



Zastosowania twierdzenia Weierstrassa

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowania twierdzenia Weierstrassa

Źródło: Cameron Ballard, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Czy wśród stożków wpisanych kulę istnieje ten, który ma największą objętość? Czy wśród trójkątów opisanych na okręgu o promieniu r istnieje taki, który ma najmniejsze pole? Czy wśród prostokątów o danym obwodzie istnieje taki, którego pole jest najmniejsze? Jak obliczyć wartość najmniejszą pewnej funkcji określonej na wskazanym przedziale?

Znajdowanie najmniejszych i największych wartości różnych funkcji jest z bardzo istotnym elementem matematyki stosowanej. W niektórych sytuacjach pomaga twierdzenie Weierstrassa o osiągnięciu kresów oraz rachunek różniczkowy.

Twoje cele

- Wyznaczysz wartości ekstremalne wybranych funkcji elementarnych.
- Znajdziesz funkcje, które nie osiągają kresów swoich wartości.

Przeczytaj

Twierdzenie Weierstrassa

Szukanie wartości największych i najmniejszych różnych funkcji rozpoczniemy od zastanowienia się, czy na pewno istnieją. W tym celu zapoznajmy się z twierdzeniem Weierstrassa o osiągnięciu kresów.

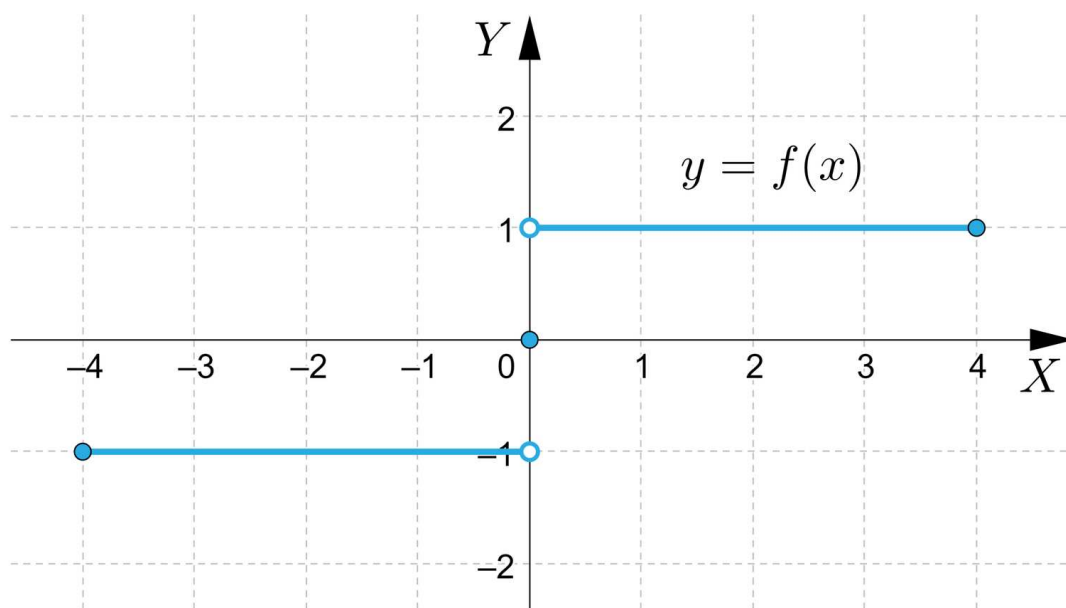
Twierdzenie: twierdzenie Weierstrassa

Niech f będzie funkcją ciągłą, określoną na domkniętym przedziale $a \leq x \leq b$. Istnieją takie argumenty c i d z przedziału $a \leq x \leq b$, w których funkcja przyjmuje wartości ekstremalne, to znaczy dla każdego argumentu x z przedziału $a \leq x \leq b$ mamy $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

Twierdzenie to mówi, że każda funkcja ciągła, określona na przedziale domkniętym, osiąga na tym przedziale wartość najmniejszą oraz największą. Nie tylko funkcje, spełniające założenia twierdzenia Weierstrassa (ciągłe, określone na przedziale domkniętym) mają taką własność, na przykład funkcja signum, wyznaczająca znak liczby,

