



## Liczba podzbiorów zbioru $n$ -elementowego. Kombinacje

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Liczba podzbiorów zbioru $n$ -elementowego. Kombinacje

Źródło: Ellen Qin, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](http://www.unsplash.com), domena publiczna.

Czy widzisz różnicę między pytaniem o liczbę możliwych wyborów dwuosobowej delegacji uczniów pewnej klasy, a pytaniem o liczbę możliwych wyborów przewodniczącego i skarbnika tej klasy? W pierwszym przypadku pytamy jedynie o dwuelementowy podzbiór zbioru jaki stanowi rozważana klasa. Nie rozróżniamy między sobą członków delegacji.

W tej lekcji będziemy zajmować się podzbiorami ustalonego zbioru. W szczególności będzie nas interesowało, ile jest wśród nich podzbiorów o ustalonej liczbie elementów.

### Twoje cele

- Nauczysz się rozpoznawać kombinacje w typowych doświadczeniach związanych z wyborami podzbiorów ustalonego zbioru.
- Znajomość twierdzenia o liczbie kombinacji pozwoli Ci obliczać, ile jest wyników wymienionych wyżej doświadczeń.
- Dowiesz się, że zbiór wartości każdej funkcja ściśle monotonicznej ze skończonego zbioru  $A$  do skończonego zbioru  $B$  ( $|A| \leq |B|$ ) da się opisać z użyciem pojęcia kombinacji, co pozwoli Ci wyznaczyć liczbę wszystkich takich funkcji.
- Poznasz przydatne tożsamości, dzięki którym dowiesz, jak zapisywać liczbę możliwych wyników doświadczeń losowych na dwa sposoby.

- Nauczysz się wykorzystywać powyższą umiejętność do rozwiązywania zadań dotyczących podziału zbioru na podzbiory.

# Przeczytaj

---

Rozpatrzmy  $n$ -elementowy zbiór  $A$ .

Liczbę wszystkich  $k$ -elementowych podzbiorów zbioru  $A$ , gdzie  $0 \leq k \leq n$ , oznaczamy symbolem  $\binom{n}{k}$ , co czytamy „ $n$  po  $k$ ” lub „ $n$  nad  $k$ ”.

Zauważmy, że elementy każdego  $k$ -elementowego podzbioru, dowolnie wybranego spośród opisanych powyżej, możemy rozmieścić na  $k!$  sposobów – otrzymamy wtedy wszystkie możliwe permutacje tego podzbioru  $k$ -elementowego. Jeżeli tę czynność powtórzymy dla wszystkich  $\binom{n}{k}$  podzbiorów, to w efekcie otrzymamy wszystkie  $k$ -elementowe wariacje bez powtórzeń  $n$ -elementowego zbioru  $A$ .

Z drugiej strony: wiemy, że jest  $\frac{n!}{(n-k)!}$  wszystkich  $k$ -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $n$ -elementowego (gdzie  $0 \leq k \leq n$ ).

Otrzymujemy stąd równość  $k! \cdot \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ , co oznacza, że

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

dla każdych liczb całkowitych  $k, n$ , które spełniają warunek  $0 \leq k \leq n$ .

Dla podzbioru pustego (wtedy  $k = 0$ ) zbioru  $n$ -elementowego dostajemy w szczególności  $\binom{n}{0} = 1$ .

Ponieważ zbiór  $n$ -elementowy nie ma podzbiorów, które mają więcej niż  $n$ -elementów, więc gdy dodatkowo liczby całkowite  $n$  oraz  $k$  spełniają warunek  $k > n$ , to  $\binom{n}{k} = 0$ .

## Definicja: $k$ -elementowa kombinacja zbioru $n$ -elementowego

Każdy  $k$ -elementowy podzbiór zbioru  $n$ -elementowego, gdzie  $0 \leq k \leq n$ , nazywamy  $k$ -elementową kombinacją tego zbioru  $n$ -elementowego.

## Twierdzenie: liczba wszystkich $k$ -elementowych kombinacji zbioru $n$ -elementowego

Liczba wszystkich  $k$ -elementowych kombinacji zbioru  $n$ -elementowego, gdzie  $0 \leq k \leq n$ , jest równa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

### Przykład 1

Omówimy kilka zastosowań **twierdzenia o liczbie kombinacji**, w których kontekst dotyczący zliczania liczby podzbiorów wynika – jak się wydaje – natychmiast z treści zadania.

