąty naprzemianległe wewnętrznie. Podobnie $\epsilon = \beta$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

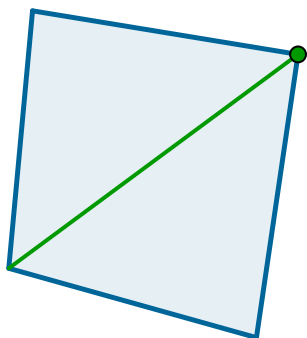
Suma miar kątów α, β, γ jest równa 180° .

Wiemy już, że suma miar kątów w trójkącie jest równa 180° . Zastanówmy się teraz, czy można znaleźć wzór na określenie sumy miar kątów dowolnego wielokąta wypukłego.

W tym celu narysujmy kilka wielokątów i podzielmy każdy z nich na trójkąty.

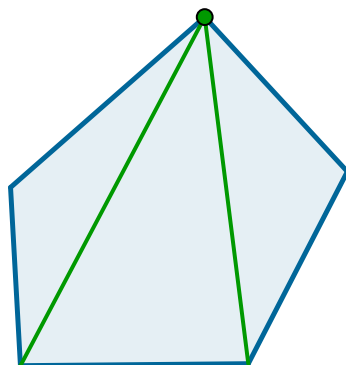
Poprowadzimy wszystkie przekątne z jednego wierzchołka każdego z wielokątów.

CZWOROKĄT



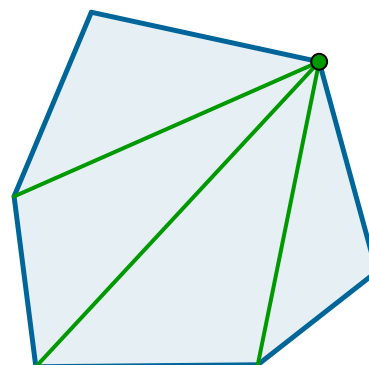
2 TRÓJKĄTY

PIĘCIOKĄT



3 TRÓJKĄTY

SZEŚCIOKĄT



4 TRÓJKĄTY

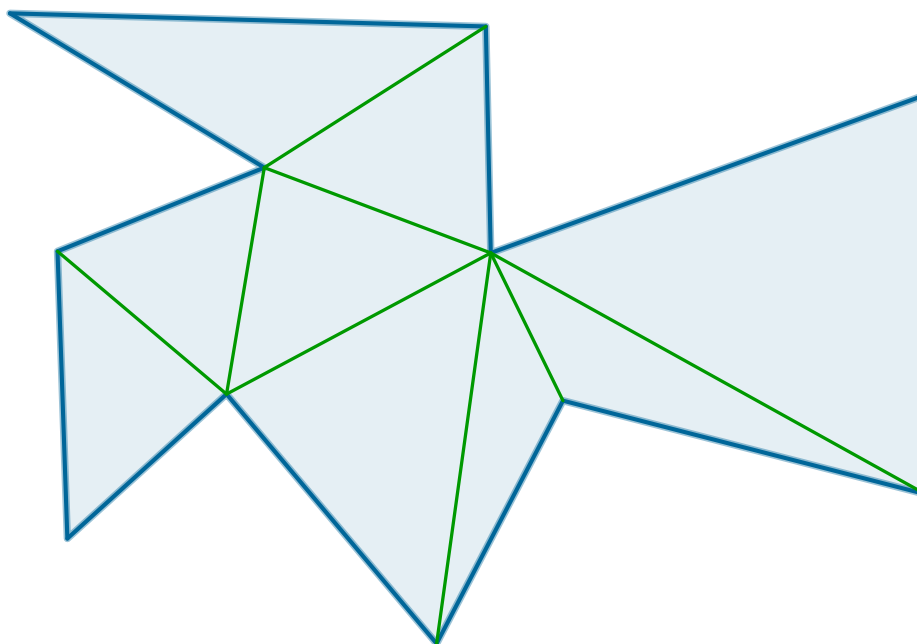
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że liczba utworzonych trójkątów jest o 2 mniejsza od liczby wierzchołków wielokąta.

Zatem n -kąt wypukły można podzielić na $(n - 2)$ trójkąty. Suma miar kątów n -kąta jest więc równa sumie miar kątów tych trójkątów. W każdym z tych trójkątów suma miar kątów jest równa 180° .