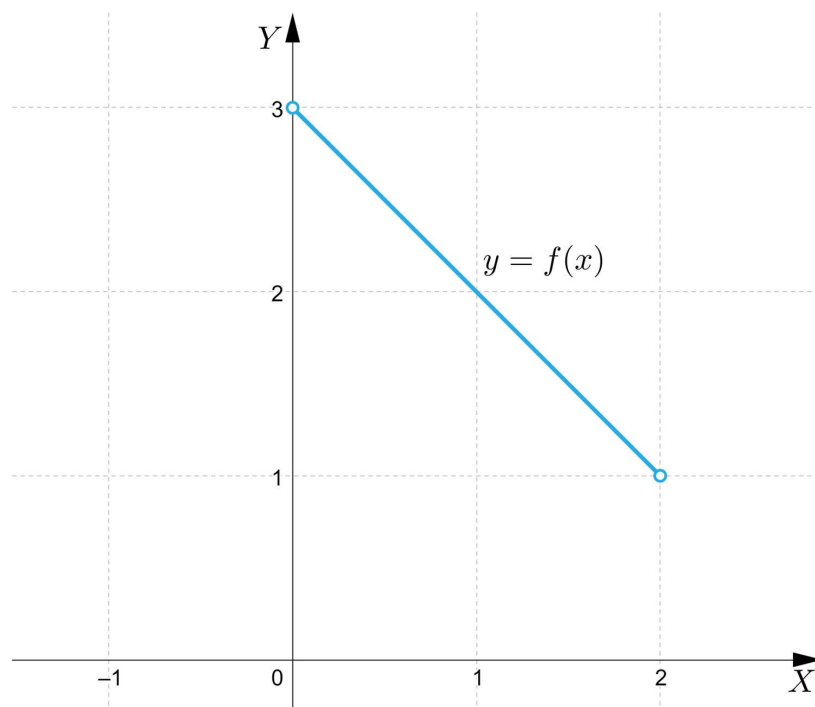
$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych, oraz nie jest ciągła (w zerze), a osiąga swoje kresy, i to wielokrotnie. Możemy na przykład przyjąć $c = -3$ i $d = 12$, i zobaczymy, że dla każdej wartości x mamy $-1 = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = 1$.



Wykres funkcji nieciągłej, osiągającej swoje kresy

Jeżeli funkcja nie spełnia założeń twierdzenia Weierstrassa, to nie możemy jednak mieć pewności, czy osiąga swoje kresy. Funkcja ciągła, ale określona na zbiorze nie domkniętym, może nie osiągać swoich kresów. Weźmy funkcję $f(x) = 3 - x$, zdefiniowaną na przedziale otwartym $0 < x < 2$. Osiąga ona wartości pomiędzy 1 i 3, i to dowolnie blisko liczb 1 i 3, ale w żadnym punkcie swojej dziedziny nie przyjmuje wartości 1 ani 3.

