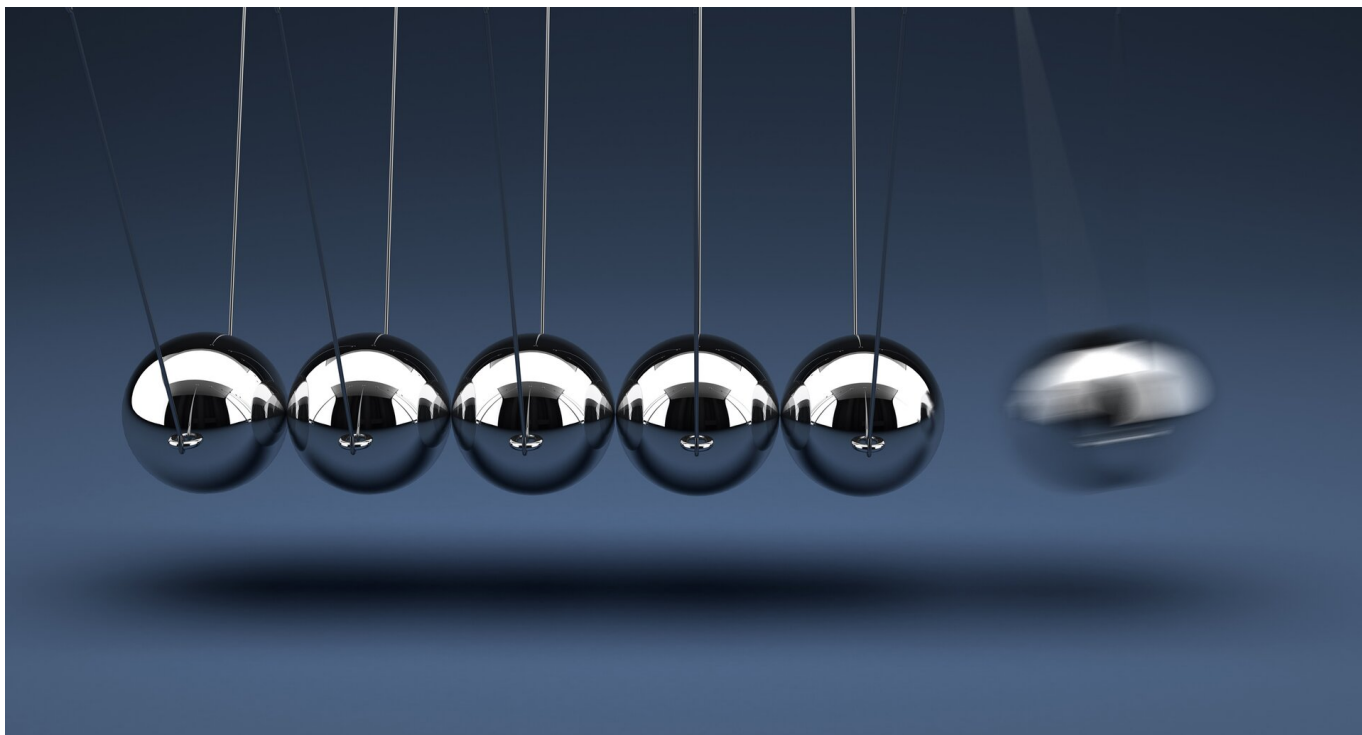
