



Wykorzystanie własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Wykorzystanie własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych

Źródło: Adrian Lange, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W tej lekcji skupimy się na zastosowaniu potęgowania i pierwiastkowania w różnych dziedzinach życia i nauki. Zacniemy od najprostszych przykładów dotyczących połowicznego rozpadu pierwiastków oraz namnażania się bakterii. Później przejdziemy do zdefiniowania średnich, których być może do tej pory nie znałeś – okazuje się, że do pewnych zagadnień bardziej użyteczne niż średnia arytmetyczna są inne średnie.

Twoje cele

- Zastosujesz potęgowanie i pierwiastkowanie do obliczania średnich.
- Zastosujesz potęgowanie i pierwiastkowanie do rozwiązywania problemów z różnych dziedzin.

Przeczytaj

Zacniemy od rozważenia przykładu.

Przykład 1

W pewnej kolonii liczba bakterii na początku obserwacji wynosi 8. Liczba ta podwaja się co 12 godzin.



a) Wyznamy ile bakterii będzie znajdowało się w tej kolonii po 5 dobach.

Zauważmy, że 5 dób to $5 \cdot 24 = 120$ godzin. Ponieważ liczba bakterii podwaja się co 12 godzin, dojdzie do $120 : 12 = 10$ podwojeń, czyli liczba bakterii będzie równa $8 \cdot 2^{10} = 8 \cdot 1024 = 8192$.

b) Napiżemy wzór określający liczbę bakterii w tej kolonii po czasie x godzin.

Ponieważ liczba bakterii podwaja się co 12 godzin, więc w czasie x godzin dojdzie do $\frac{x}{12}$ podwojeń. Zatem liczba bakterii po czasie x godzin jest równa $8 \cdot 2^{\frac{x}{12}}$.

c) Oszacujemy, po jakim czasie w kolonii będzie znajdowało się ponad milion bakterii.

Możemy za x podstawiać kolejne liczby naturalne i obserwować, kiedy otrzymana liczba przekroczy milion ...

Możemy też zabrać się za rozwiązanie problemu bardziej algebraicznie.

Mamy do rozwiązania nierówność: $8 \cdot 2^{\frac{x}{12}} > 1000000$.

Zauważmy, że nierówność można podzielić przez 8:

$$2^{\frac{x}{12}} > 125000.$$

Ponieważ $2^{17} = 131072$, zaś $2^{16} = 65536$, więc $16 < \frac{x}{12} < 17$, czyli $192 < x < 204$.

Zatem liczba godzin potrzebna, aby populacja rozważanej kolonii przekroczyła milion to więcej niż 192, ale mniej niż 204, co oznacza, że stanie się to po ośmiu pełnych dobach, ale przed upłynięciem dziewiętej.

W powyższym przykładzie mamy do czynienia z przykładowym **wykładniczym modelem wzrostu populacji**. Jest to model bardzo prosty: zakłada nieograniczony dostęp do pożywienia oraz zerową śmiertelność. Ponadto jest to model zamknięty, czyli zakłada brak jakiegokolwiek ingerencji z zewnątrz. Matematycy od dawna zajmują się budowaniem modeli wzrostu populacji. Jednym z najstarszych i najbardziej znanych przykładów jest zadanie o królikach znajdujące się w dziele Leonarda z Pizy (Fibonacciego) „*Liber abaci*” z roku 1202, w którym po raz pierwszy rozważany jest tzw. [ciąg Fibonacciego](#).

W chemii stosuje się pojęcie **czasu połowicznego rozpadu/zaniku**. Zgodnie z definicją jest to czas, w którym liczba nietrwałych obiektów zmniejsza się o połowę. Początkowo pojęcie dotyczyło nietrwałych jąder atomowych pierwiastków promieniotwórczych, ale obecnie stosuje się je również dla nietrwałych cząstek. Oznacza się go zwykle przez $T_{1/2}$.

Przykład 2

Liczba jąder promieniotwórczych pewnego pierwiastka zmniejszyła się 256 razy w ciągu 140 dni. Obliczymy, jaki jest czas połowicznego rozpadu tego pierwiastka.

Założmy, że początkowa liczba jąder tego pierwiastka jest równa N_0 .

Zgodnie z treścią zadania po 140 dniach liczba jąder będzie równa $\frac{N_0}{256}$.