- a. Do turnieju koszykówki, rozgrywanego systemem „każdy z każdym” (bez rewanżów), zgłosiło się 12 drużyn. Zatem każdy mecz w tym turnieju przypisany był do dokładnie jednej pary drużyn wybieranej spośród 12 zgłoszonych.

Wynika stąd, że wszystkich meczów, które w tym turnieju należało rozegrać było tyle, ile wszystkich dwuelementowych **kombinacji** zbioru 12-elementowego, czyli

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66.$$

- b. Z pudełka, w którym znajduje się 20 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 20 losujemy jednocześnie 3 kule. Wobec tego każdy wynik takiego losowania to trzejelementowa **kombinacja** zbioru dwudziestoelementowego.

Stąd liczba wszystkich możliwych wyników takiego losowania jest równa

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140.$$

- c. Na okręgu zaznaczono 25 różnych punktów. Obliczymy, ile jest wszystkich czworokątów wypukłych, których wierzchołkami są punkty wybrane spośród tych zaznaczonych.

Ponieważ wybierając dowolne cztery z tych jedenastu punktów wyznaczamy dokładnie jeden czworokąt wypukły, więc każdy taki czworokąt opisuje dokładnie jedna czteroelementowa **kombinacja** 25-elementowego zbioru punktów zaznaczonych na okręgu.

Oznacza to, że wszystkich czworokątów spełniających warunki zadania jest

$$\binom{25}{4} = \frac{25!}{4! \cdot 21!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 12650.$$

- d. Spośród uczniów 31-osobowej klasy należy wybrać pięcioosobową delegację, która będzie reprezentować klasę na spotkaniu z dyrekcją szkoły. Zatem każda taka delegacja to pięcioelementowa **kombinacja** zbioru liczącego 31 elementów.

Wynika stąd, że liczba wszystkich delegacji, które można w ten sposób utworzyć jest

$$\text{równa } \binom{31}{5} = \frac{31!}{5! \cdot 26!} = \frac{31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 169\,911.$$

- e. W pewnej grze losowej należy wybrać 6 liczb ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 49\}$  wszystkich dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 50. Oznacza to, że każda wybrana szóstka

liczb to sześćcioelementowa **kombinacja** zbioru 49-elementowego.

Liczba tych wyborów jest więc równa  $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816$

- f. W rozdaniu brydżowym gracz otrzymuje 13 kart wybranych losowo z talii, w której są 52 karty. Wynik takiego rozdania można więc opisać jako 13-elementową **kombinację** zbioru 52-elementowego. Wynika stąd, że liczba wszystkich układów kart możliwych do otrzymania przez brydżystę jest równa

$$\binom{52}{13} = \frac{52!}{13! \cdot 39!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \dots \cdot 41 \cdot 40}{13 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = 635\,013\,559\,600$$

### Przykład 2

Obliczymy, ile jest wszystkich funkcji rosnących, których dziedziną jest zbiór  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ , a zbiorem wartości jest zbiór  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

### Rozwiązanie

Zauważmy, że każdy sześćcioelementowy podzbiór zbioru  $B$  można uporządkować rosnąco dokładnie na jeden sposób. Zatem każdej funkcji różnowartościowej spełniającej warunki zadania wzajemnie jednoznacznie przypiszemy sześćcioelementową **kombinację** zbioru  $B$ , odpowiadającą zbiorowi wartości tej funkcji.

Wynika stąd, że jest  $\binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$  funkcji rosnących ze zbioru  $A$  do zbioru  $B$ .

### Przykład 3

Elektroniczna zabawka ma 10 przycisków, rozmieszczonych po 5 w dwóch rzędach (jak na poniższym rysunku).



Po naciśnięciu w tej zabawce dowolnie wybranego przycisku zapala się dioda, która zmienia jego kolor na czerwony, a dopiero po włączeniu diody każdym z 10 przycisków następuje wyłączenie wszystkich diod (inaczej żadnej diody zgasić nie można).