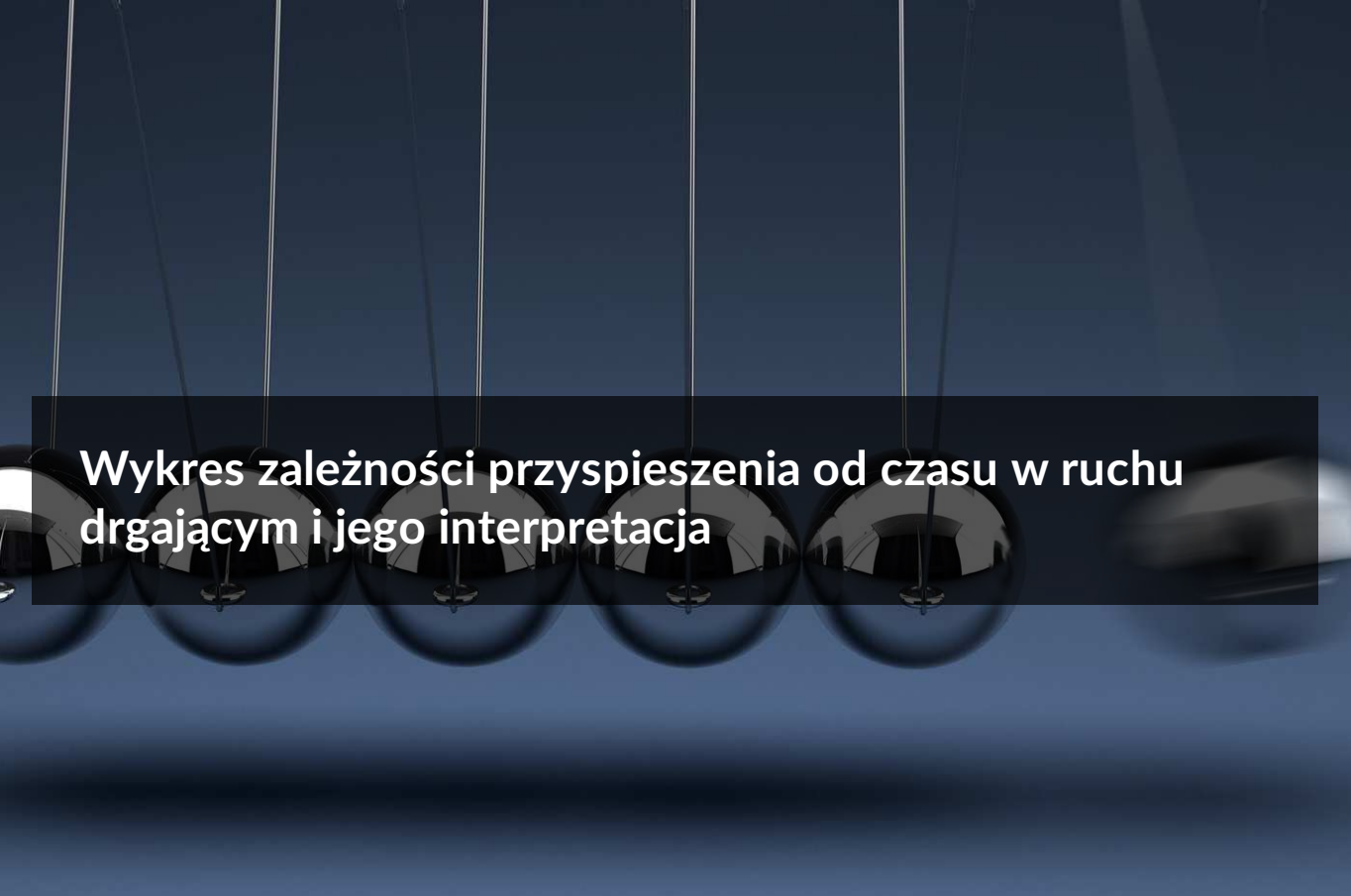