Z drugiej strony wiemy, że liczba N_0 zmniejsza się o połowę w czasie połowicznego rozpadu, czyli w czasie $T_{1/2}$.

W ciągu 140 dni dojdzie do $\frac{140}{T_{1/2}}$ takich rozpadów, zatem liczba jąder będzie równa $N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{140}{T_{1/2}}}$.

Stąd otrzymujemy równanie $\frac{N_0}{256} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{140}{T_{1/2}}}$.

Po podzieleniu każdej ze stron przez N_0 równanie przyjmie postać:

$$\frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{140}{T_{1/2}}}.$$

Ponieważ $\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$, więc mamy $\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{140}{T_{1/2}}}$.

Zatem $8 = \frac{140}{T_{1/2}}$, czyli $T_{1/2} = \frac{140}{8} = 17,5$.

Zatem czas połowicznego rozpadu tego pierwiastka to 17,5 dnia.

Przykład 3

Zapiszemy wyrażenie $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$ w prostszej postaci.

Oznaczmy $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$ przez S_9 oraz $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$ przez S_{10} .

Wówczas $S_{10} = S_9 + 2^{10}$.

Ponadto zauważmy, że

$$\begin{aligned} S_{10} &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} = \\ &= 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9) = 1 + 2S_9. \end{aligned}$$

Mamy zatem dwa równania:

$$S_{10} = S_9 + 2^{10} \text{ oraz } S_{10} = 1 + 2S_9.$$

Po porównaniu prawych stron obu równań, otrzymujemy $S_9 + 2^{10} = 1 + 2S_9$, co jest równoważne $S_9 = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$.

Procent składany

Niech K_0 będzie kwotą, którą składamy do banku na roczną lokatę z oprocentowaniem $p\%$ w skali roku. K_0 nazywamy kapitałem początkowym. Wówczas po pierwszym roku odsetki będą wynosiły $K_0 \cdot \frac{p}{100}$. Jeśli odsetki zostaną dopisane do lokaty (mówimy, że nastąpiła kapitalizacja odsetek), to na koncie będzie się znajdowała kwota $K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})$. Możemy zauważyć, że dopisanie odsetek do kwoty, od której te odsetki zostały obliczone, odpowiada pomnożeniu tej kwoty przez $(1 + \frac{p}{100})$. Zatem jeśli w drugim roku na lokacie znajdowała się kwota $K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})$, to po tym okresie na lokacie będzie znajdować się kwota $K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100}) \cdot (1 + \frac{p}{100}) = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^2$.

Analogiczne rozumowanie prowadzi nas do wniosku, że po n latach na lokacie będzie znajdować się kwota $K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$. Warunek jest jednak taki, że nie dochodzi do żadnych ingerencji: oprocentowanie się nie zmienia oraz pieniądze z lokaty nie są wybierane, a odsetki są dopisywane do lokaty. Z punktu widzenia klienta banku, lokata pracuje sama na siebie.

Przykład 4

Pan Adam złożył 1000 zł na lokatę roczną z oprocentowaniem 2% w skali roku, po czym lokatę tę zlikwidował i całą kwotę wraz z odsetkami złożył na lokatę roczną z oprocentowaniem 4% w skali roku. Pan Bogdan złożył 1000 zł na lokatę roczną z pewnym oprocentowaniem $p\%$ w skali roku, po czym całą kwotę wraz z odsetkami ponownie złożył na lokatę roczną z tym samym oprocentowaniem. Po dwóch latach obaj

panowie otrzymali takie same kwoty. Ile było równe oprocentowanie p lokaty pana Bogdana?



Obliczmy najpierw, jaką kwotę otrzymał po dwóch latach pan Adam.

Po pierwszym roku pan Adam wybierze z banku

$1000 + 0,02 \cdot 1000 = 1000 \cdot 1,02 = 1020$, zaś po drugim roku:

$1020 + 0,04 \cdot 1020 = 1020 \cdot 1,04 = 1060,8$.

Pan Bogdan po pierwszym roku będzie miał w banku

$1000 + \frac{p}{100} \cdot 1000 = 1000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$, zaś po drugim:

$1000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{p}{100} =$

$= 1000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 1000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$.

Ponieważ po dwóch latach obaj panowie otrzymali takie same kwoty, więc możemy zapisać równanie

$1060,8 = 1000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$.