Jeżeli naciśniemy każdy przycisk dokładnie raz, pilnując zasady: przycisk w danym rzędzie można wcisnąć wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie przyciski z jego lewej strony zostały już wcisnięte, to po zapaleniu 10 diod odgrywana jest melodyjka.

Obliczymy, ile jest możliwych sposobów naciśnięcia wszystkich przycisków tej zabawki w takim porządku, po którym będzie można usłyszeć melodyjkę.

## Rozwiązanie

Naszym zadaniem jest podjęcie 10 kolejnych decyzji, za każdym razem polegających na wybraniu i wciśnięciu przycisku, pod którym nie świeci się dioda.

Jeżeli ponumerujemy przyciski: w górnym rzędzie, idąc od lewej do prawej, numerami od 1 do 5, w dolnym rzędzie, również idąc od lewej do prawej, numerami od 6 do 10, to każda sekwencja 10 kolejno naciśniętych przycisków odpowiada wzajemnie jednoznacznie pewnej **permutacji** zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

Melodyjkę usłyszymy wtedy i tylko wtedy, gdy w tej **permutacji** numery od 1 do 5 pojawiają się w porządku wzrastania numerów i jednocześnie numery od 6 do 10 pojawiają się w porządku wzrastania numerów – taki warunek spełnia np. **permutacja**  $(6, 7, 1, 8, 2, 3, 4, 9, 10, 5)$ . **Permutację**, która spełnia powyższe warunki nazwijmy *dobrą*.

Zauważmy zatem, że aby otrzymać **permutację dobrą** należy ustalić w niej 5 miejsc dla numerów od 1 do 5, następnie rozmieścić te numery na wybranych miejscach w porządku ich wzrastania (co da się zrobić tylko na jeden sposób), a następnie na pozostałych miejscach, również w kolejności rosnącej, rozmieścić numery od 6 do 10.

Ponieważ każdy wybór 5 numerów ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  to 5-elementowa **kombinacja** ze zbioru 10-elementowego, więc wszystkich możliwych sposobów naciśnięcia dziesięciu przycisków tej zabawki w takim porządku, który gwarantuje odsłuchanie melodyjki jest  $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$ .

## Przykład 4

Rozpatrzmy dziewięciokrotny rzut monetą.

Zauważmy, że jeżeli do numeru każdego z kolejnych rzutów przypiszemy jego wynik: 'o' – jeśli wypadł orzeł, 'r' – jeśli wypadła reszka, to wynikowi każdego dziewięciokrotnego rzutu monetą przyporządkujemy wzajemnie jednoznacznie dziewięcioelementowy ciąg, którego elementami są 'o' lub 'r'.

Korzystając z tego spostrzeżenia, możemy obliczyć, ile jest wszystkich możliwych wyników określonych następującymi warunkami:

a. wypadły dokładnie 4 reszki.

Wystarczy w tym celu ustalić, na ile sposobów można wybrać 4 miejsca dla 4 elementów 'r' w opisanym powyżej 9-elementowym ciągu. Ponieważ każdy taki wybór to 4-elementowa **kombinacja** ze zbioru 9-elementowego, więc wszystkich możliwych wyników dziewięciokrotnego rzutu monetą, w których wypadły 4 reszki

$$\text{jest } \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

b. wypadło dokładnie 5 orłów.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie ustalimy, na ile sposobów można wybrać 5 miejsc dla 5 elementów 'o' w omawianym 9-elementowym ciągu. Ponieważ każdy taki wybór to 5-elementowa **kombinacja** ze zbioru 9-elementowego, więc wszystkich możliwych wyników dziewięciokrotnego rzutu monetą, w których

$$\text{wypadło 5 orłów jest } \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126.$$

Zauważmy, że każdy wynik dziewięciokrotnego rzutu monetą, w którym w pewnych 5 rzutach wypadł orzeł, jednocześnie opisuje taki wynik, w którym w każdym z pozostałych 4 rzutów wypadła reszka. Jest to więc dokładnie ten sam wynik, co omówiony w podpunkcie (a), a więc liczby tych wyników są – jak to już zresztą bezpośrednio obliczyliśmy – równe.

**Uwaga 1.** Jeśli rozpatrzmy  $n$ -krotny rzut monetą, to – rozumując podobnie jak w powyższym przykładzie – stwierdzimy, że liczba wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia, w których wypadło  $k$  reszek (gdzie  $0 \leq k \leq n$ ) jest równa liczbie wszystkich wyników tego doświadczenia, w których wypadło  $n - k$  orłów.