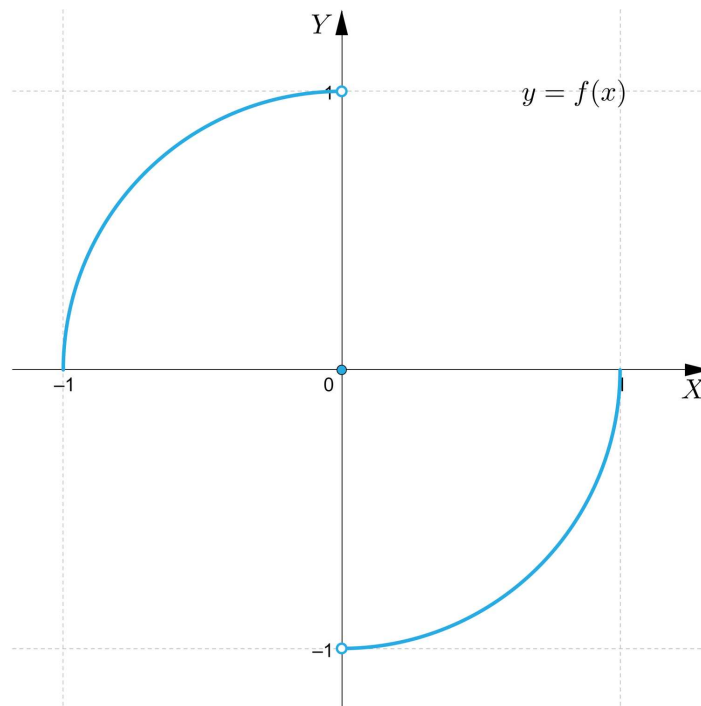


Wykres funkcji na przedziale otwartym, nieosiągającej swoich kresów

Podobnie funkcja nieciągła, nawet określona na przedziale domkniętym, może nie osiągać swoich kresów. Obejrzyjmy funkcję

$$y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{dla } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{dla } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Przyjmuje ona wartości dowolnie bliskie 1, ale mniejsze od 1, i dowolnie bliskie (-1) , ale większe niż (-1) , nie osiąga więc swoich kresów.



Wykres funkcji nieciągłej, nieosiągającej swoich kresów

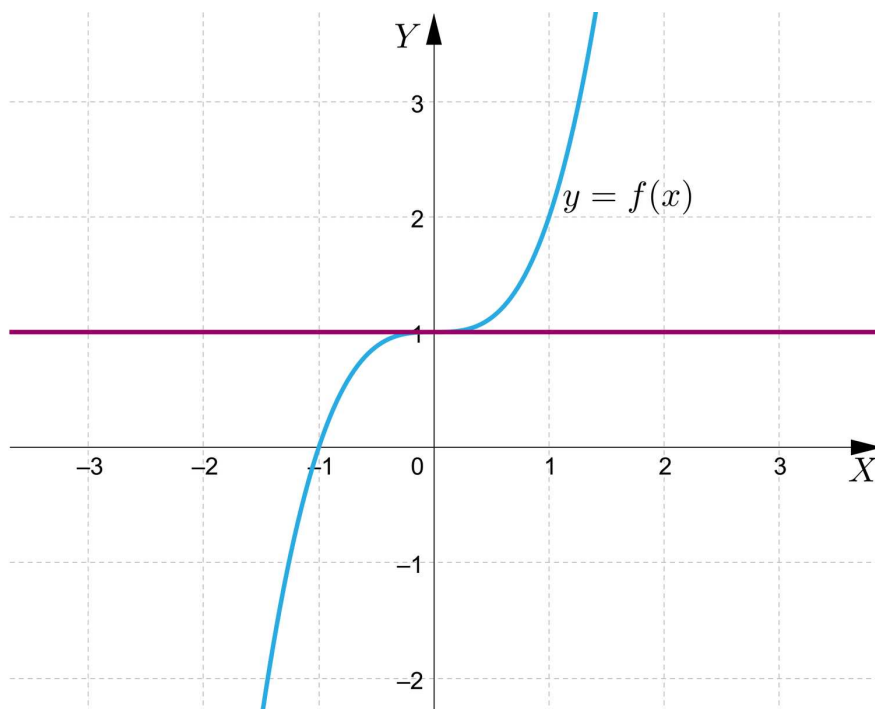
Najważniejsze od tej pory jest to, że funkcje ciągłe określone na przedziale domkniętym na pewno osiągają swoje kresy. Dowiedzmy się teraz, jak tego użyć do znajdowania wartości ekstremalnych, czyli minimalnych i maksymalnych różnych funkcji.

Ekstrema funkcji ciągłych

Naszym podstawowym narzędziem szukania wartości ekstremalnych funkcji będzie warunek konieczny w postaci różniczkowej.

Warunek konieczny istnienia ekstremum. Jeżeli funkcja różniczkowalna f ma w punkcie x_0 **ekstremum lokalne**, to x_0 jest **punktem stacjonarnym**. **Punkt stacjonarny** to taki punkt x_0 w którym funkcja pochodna funkcji f się zeruje, $f'(x_0) = 0$, czyli w jakimś sensie „stoi w miejscu”, ani nie rośnie, ani nie maleje.