Ciekawostka

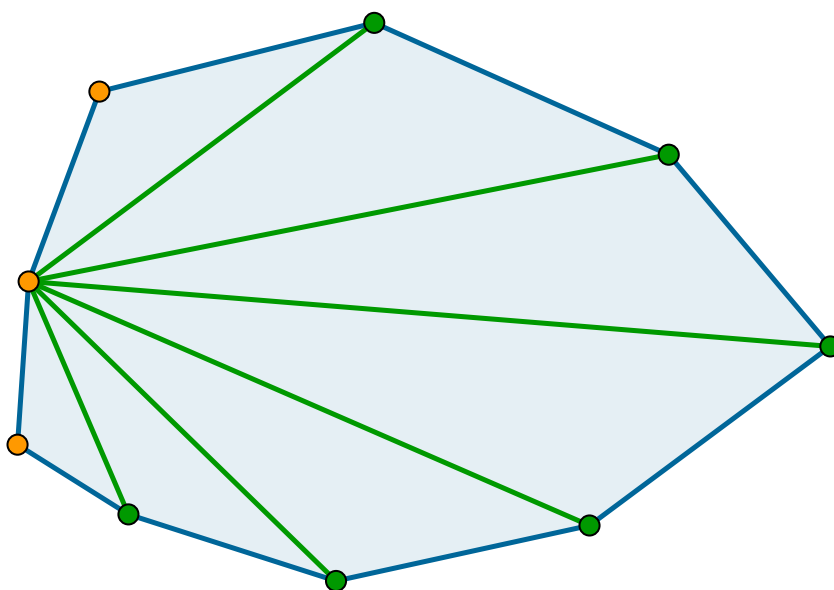
Twierdzenie dotyczące sumy miar kątów wielokąta pozostaje również prawdziwe w przypadku, gdy wielokąt nie jest wypukły (jest wklęsły). Aby udowodnić to twierdzenie, można postąpić podobnie jak poprzednio, dzieląc wielokąt na trójkąty. Trudniej jednak opisać ten podział, gdyż nie zawsze da się podzielić wielokąt na trójkąty, wykorzystując przekątne wychodzące z jednego wierzchołka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ten wielokąt został podzielony na 9 trójkątów, suma miar jego kątów jest równa 1620° .

Wyprowadzimy wzór na liczbę przekątnych dowolnego wielokąta wypukłego. Rozpatrzmy jeden z wierzchołków takiego wielokąta. Ile przekątnych możemy z niego poprowadzić?

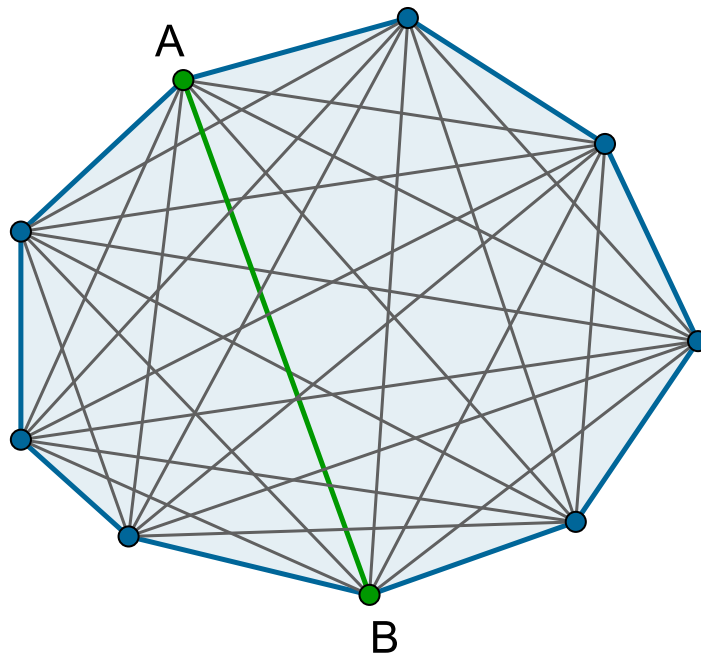


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ten wielokąt ma 9 wierzchołków. Z jednego wierzchołka można poprowadzić 6 przekątnych. Z wybranego wierzchołka nie można poprowadzić przekątnych do wierzchołków sąsiednich, ani do tego wybranego wierzchołka.

Niech n będzie liczbą naturalną większą od 3. Rozpatrzmy dowolny n -kąt wypukły. Ponieważ mamy n wierzchołków, a z każdego wierzchołka możemy poprowadzić $n - 3$ przekątne, więc ze wszystkich wierzchołków możemy poprowadzić $n(n - 3)$ przekątne. Jednak w ten sposób każdą z przekątnych policzyliśmy dwukrotnie. Zatem liczba wszystkich przekątnych n -kąta wypukłego jest równa

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekątna AB wychodzi zarówno z wierzchołka A , jak i z wierzchołka B .

Twierdzenie: O przekątnych wielokąta

Dowolny n - kąt wypukły ma $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ przekątnych, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 3.

Polecenie 2

Zapoznaj się z apletem i odpowiedz na wszystkie pytania dotyczące wielokątów wypukłych.

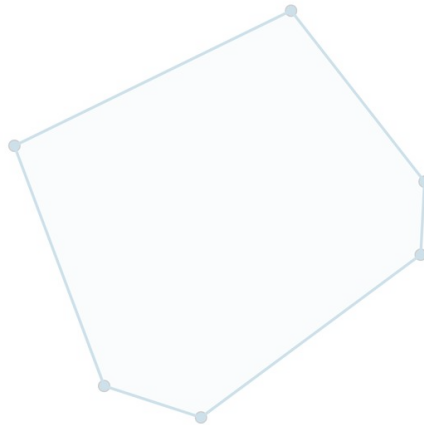
Wielokąt wypukły - własności
pytanie 1 z 5



Ile wierzchołków ma wielokąt na rysunku obok?