Zatem dla dowolnych liczb całkowitych  $n$  i  $k$  takich, że  $0 \leq k \leq n$  zachodzi równość

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Algebraiczny dowód tej tożsamości pozostawiamy czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie.

**Uwaga 2.** Jeśli rozpatrzmy  $n$ -krotny rzut monetą, to wszystkie możliwe wyniki możemy podzielić na rozłączne przypadki ze względu np. na liczbę otrzymanych orłów. Możemy ich wyrzucić 0 lub 1, lub 2, ..., lub  $n$ . Oznacza to, że wszystkich wyników jest

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}.$$

Z drugiej strony w każdym z tych  $n$  rzutów mamy dwie możliwości: otrzymamy orła lub nie otrzymamy orła, zatem wszystkich wyników jest  $2^n$ .

Wobec tego dla dowolnych liczb całkowitych  $n$  i  $k$  takich, że  $0 \leq k \leq n$  zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

## Słownik

### **$k$ -elementowa kombinacja zbioru $n$ -elementowego**

każdy  $k$ -elementowy podzbiór zbioru  $n$ -elementowego, gdzie  $0 \leq k \leq n$ , nazywamy  $k$ -elementową kombinacją tego zbioru  $n$ -elementowego

### **liczba wszystkich $k$ -elementowych kombinacji zbioru $n$ -elementowego**

liczba wszystkich  $k$ -elementowych kombinacji zbioru  $n$ -elementowego, gdzie  $0 \leq k \leq n$ , jest równa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

### **permutacja zbioru $n$ -elementowego**

każdy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru  $n$ -elementowego

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej animacją. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania, w którym pokazane jest, jak obliczyć, ile jest dziesięcioliterowych napisów spełniających jednocześnie dwa warunki.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOnzp1OgK>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego liczby podzbiorów zbioru  $n$  elementowego.

---

## Polecenie 2

Korzystając z przykładu omówionego w animacji, rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

Z ośmiu liter alfabetu:  $a, b, c, d, A, B, C, D$  tworzymy ośmioliterowy napis, w którym każda z tych liter występuje dokładnie raz.

Oblicz, ile jest takich napisów, w których litera  $A$  znajdzie się przez  $B$ ,  $B$  przed  $C$  oraz  $C$  przed  $D$ , a ponadto odpowiednia mała litera będzie zapisana przed taką samą dużą. Te warunki spełnia np. napis  $baAcBdCD$ .

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Dany jest zbiór  $A = \{1, 2, 3, \dots, 98, 99\}$  wszystkich dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 100. Losujemy z tego zbioru jednocześnie dwie liczby.

Na ile sposobów możemy wtedy wylosować taką parę liczb, których suma kwadratów jest podzielna przez 3?

Odpowiedź:

## Ćwiczenie 2



Rzucamy 15 razy sześcienną kostką do gry. Oblicz, ile jest wszystkich wyników tego doświadczenia, które spełniają jednocześnie dwa warunki:

1. dokładnie 4 razy wypadła nieparzysta liczba oczek,
2. suma wyrzuconych oczek jest równa 26.

Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $\binom{26}{4}$

☐  $\binom{22}{4}$

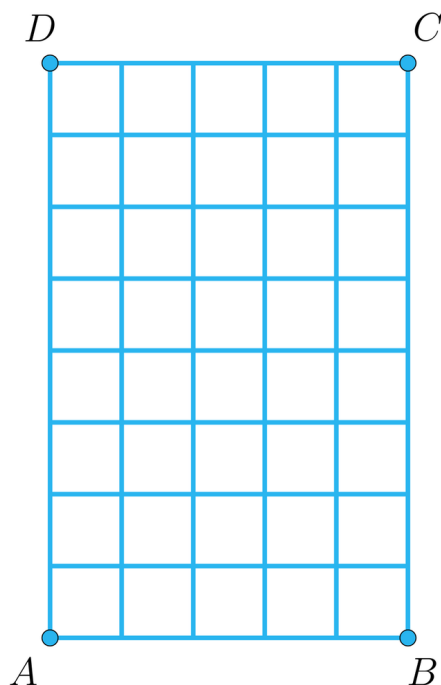
☐  $\binom{15}{4}$

☐  $\binom{11}{4}$

### Ćwiczenie 3



Dany jest prostokąt  $ABCD$ , w którym  $|AB| = 5$  oraz  $|AD| = 8$ . Prostokąt ten podzielono liniami siatki na kwadraty jednostkowe (jak na rysunku poniżej).