Podany powyżej warunek jest jedynie warunkiem koniecznym, ale nie jest to oczywiście warunek wystarczający, na przykład funkcja $y = x^3 + 1$ ma punkt stacjonarny równy $x = 0$, czyli jej wykres ma tam styczną poziomą, ale nie ma w tym punkcie ani minimum, ani maksimum.



Wykres funkcji z punktem stacjonarnym bez ekstremum

W celu wyznaczenia ekstremów funkcji różniczkowalnej będziemy zatem postępować w taki sposób: najpierw znajdziemy wszystkie punkty stacjonarne funkcji, sprawdzimy wartości funkcji w tych punktach oraz na końcach dziedziny, porównamy wszystkie wartości ze sobą, i w ten sposób znajdziemy wartość minimalną i maksymalną tej funkcji.

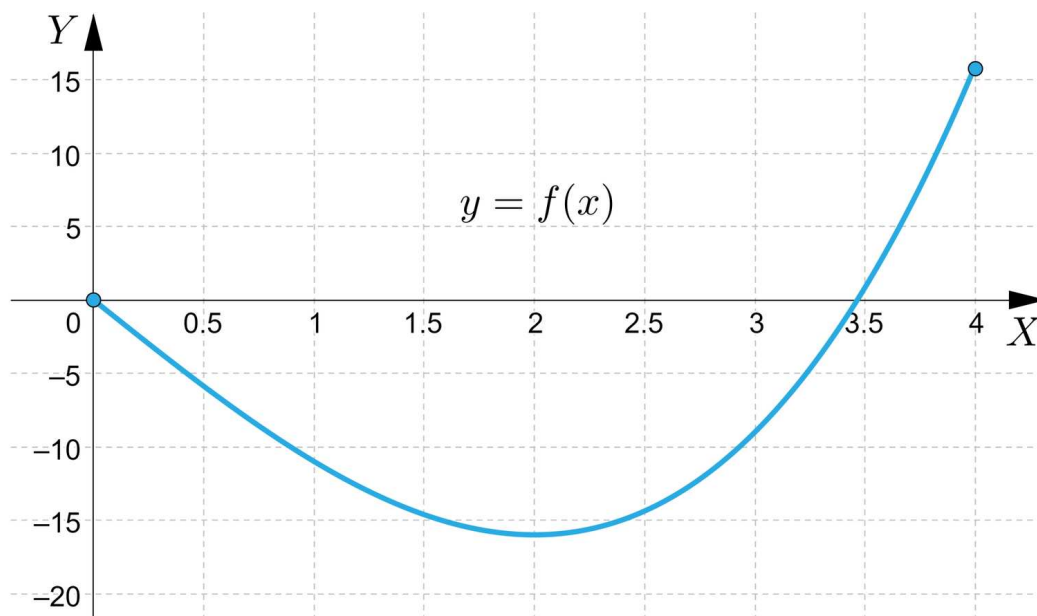
Przykład 1

Znajdziemy ekstrema funkcji $f(x) = x^3 - 12x$ określonej na przedziale $0 \leq x \leq 4$.

Rozwiązanie

Jest to funkcja ciągła, więc na przedziale domkniętym przyjmuje na pewno swoje kresy, i różniczkowalna, czyli możemy szukać punktów stacjonarnych. Jej pochodna wynosi $f'(x) = 3x^2 - 12$, przyrównanie pochodnej do zera daje równanie $3x^2 - 12 = 0$, którego rozwiązaniami są (-2) i 2 . Pierwszy z tych argumentów nie należy do naszej dziedziny, musimy go więc odrzucić.

Pozostaje nam sprawdzić wartości funkcji w trzech punktach – na obu brzegach dziedziny oraz w punkcie stacjonarnym. Mamy $f(0) = 0$, $f(4) = 16$ i $f(2) = -16$, czyli wartością najmniejszą tej funkcji jest (-16) , a największą 16 .