liczba wierzchołków =

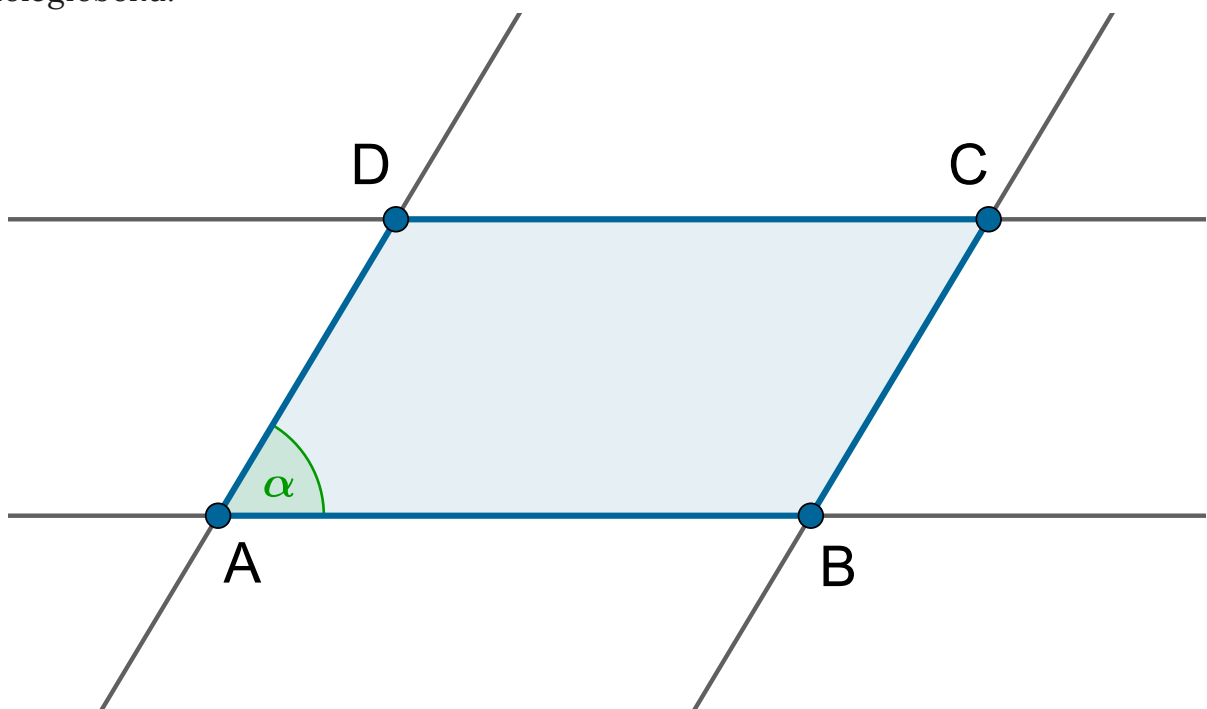




Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P17eDnFE2>

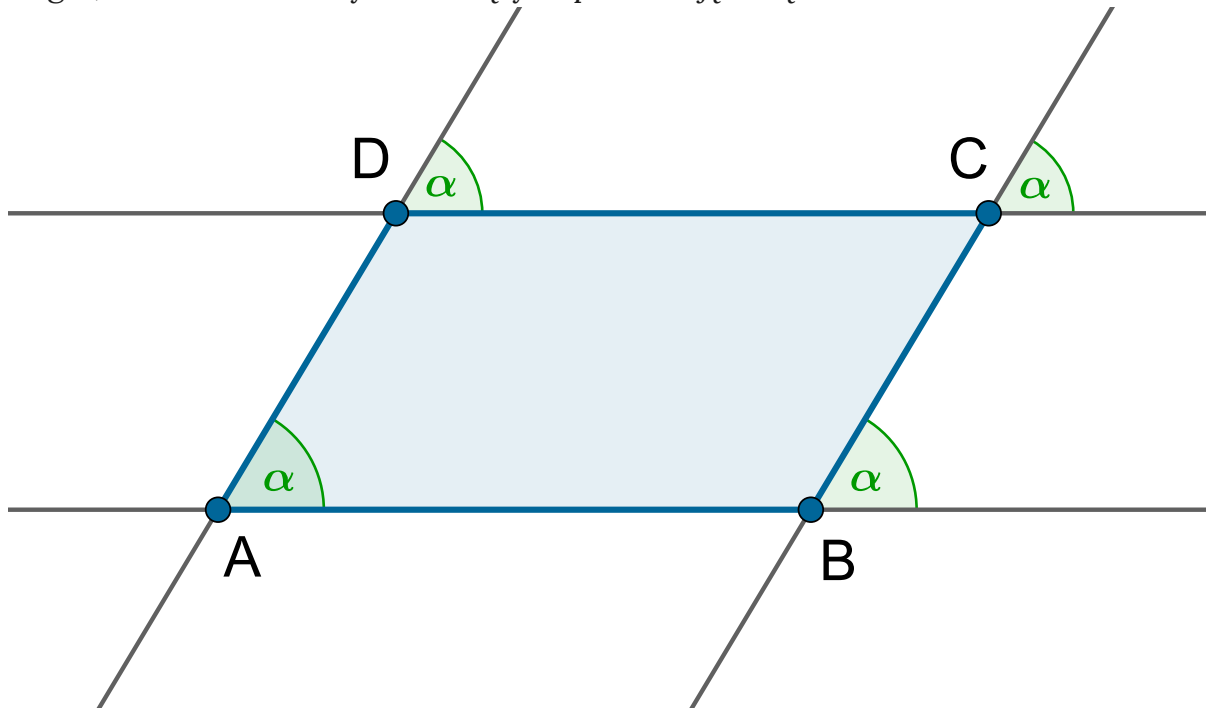
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przypomnimy teraz podstawowe własności związane z kątami w czworokątach. Rozważmy dowolny równoległobok i narysujmy proste, na których leżą boki tego równoległoboku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