Oblicz, ile jest wszystkich najkrótszych dróg prowadzących po liniach siatki od punktu  $A$  do punktu  $C$ .

### Ćwiczenie 4



Oblicz, ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych, spełniających jednocześnie trzy następujące warunki:

1. cyfra tysięcy jest większa od cyfry setek,
2. cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek,
3. cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności.

**Odpowiedź:** Wszystkich takich liczb czterocyfrowych jest

## Ćwiczenie 5



Rozpatrujemy 30–cyfrowe liczby naturalne o sumie cyfr równej 6. Oznaczmy przez  $n$  liczbę tych spośród nich, w których zapisie dziesiętnym pierwsza cyfra jest parzysta, a wśród pozostałych są dokładnie 4 cyfry nieparzyste.

Wynika stąd, że:

☐  $n = \binom{29}{6}$

☐  $n = \binom{30}{4}$

☐  $n = \binom{29}{4}$

☐  $n = \binom{30}{6}$

## Ćwiczenie 6



Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi. Liczba  $\binom{58}{11}$  dzieli się przez:

☐ 24

☐ 29

☐ 23

☐ 25

## Ćwiczenie 7



Rozpatrujemy wszystkie funkcje ze zbioru  $A_k = \{1, 2, \dots, k\}$  wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które nie są większe od pewnej ustalonej liczby naturalnej  $k$ , do zbioru  $B_n = \{1, 2, \dots, n\}$  wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które nie są większe od pewnej ustalonej liczby naturalnej  $n$ .

Podane niżej liczby uporządkuj rosnąco.

Liczba funkcji malejących ze zbioru  $A_6$  do zbioru  $B_9$ .



Liczba funkcji malejących ze zbioru  $A_2$  do zbioru  $B_{10}$ .



Liczba funkcji malejących ze zbioru  $A_4$  do zbioru  $B_8$ .



Liczba funkcji malejących ze zbioru  $A_{10}$  do zbioru  $B_{12}$ .



## Ćwiczenie 8



Rozpatrujemy permutacje  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11})$  zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ .

Oznaczmy przez  $k$  liczbę tych spośród nich, które spełniają dwa następujące warunki:

- ciąg  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  jest rosnący,
- ciąg  $(a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11})$  jest malejący.

Zaznacz wszystkie nierówności stąd wynikające.

☐  $k < 252$

☐  $k > 120$

☐  $k < 330$

☐  $k > 210$

## Ćwiczenie 9



W pewnej grze losowej należy zaznaczyć na kuponie wybrane 5 liczb spośród 32 początkowych dodatnich liczb całkowitych. Na ile sposobów można wytypować 5 liczb w tej grze tak, aby nie było wśród nich dwóch kolejnych?

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Paweł Kwiatkowski

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Liczba podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego. Kombinacje

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

XI. Kombinatoryka

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rozpoznaje kombinacje w typowych doświadczeniach związanych z wyborami podzbiorów ustalonego zbioru,
- oblicza liczbę wyników doświadczeń stosując twierdzenia o liczbie kombinacji,
- opisuje z użyciem kombinacji zbiór wartości funkcji ściśle monotonicznej ze skończonego zbioru  $A$  do skończonego zbioru  $B$  ( $|A| \leq |B|$ ) i wyznacza liczbę wszystkich takich funkcji.

### **Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

### **Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- praca z ekspertem.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel przedstawia temat lekcji.
2. Uczniowie przypominają pojęcie kombinacji.
3. Nauczyciel określa wiążące dla uczniów kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Animacja”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie wskazane przez nauczyciela, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
3. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

**Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne przygotowując uzasadnienia poprawnych odpowiedzi.

**Materiały pomocnicze:**

- [Inne spojrzenie. Permutacje, kombinacje, wariacje](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Liczba podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego. Kombinacje”.