Przykład 2

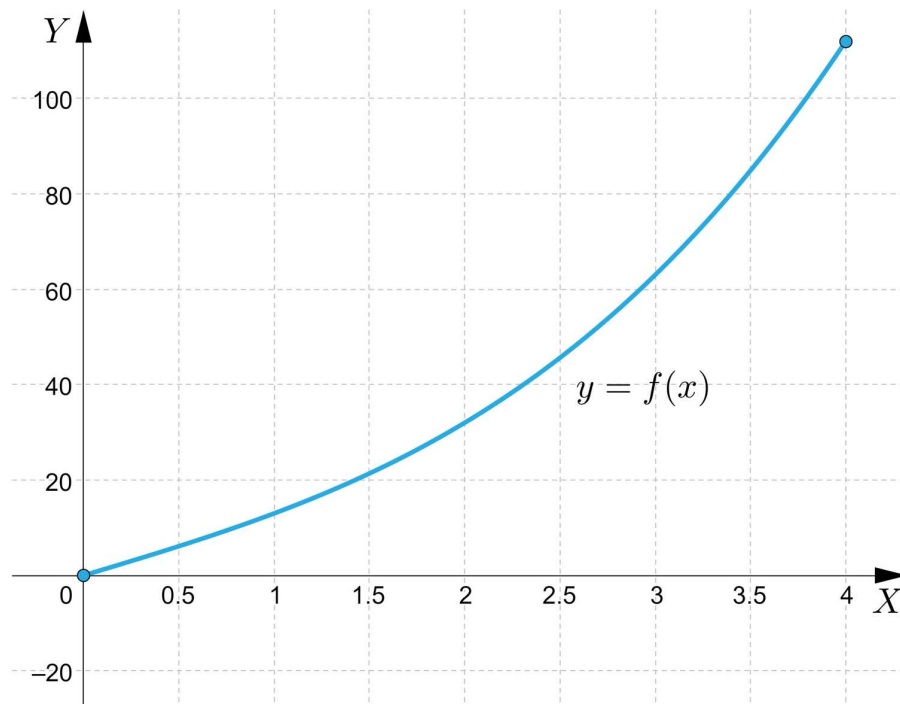
Znajdziemy ekstrema funkcji $f(x) = x^3 + 12x$ określonej na przedziale $0 \leq x \leq 4$.

Rozwiązanie

Jest to funkcja ciągła, więc na przedziale domkniętym przyjmuje na pewno swoje kresy, i różniczkowalna, czyli możemy szukać punktów stacjonarnych. Jej pochodna wynosi $f'(x) = 3x^2 + 12$, przyrównanie pochodnej do zera daje równanie $3x^2 + 12 = 0$, które nie posiada rozwiązań rzeczywistych. Musimy zatem sprawdzić jedynie wartości funkcji na obu brzegach dziedziny.

Mamy $f(0) = 0$ i $f(4) = 112$, czyli wartością najmniejszą tej funkcji jest 0, a największą 112.

Zauważmy, że po wyznaczeniu pochodnej mogliśmy przeprowadzić inne rozumowanie – pochodna się nie zeruje, i jest cały czas dodatnia, co oznacza, że funkcja zawsze rośnie, czyli jej wartość na lewym krańcu dziedziny będzie jej wartością minimalną, a na prawym krańcu – maksymalną.