Wykres zależności przyspieszenia od czasu w ruchu drgającym i jego interpretacja

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykres zależności przyspieszenia od czasu w ruchu drgającym i jego interpretacja

Źródło: dostępny w internecie: <https://www.istockphoto.com/pl/zdjęcie/kołyska-newtona-gm465044128-59504348> [dostęp 26.05.2022], iStockphoto, tylko do użytku edukacyjnego na zpe.gov.pl.

Czy to nie ciekawe?

Wykresy są bardzo ważnym narzędziem do prezentacji i analizy zależności między różnymi wielkościami fizycznymi. Przedstawienie wyników pomiarów, modelowania i symulacji na wykresie ułatwia zrozumienie interpretację analizowanego zjawiska.

Przyspieszenie należy do podstawowych wielkości fizycznych, które są zwykle mierzone przy badaniu wpływu narażenia pracownika na drgania mechaniczne na stanowisku pracy.



Rys. a. Mała zagęszczarka płytowa. [Źródło: U.S. Navy photo by Mass Communication Specialist 3rd Class Patrick W. Mullen III]

Źródło: dostępny w internecie: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:US_Navy_071217-N-8547M-043_uilder_2nd_Class_Lance_D._Fairchild_of_Naval_Mobile_Construction_Battalion_\(NMCB\)_5_packs_the_loose_dirt_after_setting_the_elevation_for_footers.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:US_Navy_071217-N-8547M-043_uilder_2nd_Class_Lance_D._Fairchild_of_Naval_Mobile_Construction_Battalion_(NMCB)_5_packs_the_loose_dirt_after_setting_the_elevation_for_footers.jpg) [dostęp 26.05.2022], domena publiczna.

Informacje o stosowanych metodach i dopuszczalnych normach można znaleźć między innymi w opracowaniach Centralnego Instytutu Ochrony Pracy.

Zwykle drgania są bardzo złożone, ale ich rozkład na składowe o różnych częstotliwościach umożliwia obserwację wykresów podstawowych wielkości fizycznych stosowanych do opisu oscylatorów harmoniczych. W ruchu harmonicznym zależność położenia i prędkości od czasu opisane są funkcjami trygonometrycznymi (sinus lub cosinus). A jak zmienia się przyspieszenie podczas tego ruchu?

Twoje cele

W tym e-materiale:

- poznasz zależność przyspieszenia od czasu ciała poruszającego się ruchem harmonicznym,
- poznasz wykres zależności przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym,
- nauczysz się tworzyć wykresy zależności przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym dla różnej amplitudy, częstotliwości i fazy początkowej drgań,
- nauczysz się analizować i interpretować wykresy zależności przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym,
- znajdziesz podobieństwa i różnice między wykresami zależności położenia, prędkości i przyspieszenia od czasu dla oscylatora harmonicznego.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Położenie ciała poruszającego się ruchem drgającym zazwyczaj opisuje się wybierając za punkt odniesienia położenie równowagi ciała. Gdy drgania zachodzą wzdłuż osi Ox , a $x = 0$ odpowiada położeniu równowagi, zależność położenia od czasu w ruchu harmonicznym opisuje wyrażenie

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

gdzie A – amplituda drgań, ω – **częstość kołowa**, $(\omega t + \varphi)$ – **faza drgań** wyrażona w **radianach**, a φ – faza początkowa, czyli faza drgań dla $t = 0$.

Zależność przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym opisuje funkcja

$$a_x(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi),$$

widać więc, że przyspieszenie i wychylenie są związane warunkiem

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t),$$

wektor przyspieszenia ma więc w każdej chwili czasu zwrot przeciwny do wychylenia. Maksymalna wartość przyspieszenia, nazywana też amplitudą przyspieszenia, jest równa

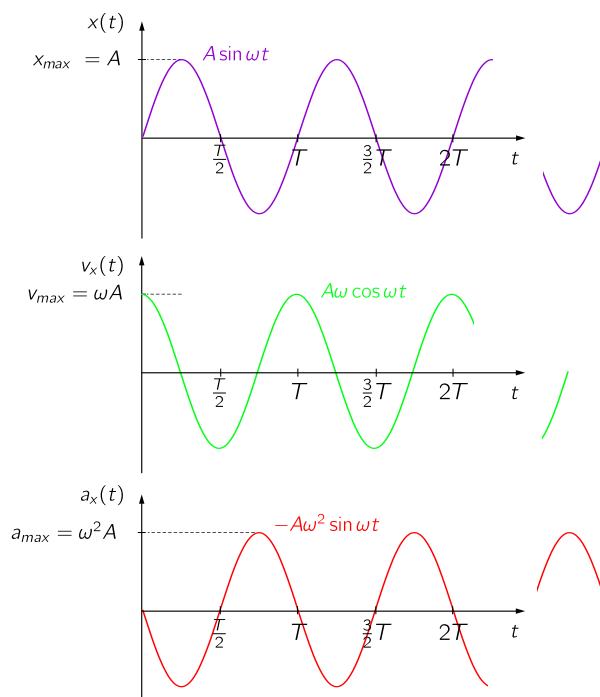
$$a_{\max} = \omega^2 A.$$

Jest ona proporcjonalna do amplitudy drgań i kwadratu częstości kołowej drgań $\omega = 2\pi f$, gdzie f oznacza częstotliwość drgań.