Po podzieleniu każdej ze stron przez 1000 otrzymujemy $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1,0608$, co po spierwiastkowaniu daje $1 + \frac{p}{100} \approx 1,029951$.

Możemy odjąć od każdej ze stron liczbę 1 otrzymując $\frac{p}{100} \approx 0,029951$ oraz pomnożyć przez 100 uzyskując $p \approx 2,995$.

Poczyńmy pewne uwagi na temat powyższego zadania. Oprocentowanie p możemy nazwać oprocentowaniem średnim – zastępuje ono dwa różne roczne oprocentowania. Zauważmy, że p nie jest średnią arytmetyczną oprocentowań 2% i 4% (średnia arytmetyczna byłaby równa 3%, zaś p jest nieco mniejsze: $p \approx 2,995\%$). Można też zaobserwować, że $1 + p = \sqrt{(1 + 0,02) \cdot (1 + 0,04)}$.

Ogólnie liczbę $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ nazywamy **średnią geometryczną** dodatnich liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ i stosujemy między innymi w zadaniach dotyczących oprocentowania, inflacji oraz innych obliczeń procentowych.

Inflacja nazywamy spadek realnej wartości pieniądza, czyli równoważnie proces wzrostu przeciętnego poziomu cen w gospodarce. Na przykład roczna inflacja 2% oznacza, że ceny w ciągu danego roku kalendarzowego wzrosły o 2%. Innymi słowy produkt, który na początku roku kosztował x , pod koniec tego roku kosztuje $1,02x$.

Przykład 5

Inflacja w pewnym kraju była równa w kolejnych latach 2%, 3%, 5%. Jaka jest średnia roczna inflacja w ciągu tych trzech lat?

Możemy skorzystać ze średniej geometrycznej. Średnia inflacja i spełnia zależność

$$1 + i = \sqrt[3]{(1+0,02)(1+0,03)(1+0,05)}.$$

Otrzymujemy kolejno:

$$1 + i = \sqrt[3]{1,02 \cdot 1,03 \cdot 1,05}$$

$$1 + i \approx 1,03325$$

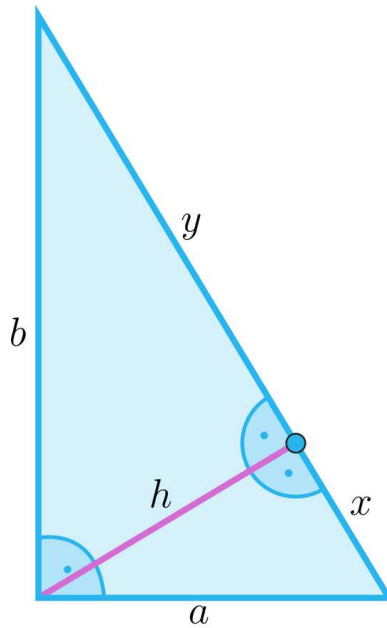
$$i \approx 0,03325$$

Zatem średnia roczna **inflacja** w ciągu tych trzech lat jest równa około 3,325%.

Średnia geometryczna ma również liczne zastosowania w geometrii.

Wysokość trójkąta prostokątnego

Rozważmy trójkąt prostokątny, w którym poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do każdego z trzech trójkątów prostokątnych otrzymujemy następujące równania:

$$\begin{cases} h^2 + y^2 = b^2 \\ h^2 + x^2 = a^2 \\ a^2 + b^2 = (x + y)^2 \end{cases}$$

Ponadto $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$, zatem układ przyjmuje postać:

$$\begin{cases} h^2 + y^2 = b^2 \\ h^2 + x^2 = a^2 \\ a^2 + b^2 = x^2 + 2xy + y^2 \end{cases}$$

Z dwóch pierwszych równań mamy $b^2 = h^2 + y^2$ i $a^2 = h^2 + x^2$, co możemy podstawić do ostatniego równania:

$$a^2 + b^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$h^2 + x^2 + h^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Teraz możemy od obu stron powyższego równania odjąć x^2 oraz y^2 otrzymując:

$$2h^2 = 2xy$$

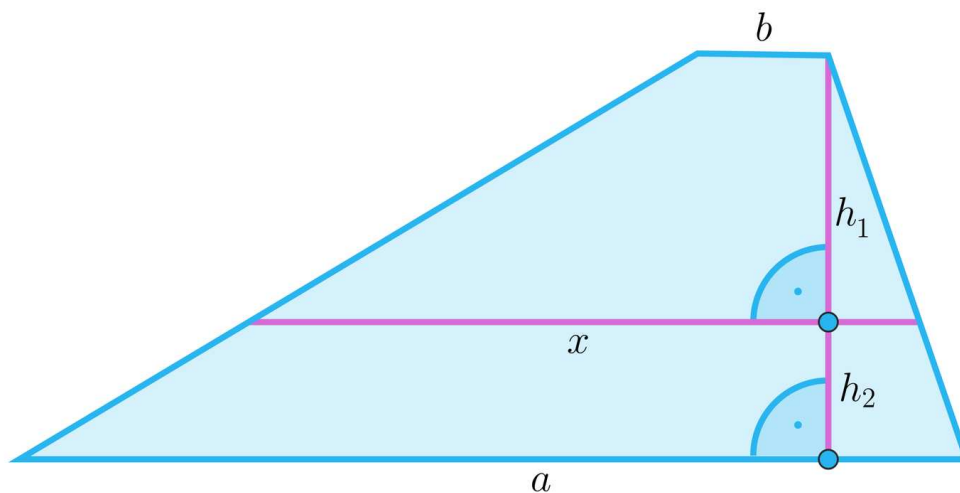
$$h^2 = xy$$

$$h = \sqrt{xy}$$

Zatem wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną długości odcinków od spodka tej wysokości do końców przeciwprostokątnej.

Odcinek dzielący trapez na dwa trapezy o równych polach

Rozważmy trapez o podstawach a , b . Chcemy obliczyć długość x odcinka o końcach należących do ramion trapezu, równoległego do podstaw i dzielącego rozważany trapez na dwa trapezy o równych polach. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Pole rozważanego trapezu jest równe $P = \frac{a+b}{2} \cdot (h_1 + h_2)$, zaś pola nowopowstałych trapezów są równe $P_a = \frac{a+x}{2} \cdot h_2$ oraz $P_b = \frac{b+x}{2} \cdot h_1$.

Ponadto zachodzą zależności $P_a = P_b$ oraz $P = 2 \cdot P_a$. Po podstawieniu odpowiednich wyrażeń otrzymujemy równości:

$$\frac{a+x}{2} \cdot h_2 = \frac{b+x}{2} \cdot h_1, \text{ co po przekształceniu daje } \frac{h_1}{h_2} = \frac{a+x}{b+x}, \text{ oraz}$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot (h_1 + h_2) = 2 \cdot \frac{a+x}{2} \cdot h_2, \text{ co po przekształceniu daje } \frac{h_1+h_2}{h_2} = 2 \cdot \frac{a+x}{a+b}, \text{ czyli}$$

$$\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_2}{h_2} = 2 \cdot \frac{a+x}{a+b}, \text{ więc } \frac{h_1}{h_2} + 1 = 2 \cdot \frac{a+x}{a+b}.$$

Zatem mamy dwa równania:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a+x}{b+x} \text{ oraz } \frac{h_1}{h_2} + 1 = 2 \cdot \frac{a+x}{a+b}.$$

Z drugiego równania wynika, że $\frac{h_1}{h_2} = 2 \cdot \frac{a+x}{a+b} - 1$, czyli

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{h_1}{h_2} = 2 \cdot \frac{a+x}{a+b} - 1.$$

Stąd wynika równanie:

$$\frac{a+x}{b+x} = 2 \cdot \frac{a+x}{a+b} - 1.$$

Z powyższego równania wyznaczamy x . Najpierw mnożymy każdą ze stron przez $(b+x)(a+b)$ otrzymując:

$$(a+x)(a+b) = 2 \cdot (a+x)(b+x) - (b+x)(a+b)$$

Po opuszczeniu nawiasów mamy:

$$a^2 + ab + ax + bx = 2ab + 2ax + 2bx + 2x^2 - ab - ax - bx - b^2$$

$$a^2 = 2x^2 - b^2$$

$$a^2 + b^2 = 2x^2$$

$$x^2 = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Ponieważ liczby a, b, x są dodatnie jako długości boków, więc $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Ogólnie wyrażenie $K_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}$ nazywamy **średnią kwadratową** nieujemnych liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Słownik

ciąg Fibonacciego

ciąg liczbowy, który można zdefiniować rekurencyjnie $f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; innymi słowy: pierwszy i drugi wyraz ciągu Fibonacciego są równe 1, zaś każdy następny jest sumą dwóch poprzednich

procent składany

sposób oprocentowania wkładu pieniężnego polegający na tym, że odsetki za dany okres oprocentowania są doliczane do wkładu (podlegają kapitalizacji) i w ten sposób „składają się” na zysk wypracowywany w okresie następnym; zastosowanie reguły procentu składanego daje szybszy wzrost wartości kapitału niż zastosowanie procentu prostego; im częstsza kapitalizacja, tym kapitał wzrasta szybciej