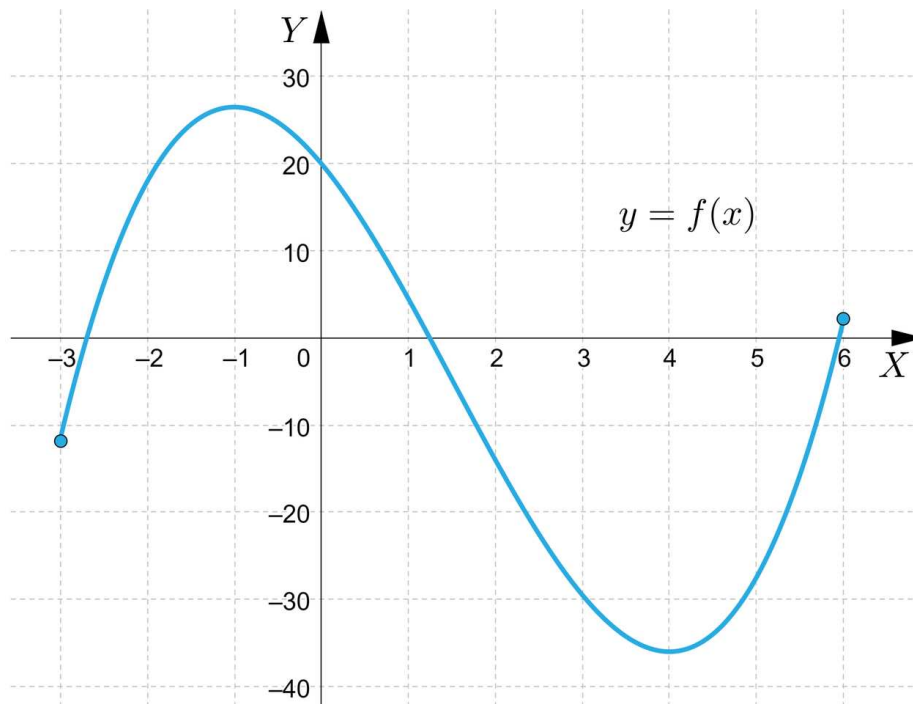
Przykład 3

Znajdziemy ekstrema funkcji $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x + 20$ określonej na przedziale $-3 \leq x \leq 6$.

Rozwiązanie

Ponownie jest to funkcja ciągła, więc na przedziale domkniętym przyjmuje na pewno swoje kresy, i różniczkowalna, czyli możemy szukać punktów stacjonarnych. Pochodna ma postać $f'(x) = 3x^2 - 9x - 12$, równanie na punkty stacjonarne ma postać $3x^2 - 9x - 12 = 0$, po uproszczeniu $x^2 - 3x - 4 = 0$, którego rozwiązaniami są (-1) i 4 . W celu wyznaczenia wartości ekstremalnych musimy w tym przypadku wyznaczyć i porównać wartości funkcji w czterech punktach – na obu brzegach dziedziny, oraz w dwóch punktach stacjonarnych.

Otrzymujemy $f(-3) = -11,5$, $f(6) = 2$, $f(-1) = 26,5$ i $f(4) = -36$. Ostatecznie wartością najmniejszą funkcji jest (-36) , zaś największą $26,5$.