Gdy faza początkowa jest równa zeru, to

$$a_x(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t).$$

Ciekawe jest porównanie przebiegu wykresów wychylenia, współrzędnej prędkości i przyspieszenia tego samego **oscylatora harmonicznego** (Rys. 1.). Można zauważyć, że prędkość jest przesunięta w fazie w stosunku do wychylenia o $\pi/2$, a przyspieszenie o π .



Rys. 1. Wykres zależności wychyleń, prędkości i przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym wzdłuż osi Ox dla fazy początkowej równej zero.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Gdy faza początkowa jest równa $\pi/2$, to w chwili początkowej wychylenie jest równe amplitudzie drgań i ciało porusza się w stronę położenia równowagi. Zależność wychyleń, prędkości przyspieszenia od czasu opisują funkcje

$$x(t) = A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos \omega t,$$

$$v_x(t) = A\omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -A\omega \sin \omega t,$$

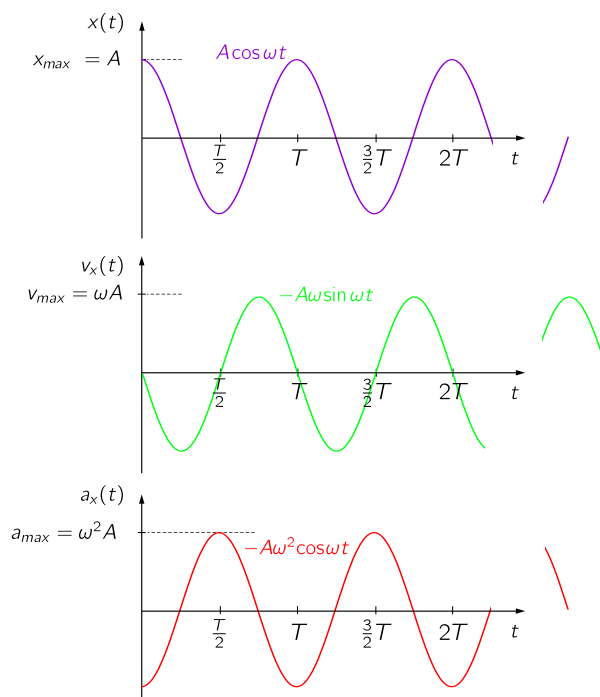
$$a_x(t) = -A\omega^2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -A\omega^2 \cos \omega t,$$

a uproszczenia polegały na skorzystaniu ze wzorów redukcyjnych:

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha,$$

$$\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \alpha.$$

Wykresy tych zależności przedstawia Rys. 2.



Rys. 2. Wykres zależności wychyleń, prędkości i przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym wzdłuż osi OX dla fazy początkowej równej $\pi/2$

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

W ogólności, gdy faza początkowa jest różna od zera, wykresy $x(t)$, $v(t)$ i $a(t)$ są przesunięte wzdłuż osi czasu w kierunku przeciwnym do znaku φ . Gdy $\varphi > 0$, to wykresy są przesunięte przeciwnie do kierunku osi czasu, a gdy $\varphi < 0$ - zgodnie z jej kierunkiem.

Przykład 1.

Zapisz wyrażenie opisujące zależność przyspieszenia od czasu oscylatora harmonicznego o amplitudzie $A = 0,05 \text{ m}$, okresie $T = 1 \text{ s}$ i fazie początkowej $\pi/2$. Przedstaw tę zależność na wykresie.

Częstość kołowa z definicji równa jest $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad/s}$