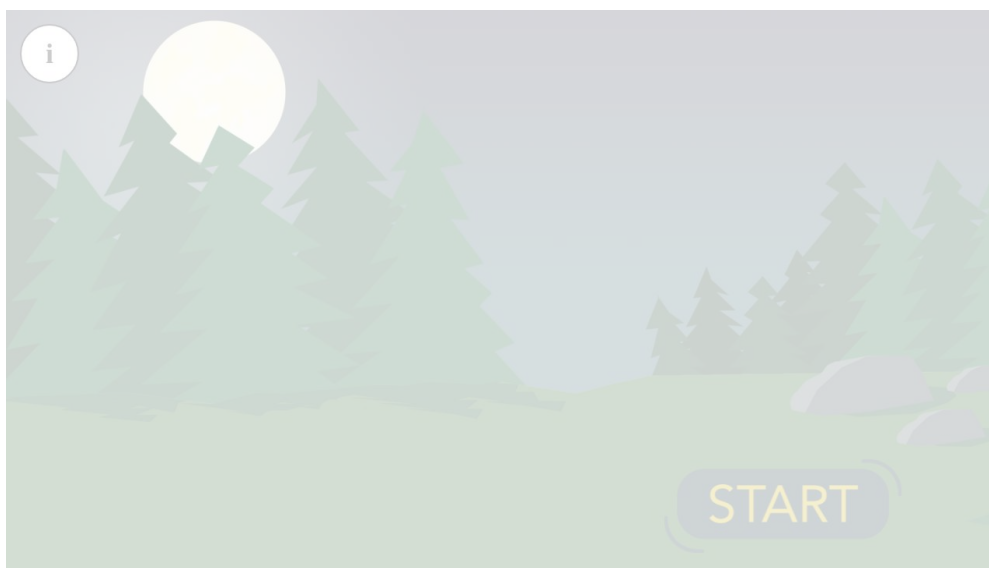
inflacja

proces wzrostu przeciętnego poziomu cen w gospodarce; skutkiem tego procesu jest spadek siły nabywczej pieniądza krajowego

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę sprawdzającą, czy potrafisz stosować własności potęg i pierwiastków do rozwiązywania zadań z różnych dziedzin życia i nauki. Na pierwszym poziomie otrzymasz pytania z zakresu własności potęgowania i pierwiastkowania oraz stosowania potęg i pierwiastków w geometrii. Na drugim poziomie otrzymasz pytania z zakresu wykorzystania potęg i pierwiastków w obliczeniach bankowych oraz w chemii i biologii. Powodzenia!



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DgU0IV13q>

Polecenie 2

Ułóż cztery pytania związane z zagadnieniami omawianymi w tej lekcji. Zadaj je koledze z klasy. Odpowiedz na pytania ułożone przez niego. Kto odpowiedział na więcej pytań?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Liczba bakterii w kolonii na początku jest równa 5. Liczba ta podwaja się co 6 godzin. Odpowiedz na następujące pytania. Możesz użyć kalkulatora. Wpisz poprawne liczby.

Pytanie	Odpowiedź
Ile bakterii będzie w kolonii po 30 godzinach?	
Ile bakterii będzie w kolonii po 4 dobach?	
Po ilu godzinach w kolonii będzie 1280 bakterii?	
Po ilu dobach w kolonii będzie 20480 bakterii?	

Ćwiczenie 2



Czas połowicznego rozpadu izotopu jodu ^{131}I jest równy 8 dni. Wyznacz najmniejszą liczbę dni, po upływie których z 1 g pozostanie nie więcej niż 0,125 g tego pierwiastka.

Ćwiczenie 3



Bez użycia kalkulatora zapisz w najprostszej postaci wyrażenie

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6.$$

Ćwiczenie 4



Rozwiąż test.