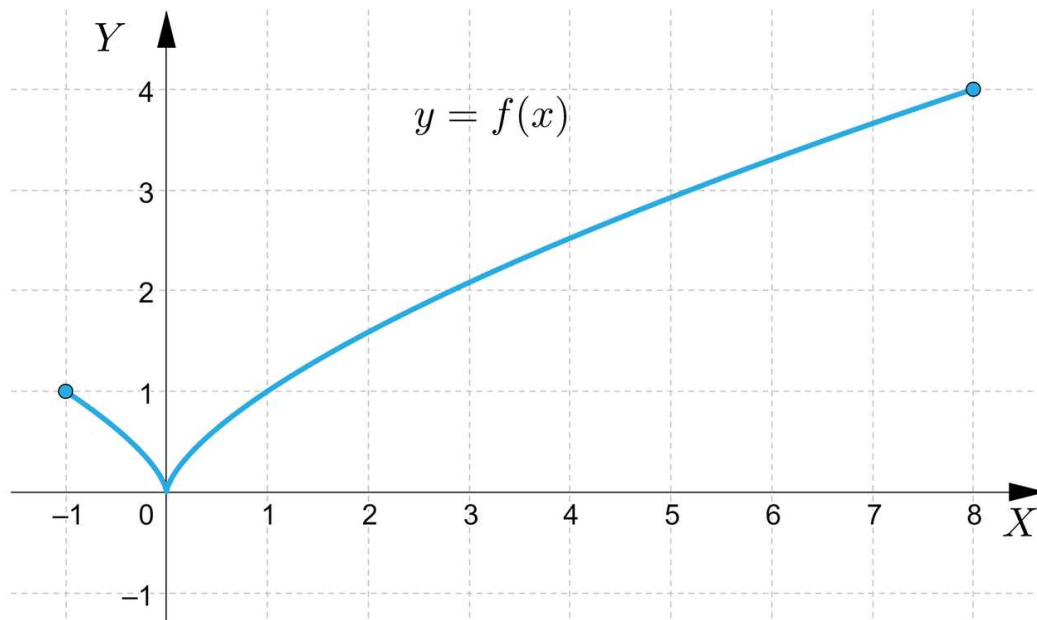
Przykład 4

Znajdziemy ekstrema funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ określonej na przedziale $-1 \leq x \leq 8$.

Rozwiązanie

Ponownie jest to funkcja ciągła, więc na przedziale domkniętym przyjmuje na pewno swoje kresy, ale nie jest różniczkowalna w zerze, czyli nie wystarczy już znalezienie punktów stacjonarnych. Pochodna ma postać $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $x \neq 0$, i równanie na punkty stacjonarne nie ma rozwiązania. W celu wyznaczenia wartości ekstremalnych musimy w tym przypadku wyznaczyć i porównać wartości funkcji w trzech punktach – na obu brzegach dziedziny, oraz w punkcie nieróżniczkowalności.

Otrzymujemy $f(-1) = 1$, $f(8) = 4$ i $f(0) = 0$. Ostatecznie wartością najmniejszą funkcji jest 0, zaś największą 4.



Słownik

ekstremum lokalne funkcji

wartość najmniejsza lub największa, którą przyjmuje funkcja w pewnym otoczeniu

punkt stacjonarny

punkt, w którym styczna do wykresu funkcji jest pozioma

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem i rozwiąż poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DVAmrfvh4>

Film przedstawia zastosowania twierdzenia Weierstrassa.

Polecenie 2

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ 3 + x & \text{dla } x \in (1, 3) \end{cases}$ za pomocą twierdzenia Weierstrassa na przedziale $\langle -1, 3 \rangle$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wyznacz przedział, w którym z pewnością można znaleźć maksimum lokalne funkcji $f(x) = 2x^2 + 1$.

☐ $-1 < x < 2$

☐ funkcja nie posiada maksimum lokalnego

☐ $-1 \leq x < 2$

☐ $-1 \leq x \leq 2$

Ćwiczenie 2



Wyznacz przedział, w którym można znaleźć minimum globalne funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

☐ $1 < x < 2$

☐ $1 \leq x \leq 2$

☐ funkcja nie posiada minimum globalnego

☐ $1 \leq x < 2$

Ćwiczenie 3



Która funkcja osiąga swoje kresy na przedziale $-1 \leq x \leq 2$?

☐ $y = 2x$ dla $-1 \leq x < 0$ i $y = 2x - 10$ dla $0 \leq x \leq 2$

☐ nie istnieje taka funkcja

☐ $y = \sin(x)$

☐ $y = \frac{1}{x+1}$

Ćwiczenie 4



Która funkcja osiąga swoje maksimum globalne na przedziale $0 < x \leq 2$?

☐ $y = -\frac{1}{x}$

☐ nie istnieje taka funkcja

☐ $y = \cos(x)$

☐ $y = \frac{1}{x}$

Ćwiczenie 5



Założmy, że dana jest ciągła funkcja f , stale malejąca, której wartości w wybranych punktach są równe $f(-1) = -1$, $f(1) = -3$, $f(3) = -19$. Co można powiedzieć o jej ekstremach na przedziale $-1 \leq x \leq 1$?

Jej minimum to , a maksimum to .

Ćwiczenie 6



Niech dana będzie funkcja, która osiąga swoje kresy. Zaznacz wszystkie opisy, pasujące do tej funkcji.