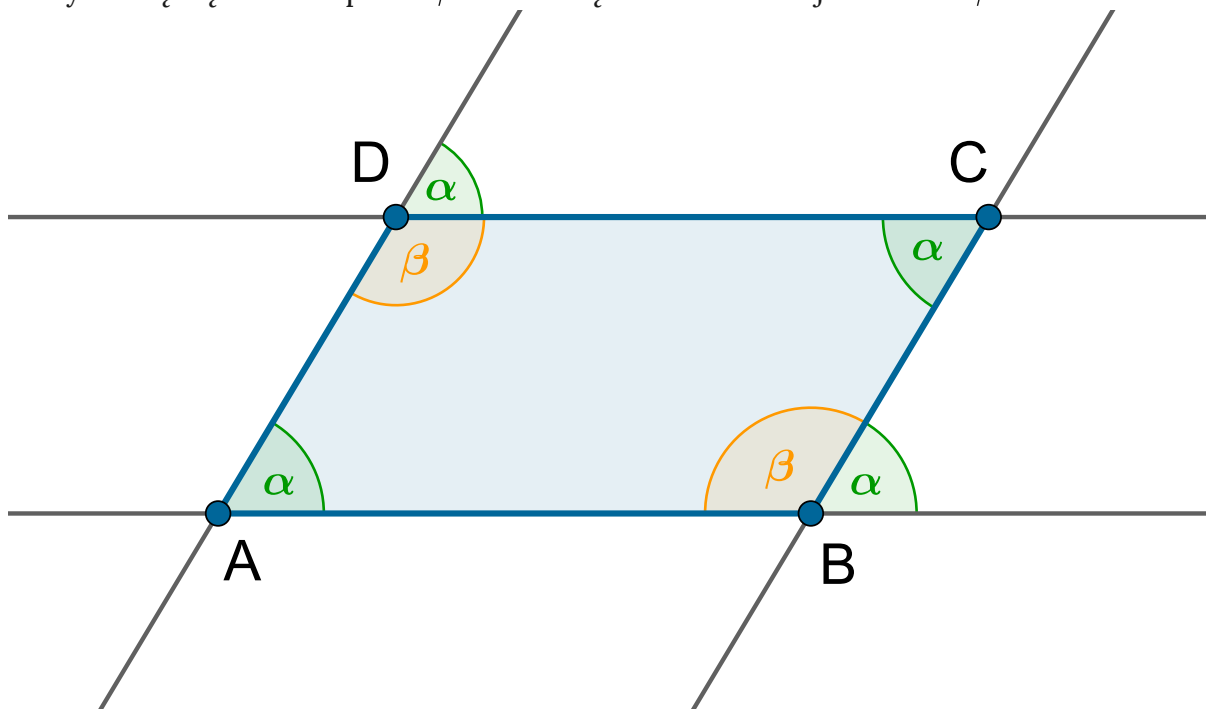
Zaznaczmy kąty odpowiadające kątowi α . Ponieważ boki równoległoboku są parami równoległe, zaznaczone na rysunku kąty odpowiadające są równe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąty BCD i α są wierzchołkowe, więc $|\sphericalangle BCD| = \alpha$.

Oznaczmy miarę kąta ADC przez β . Miara kąta CBA także jest równa β .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