Amplituda przyspieszenia wynosi

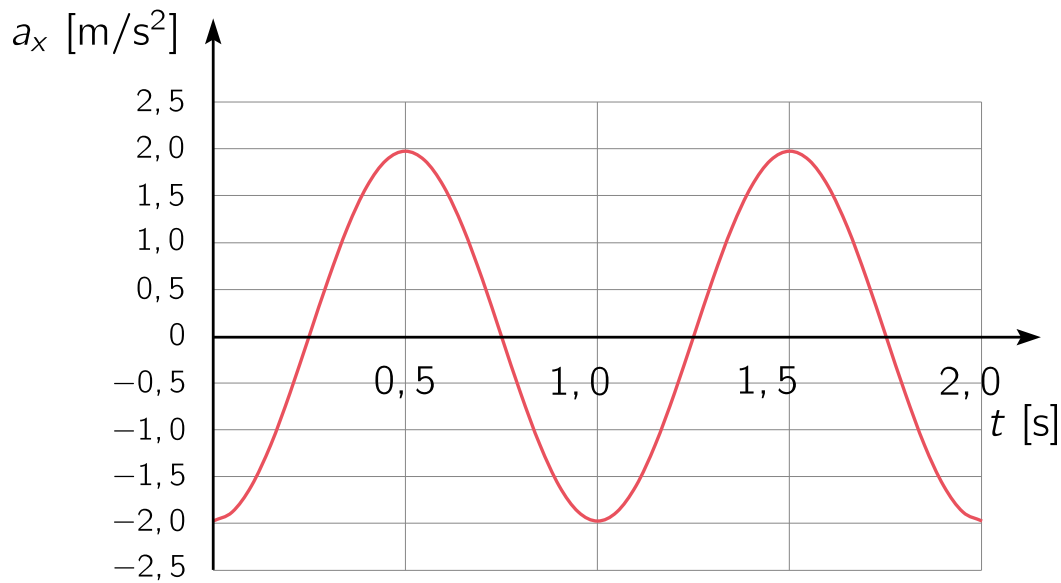
$$a_{max} = \omega^2 A = 4\pi^2 (\text{rad/s})^2 \cdot 0,05 \text{ m} = 0,2\pi^2 \text{ m/s}^2 \approx 2 \text{ m/s}^2$$

Zależność przyspieszenia od czasu dla fazy początkowej $\pi/2$ ma postać

$$a(t) = -A\omega^2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -A\omega^2 \cos(\omega t).$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$a(t) = -2\text{ms}^{-2} \cos((2\pi/\text{s})t).$$



Rys. 3. Wykres zależności współrzędnej x przyspieszenia od czasu.

Przykład 2.

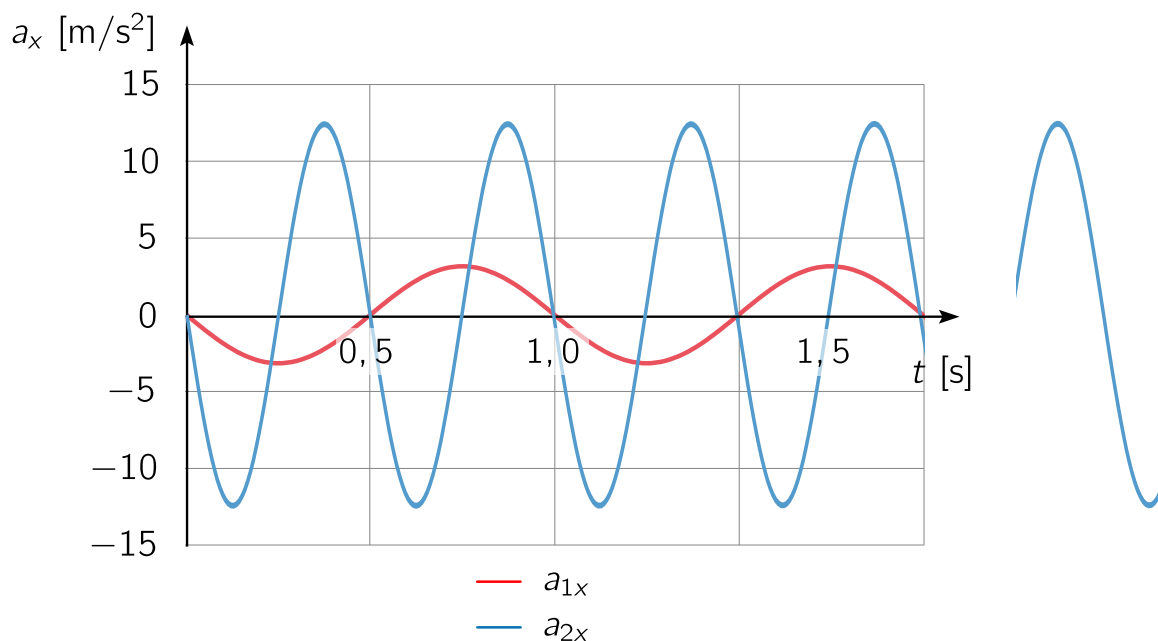
Zapisz równania i narysuj na jednym układzie współrzędnych wykresy zależności przyspieszenia od czasu dla dwóch oscylatorów harmoniczných o tej samej amplitudzie drgań $A = 0,08 \text{ m}$ i fazie początkowej $\varphi = 0$, ale różnych częstotliwościach: $f_1=1\text{Hz}$ i $f_2=2\text{Hz}$.