Po roku odsetki od lokaty w wysokości 1500 zł z oprocentowaniem rocznym 1,5% będą równe:

☐ 225 zł

☐ 2,25 zł

☐ 22,5 zł

Ćwiczenie 5



W tabeli podano inflacje w kolejnych latach. W każdym przypadku wyznacz inflację średnią. Przeciągnij i upuść.

$i_1 = 2\%, i_2 = 4\%, i_1 = 1\%, i_2 = 5\%, i_1 = 2\%, i_2 = 3\%, i_3 = 4\%,$
 $i_1 = 1\%, i_2 = 2\%, i_3 = 4\%, i_4 = 5\%, i_1 = 1\%, i_2 = 2\%, i_3 = 3\%, i_4 = 4\%, i_5 = 5\%$

Inflacje roczne w kolejnych latach	Przybliżona inflacja średnia
$i_1 = 2\%, i_2 = 4\%$	
$i_1 = 1\%, i_2 = 5\%$	
$i_1 = 2\%, i_2 = 3\%, i_3 = 4\%$	
$i_1 = 1\%, i_2 = 2\%, i_3 = 4\%, i_4 = 5\%$	
$i_1 = 1\%, i_2 = 2\%, i_3 = 3\%, i_4 = 4\%, i_5 = 5\%$	

Ćwiczenie 6



Z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku wyznacz średnie podanych zestawów liczb. Która średnia jest najmniejsza, a która największa w każdym przypadku. Możesz użyć kalkulatora. Przeciągnij poprawne liczby.

2, 8, 1, 3, 9, 1, 2, 3, 4, 2, 2, 3, 4

Zestaw danych	Średnia kwadratowa	Średnia arytmetyczna
Średnia geometryczna		
2, 8		
1, 3, 9		
1, 2, 3, 4		
2, 2, 3, 4		

Ćwiczenie 7



Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Spodek wysokości w trójkącie prostokątnym podzielił przeciwprostokątną na odcinki o długościach 1,8 i 3,2. Wówczas:

Długość tej wysokości to 2,4. Jest to trójkąt egipski. Jest to trójkąt pitagorejski.

Podstawy trapezu są równe 12 i $2\sqrt{14}$. Odcinek dzielący ten trapez na dwa trapezy o równych polach, którego końce zawarte są w ramionach tego trapezu ma długość:
10 $10\sqrt{2}$ 20

Dany jest trójkąt o bokach 5, $\frac{25}{3}$, $\frac{20}{3}$. Wysokość poprowadzona do boku o długości $\frac{25}{3}$ dzieli ten bok na odcinki długości:

3 $\frac{16}{3}$ 4

Dany jest trapez o ramionach długości $\sqrt{17}$ i 5. Jedna z podstaw ma długość 6, zaś wysokość to 4. Odcinek o końcach zawartych w ramionach trapezu dzielący go na dwa trapezy o równych polach może mieć długość:

$\sqrt{50}$ $\sqrt{26}$ $\sqrt{68}$

Ćwiczenie 8



Rozwiąż zadania:

a) Pan Janusz znalazł bardzo korzystny sposób inwestowania z oprocentowaniem rocznym w wysokości 10% i roczną kapitalizacją odsetek. Zainwestował więc pewną kwotę i po pięciu latach wraz z odsetkami otrzymał 4831,53 zł. Jaką kwotę zainwestował pan Stefan?

b) Pani Grażyna założyła lokatę z oprocentowaniem 4% w skali roku i roczną kapitalizacją odsetek. Kwota, którą zainwestowała to 5000 zł. Po kilku latach zamknęła lokatę i otrzymała z tego tytułu kwotę 6842,85 zł. Ile lat pieniądze znajdowały się na lokacie?

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje potęgowanie i pierwiastkowanie do obliczania średnich,
- stosuje potęgowanie i pierwiastkowanie do rozwiązania problemów z różnych dziedzin.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- giełda pomysłów;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Wykorzystanie własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie grają w grę edukacyjną, Ci którzy uzyskali najlepsze wyniki mogą otrzymać oceny za aktywność.
3. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wykorzystanie własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych”).

Materiały pomocnicze:

- [Potęga o wykładniku wymiernym](#)
- [Działania na pierwiastkach](#)

Wskazówki metodyczne:

Grę edukacyjną można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału z własności potęgowania i pierwiastkowania.d