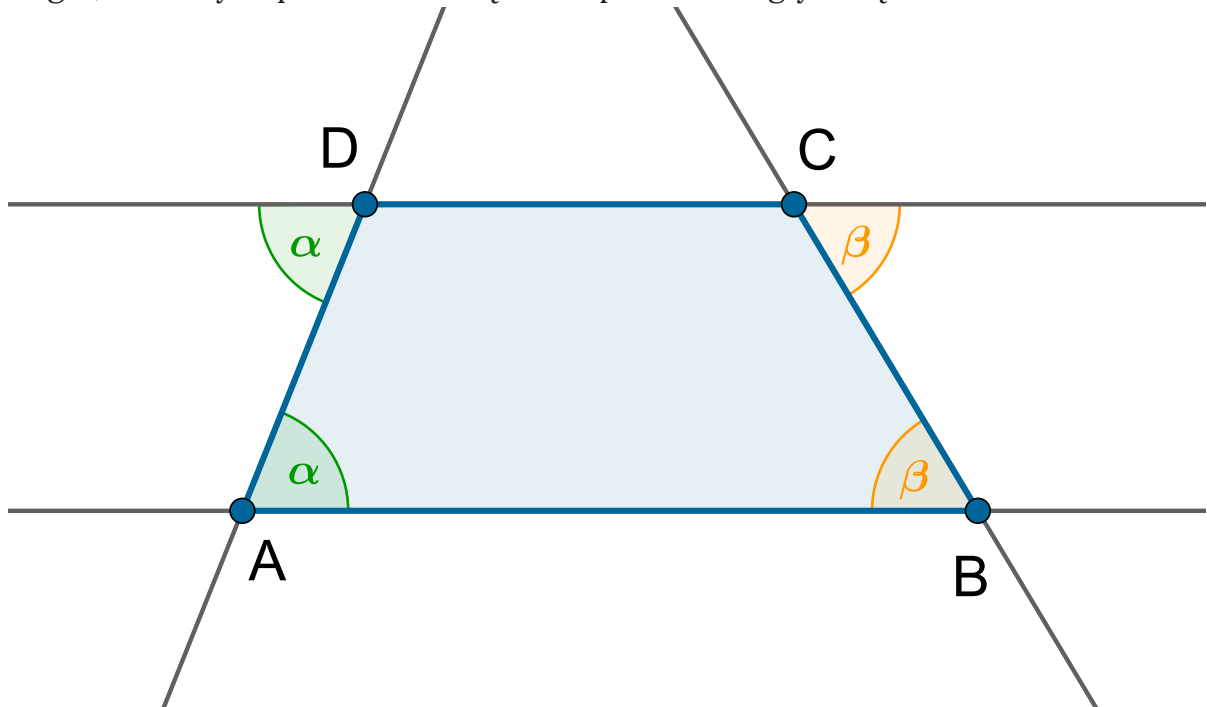
Kąty β i α są przyległe, zatem $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Twierdzenie: Suma miar sąsiednich kątów wewnętrznych w równoległoboku

W równoległoboku suma miar sąsiednich kątów wewnętrznych jest równa 180° .

Rozważmy trapez $ABCD$.

Niech α , β będą kątami ostrymi w tym trapezie. Poprowadźmy proste zawierające boki tego trapezu i zaznaczmy kąty naprzemianległe do kątów α i β . Ponieważ proste AB i CD są równoległe, to miary odpowiednich kątów naprzemianległych są równe.



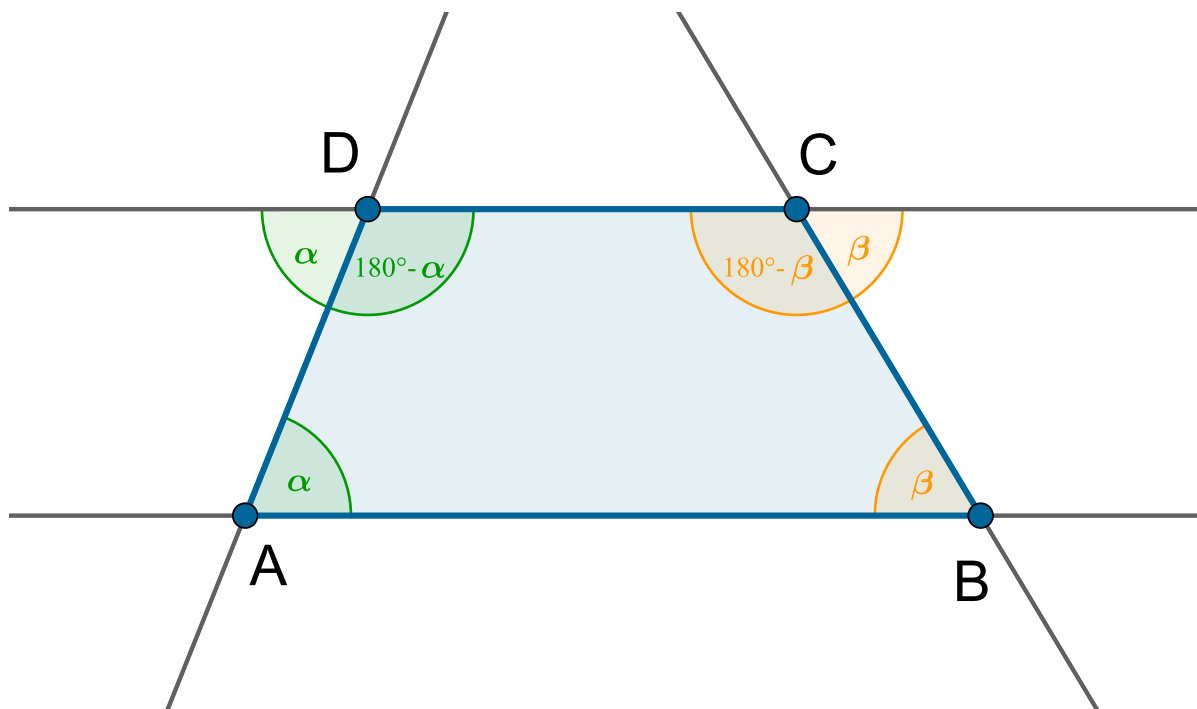
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąt CDA jest przyległy do kąta α , zatem