Ponieważ częstotliwość jest odwrotnością okresu, to częstość kołowa wynosi $\omega = 2\pi f$.

Maksymalna wartość przyspieszenia oscylatora o częstotliwości f_1 wynosi więc

$$a_{max1} = \omega_1^2 A = (2\pi f_1)^2 A = 4\pi^2 (\text{rad/s})^2 \cdot 0,08 \text{ m} \approx 3,2 \text{ m/s}^2,$$

a dla f_2 - czterokrotnie więcej, ponieważ jest to wielkość proporcjonalna do kwadratu częstości kołowej.



Rys. 4. Wykresy zależności przyspieszenia od czasu dla dwóch oscylatorów o tej samej amplitudzie i fazie początkowej, a różnych częstotliwościach drgań ($f_2 = 2f_1$)

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Oscylator o dwa razy większej częstotliwości ma dwa razy krótszy okres drgań i cztery razy większą maksymalną wartość przyspieszenia.

Słowniczek

W ruchu harmonicznym zależność wychylenia, prędkości i przyspieszenia od czasu są opisane funkcją trygonometryczną (sinus lub cosinus):

$$x(t) = A \sin (\omega t + \varphi),$$

$$v_x(t) = \omega A \cos (\omega t + \varphi),$$

$$a_x(t) = -\omega^2 A \sin (\omega t + \varphi).$$

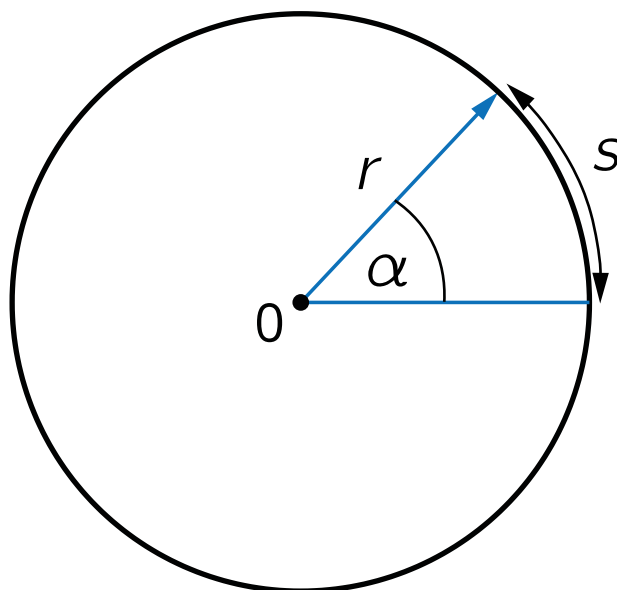
gdzie A – amplituda drgań, ω – częstość kołowa, φ – faza początkowa drgań.

faza drgań

(ang. phase) - argument funkcji sinus lub cosinus opisującej drgania, wyrażony w radianach, czyli $(\omega t + \varphi)$.

radian

(ang. radian) - ozn. rad - „jednostka” kąta w układzie SI.



Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>

Kąt α w radianach (zwany kątem w mierze łukowej) jest zdefiniowany jako stosunek długości łuku s opartego na tym kącie do promienia łuku r ,

$$\alpha = \frac{s}{r}.$$

Kąt jest równy jednemu radianowi, gdy długość łuku jest równa jego promieniowi. Kąt pełny jest równy 2π rad, a więc 1 rad to ok. 57 stopni. Widać, że kąt jest wielkością bezwymiarową (jako iloraz dwóch długości), stąd cudzysłów przy określeniu radiana jako jednostki miary kąta.

częstość kołowa drgań

(ang. angular frequency) - ozn. ω , jest odpowiednikiem prędkości kątowej w ruchu jednostajnym po okręgu. Jednostką częstości kołowej w układzie SI jest rad/s.

oscylator harmoniczny

(ang. harmonic oscillator) - ciało poruszające się ruchem harmonicznym.