- ☐ funkcja może być nieciągła
- ☐ funkcja musi być zdefiniowana na przedziale domkniętym
- ☐ funkcja musi być różniczkowalna
- ☐ funkcja musi być ciągła
- ☐ funkcja nie może być różniczkowalna
- ☐ funkcja nie może być ciągła

Ćwiczenie 7



Niech dana będzie funkcja ciągła, zdefiniowana na przedziale domkniętym. Zaznacz wszystkie opisy, pasujące do tej funkcji.

- ☐ funkcja musi być różniczkowalna
- ☐ funkcja może osiągać minimum globalne dla więcej niż jednego argumentu,
- ☐ funkcja nie może być różniczkowalna
- ☐ funkcja może nie osiągać kresów
- ☐ funkcja musi osiągać kresy
- ☐ funkcja osiąga maksimum globalne zawsze tylko dla jednego argumentu

Ćwiczenie 8



Połącz w pary wzory funkcji i opisy.

$$y = (1 + x)^2$$

funkcja osiąga kresy na przedziale
 $-1 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \text{ dla } -1 \leq x < 0, \\ y &= 0 \text{ dla } x = 0 \text{ i} \\ y &= x - 1 \text{ dla } 0 < x \leq 1 \end{aligned}$$

funkcja nie osiąga kresów na przedziale
 $-2 < x \leq 0$

$$y = 1 - 2x$$

funkcja osiąga kresy na przedziale
 $-1 < x \leq 2$

$$y = 1 - x^2$$

funkcja nie osiąga kresów na przedziale
 $-1 \leq x \leq 1$

Ćwiczenie 9



Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ cx + 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ z parametrem rzeczywistym c . Połącz wartości parametru c z odpowiednimi opisami sytuacji.

$$c = 0$$

funkcja jest ciągłą

$$c > 0$$

funkcja osiąga maksimum globalne
w jednym punkcie na przedziale
 $-1 \leq x \leq 1$

$$c < 0$$

funkcja osiąga maksimum globalne
wielokrotnie na przedziale $-1 \leq x \leq 1$

nie ma takiej wartości c

funkcja nie osiąga maksimum na
przedziale $-1 \leq x \leq 1$

Dla nauczyciela

Autor: Jarosław Woźniak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowania twierdzenia Weierstrassa

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza ciąg przybliżeń miejsc zerowych funkcji elementarnej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa kierowana;
- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery multimedialne z dostępem do Internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji**Przed lekcją**

- Uczniowie czytają część wprowadzającą lekcji.

Faza wstępna:

- Nauczyciel wyświetla na tablicy interaktywnej sekcję „Wprowadzenie”, omawia i komentuje z uczniami cele lekcji. Nauczyciel prosi uczniów o streszczenie przeczytanego przed lekcją materiału, analizuje zagadnienie, rozpoznaje wiedzę uczniów dotyczącą własności funkcji ciągłych.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy interaktywnej część „Twierdzenie Weierstrassa” z sekcji „Przeczytaj” oraz omawia ją na forum klasy.
2. Uczniowie w 3–4 osobowych grupach czytają pozostałą część sekcji „Przeczytaj”, tworzą mapę myśli na temat szukania ekstremów różnych klas funkcji. W przypadku powstania wątpliwości, nauczyciel wyjaśnia na forum całej klasy napotkany problem. Pod opieką prowadzącego uczniowie porównują wyniki pracy nad mapami myśli i omawiają powstałe różnice.
3. Uczniowie samodzielnie rozwiązują zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

- Po ustalonym czasie nauczyciel sprawdza odpowiedzi uczniów, wyjaśnia pomyłki, omawia poprawne rozwiązania na forum klasy.
- Jako podsumowanie lekcji uczniowie oglądają zaprezentowane w filmie samouczku zastosowania twierdzenia Weierstrassa.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują polecenia związane z filmem samouczkiem.

Materiały pomocnicze:

- [Funkcja ciągła](#)
- [Przykłady funkcji ciągłych](#)
- [Własności funkcji ciągłych](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykonać na podstawie filmu infografikę prezentującą zastosowania twierdzenia Weierstrassa.