$$|\sphericalangle CDA| = 180^\circ - \alpha$$

Kąt BCD jest przyległy do kąta β , zatem

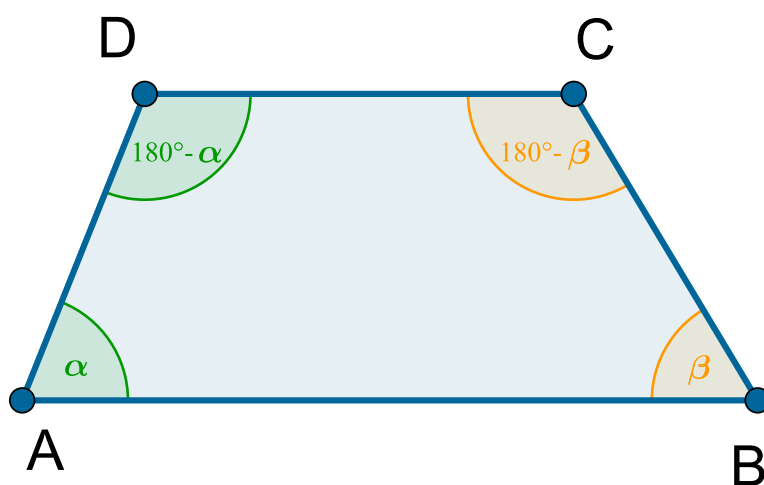
$$|\sphericalangle BCD| = 180^\circ - \beta$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

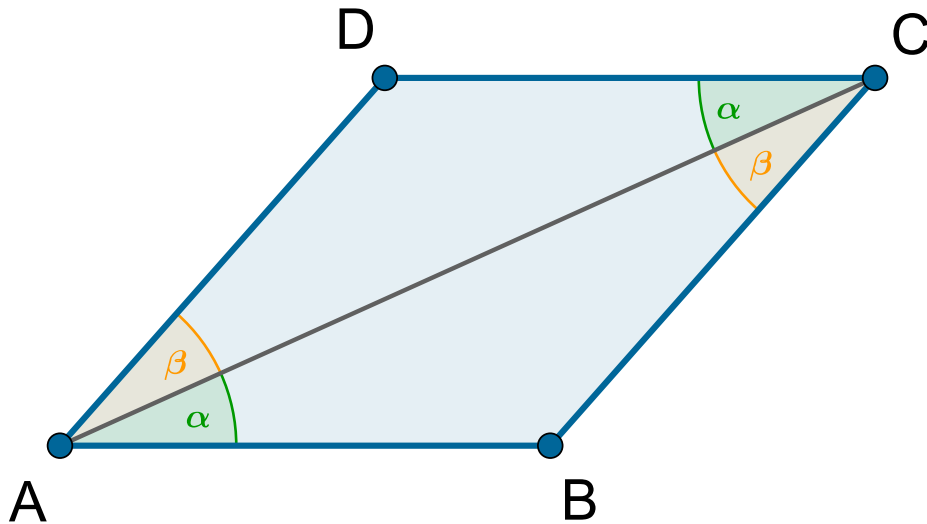
Twierdzenie: Suma miar kątów przy jednym ramieniu trapezu

W trapezie suma miar kątów przy jednym ramieniu jest równa 180° .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozpatrzmy romb $ABCD$. Wykreślmy przekątną rombu jak na rysunku i zaznaczmy powstałe kąty naprzemianległe. Ponieważ proste AB i CD są równoległe, to kąty naprzemianległe są równe.



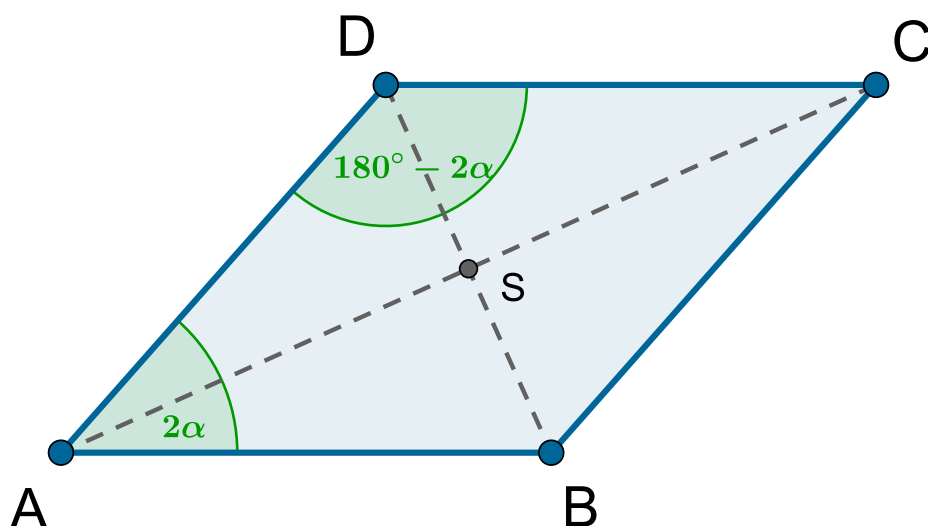
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W rombie wszystkie boki są równe, więc trójkąt ACD jest równoramienny, a jako równoramienny ma kąty przy podstawie AC równe, czyli $\alpha = \beta$. Przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DCB i DAB . Podobnie, przekątna DB zawiera się w dwusiecznej kąta ADC i ABC .

Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych rombu. Romb jest równoległobokiem, więc

$$|\sphericalangle ADS| = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2}$$

$$|\sphericalangle ADS| = 90^\circ - \alpha$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W trójkącie ADS kąt DAS ma miarę α , a kąt ADS ma miarę $90^\circ - \alpha$.
Zatem miara kąta ASD jest równa

$$180^\circ - (\alpha + 90^\circ - \alpha) = 90^\circ$$

Możemy więc sformułować twierdzenie

Twierdzenie: Kąt przecięcia przekątnych rombu

Przekątne rombu zawierają się w dwusiecznych jego kątów wewnętrznych i przecinają się pod kątem prostym.

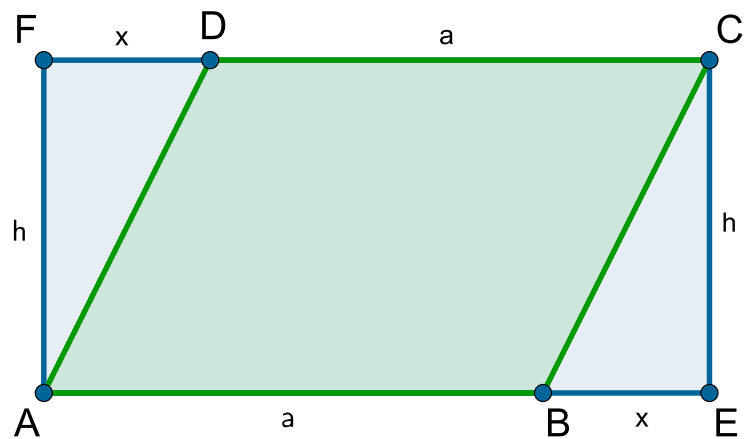
Pola wielokątów

Przypomnijmy znane wzory na pola czworokątów.

- Pole równoległoboku

$$P = a \cdot h,$$

gdzie a jest długością jednego z boków oraz h jest wysokością opuszczoną na ten bok.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Umieścimy równoległobok $ABCD$ w prostokącie $AECF$, jak pokazano na rysunku. Trójkąty ADF i CBE są przystające, czyli

$$|BE| = |DF|.$$

Oznaczmy $|BE| = x$.


Pole równoległoboku obliczamy odejmując od pola prostokąta sumę pól trójkątów ADF i CBE . Z tych trójkątów można utworzyć prostokąt o bokach h, x . Pole równoległoboku jest równe

$$P = (a + x)h - xh = ah.$$

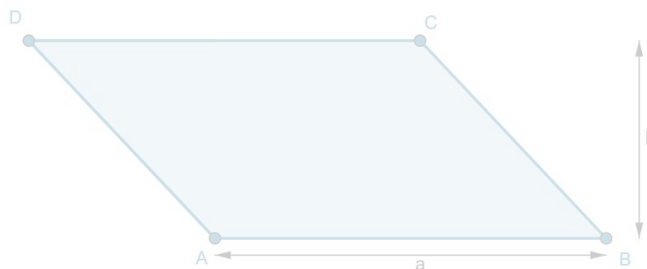
Polecenie 3

Zapoznaj się z apletem, który przedstawia wzór na pole równoległoboku.

Pole równoległoboku (1)
etap 1 z 3



Dany jest równoległobok ABCD
o podstawie długości a
i wysokości h .



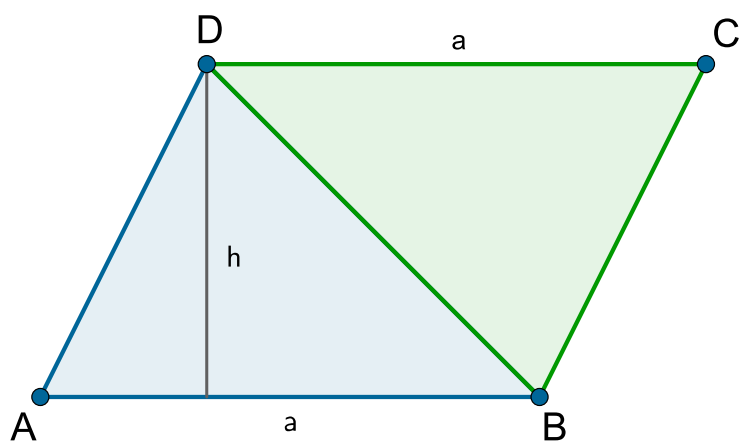
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P17eDnFE2>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h,$$

gdzie a jest jednym z boków trójkąta, a h jest wysokością opuszczoną na ten bok.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Podzielimy równoległobok $ABCD$ przekątną DB na dwa trójkąty. Zauważmy, że trójkąty ABD i BCD są przystające, ponieważ mają boki tej samej długości. Zatem pole trójkąta jest równe połowie pola równoległoboku.

$$P = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Polecenie 4

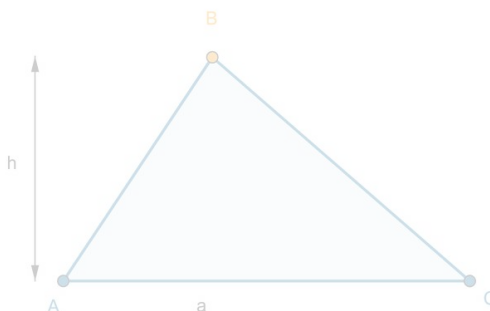
Zapoznaj się z apletem, który obrazuje wzór na pole trójkąta.

Dany jest trójkąt ABC
o podstawie a i wysokości h .

Przesuń suwak.



Czy potrafisz napisać wzór
na pole trójkąta?



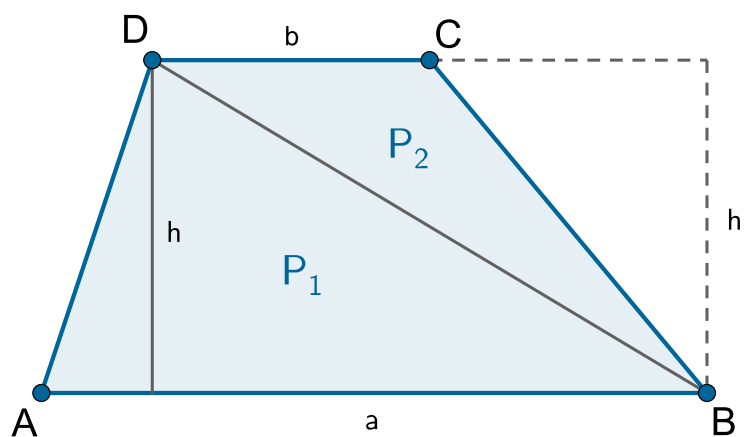
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P17eDnFE2>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Pole trapezu

$$P = \frac{a + b}{2} \cdot h,$$

gdzie a , b są długościami podstaw trapezu, a h jest jego wysokością.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Dzielimy trapez przekątną na dwa trójkąty. Jeden z nich ma podstawę a , drugi podstawę b oraz oba mają tę samą wysokość h .

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Polecenie 5

Zapoznaj się z apletem, który obrazuje wzór na pole trapezu.

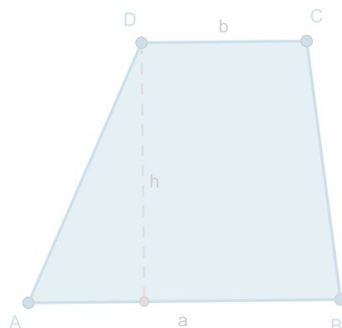
Pole trapezu
etap 1 z 4

Dany jest trapez o podstawach długości a i b i wysokości h .

Aby wyznaczyć pole trapezu, obróć go za pomocą suwaka α o 180° wokół środka boku BC .

$\alpha = 0^\circ$

Uwaga:
Zmieniając położenie wierzchołków możesz zmieniać kształt trapezu.



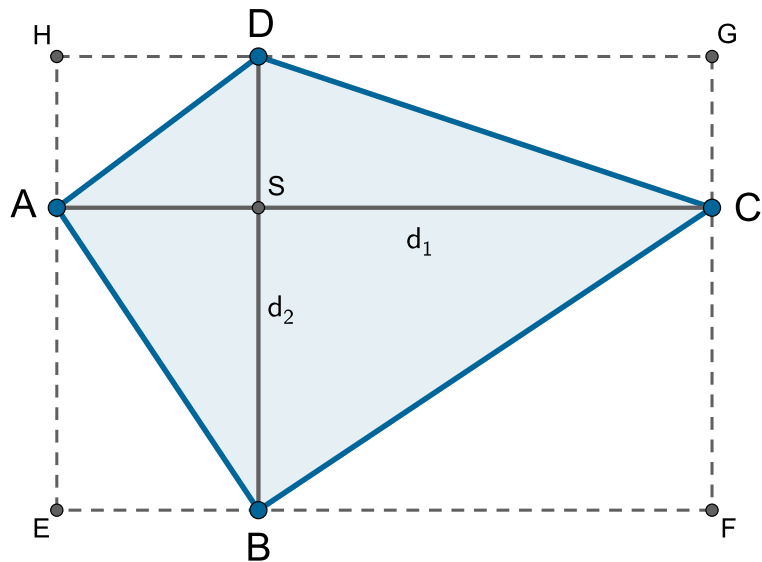
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P17eDnFE2>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole czworokąta wypukłego, w którym przekątne przecinają się pod kątem prostym

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2},$$

gdzie d_1 , d_2 są przekątnymi tego czworokąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Czworokąt $ABCD$ umieścimy w prostokącie $EFGH$, którego boki są równoległe do przekątnych. Prostokąt $EFGH$ jest podzielony na cztery prostokąty. Otrzymujemy cztery pary trójkątów przystających:

- trójkąt ASD jest przystający do trójkąta DHA ,
- trójkąt CSD jest przystający do trójkąta DGC ,
- trójkąt CSB jest przystający do trójkąta BFC ,
- trójkąt ASB jest przystający do trójkąta BEA .

Pole czworokąta $ABCD$ jest więc dwa razy mniejsze od pola prostokąta $EFGH$, skąd otrzymujemy

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$