Symulacja interaktywna

Wykres zależności przyspieszenia od czasu w ruchu drgającym i jego interpretacja

Symulacja generuje wykres zależności przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym. Pokazuje, jak zmienia się ten wykres przy zmianie amplitudy i częstotliwości drgań.

Obserwuj ruch drgający punktu i odpowiadający mu wykres zależności przyspieszenia od czasu. W dowolnej chwili możesz zatrzymać symulację i ponownie ją uruchomić.

Polecenie 1

Przeanalizuj wykresy położenia i przyspieszenia obiektu. Jaki związek między tymi krzywymi możesz zaobserwować?

Polecenie 2

Jaki wpływ ma wydłużenie okresu drgań na amplitudę przyspieszenia?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wykres przyspieszenia w funkcji czasu w ruchu harmonicznym opisuje zależność

$$a_x(t) = -[0, 1 \text{ m/s}^2] \sin(4\pi t/\text{s})$$

Uzupełnij zdanie, wpisując odpowiednie wartości.

Maksymalna wartość przyspieszenia jest równa m/s^2 , a częstotliwość Hz.

Ćwiczenie 2



Uczniowie omawiali zmiany przyspieszenia ciała poruszającego się ruchem harmonicznym. Wskaż, które z poniższych stwierdzeń są poprawne.

- ☐ Maksymalna wartość przyspieszenia jest wprost proporcjonalna do amplitudy i częstotliwości drgań.
- ☐ Przyspieszenie osiąga maksymalną wartość przy przejściu ciała przez położenie równowagi.
- ☐ Przyspieszenie osiąga maksymalną wartość przy maksymalnym wychyleniu.
- ☐ Maksymalna wartość przyspieszenia jest wprost proporcjonalna do amplitudy i kwadratu częstotliwości drgań.

Ćwiczenie 3



Ciężarek zawieszony na sprężynie porusza się ruchem harmonicznym z amplitudą $A = 6,0 \text{ cm}$ i częstotliwością $f = 1,5 \text{ Hz}$. Ile wynosi maksymalna wartość przyspieszenia tego ciężarka? Wynik podaj w m/s^2 z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.

Odpowiedź: m/s^2

Ćwiczenie 4



Ciało porusza się ruchem harmonicznym, którego zależność wychylenia od czasu opisuje funkcja

$$x(t) = (0,2\text{ms}^{-2}) \sin(3\pi t/\text{s} + \frac{\pi}{2})$$

Zależność przyspieszenia tego ciała od czasu przedstawia wyrażenie:

☐ $-(1,8\pi^{-2}\text{ms}^{-2}) \sin(3\pi t/\text{s} + \pi/4)$

☐ $-(0,6\pi\text{ms}^{-1}) \sin(3\pi t/\text{s} + \pi/2)$

☐ $(0,9\pi\text{ms}^{-1}) \cos(3\pi t/\text{s} + \pi/2)$

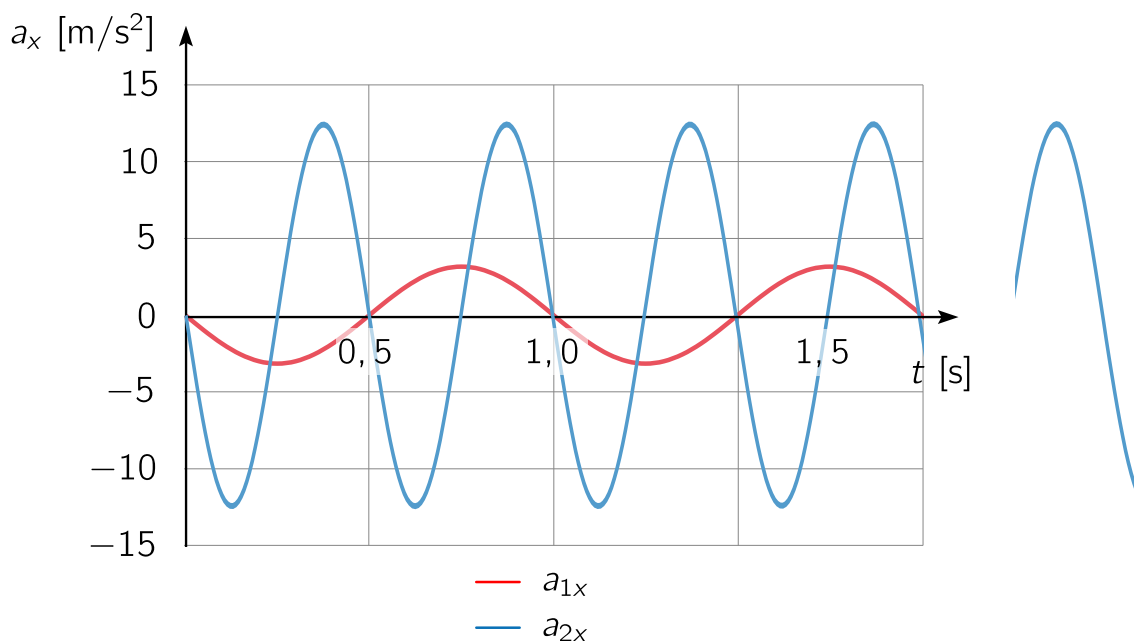
☐ $-(1,8\pi^2\text{ms}^{-2}) \sin(3\pi t/\text{s} + \pi/2)$

Ćwiczenie 5



Na rysunku przedstawiono wykresy zależności przyspieszenia od czasu dla dwóch oscylatorów harmoniczných.

Maksymalna wartość przyspieszenia drugiego oscylatora (a_2) jest cztery razy większa niż pierwszego (a_1), gdyż drugi oscylator

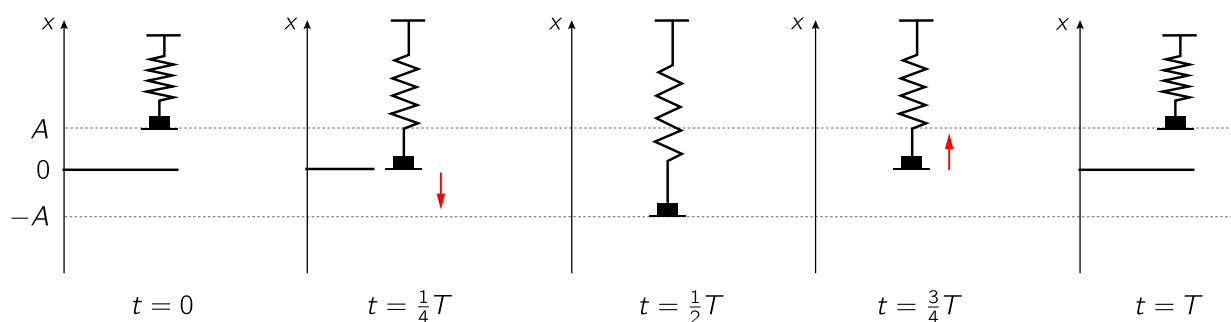


- ☐ ma dwa razy dłuższy okres drgań
- ☐ ma dwa razy krótszy okres drgań
- ☐ ma cztery razy mniejszą amplitudę drgań
- ☐ ma cztery razy większą amplitudę drgań

Ćwiczenie 6

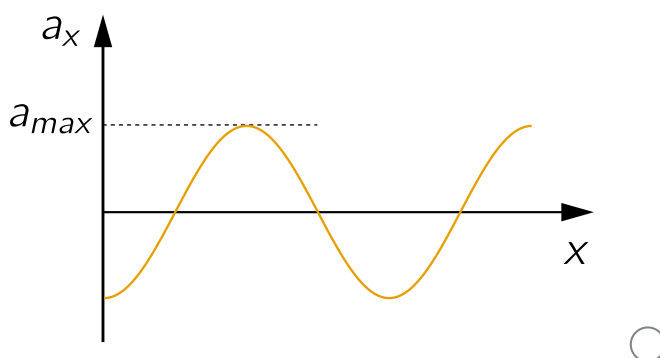
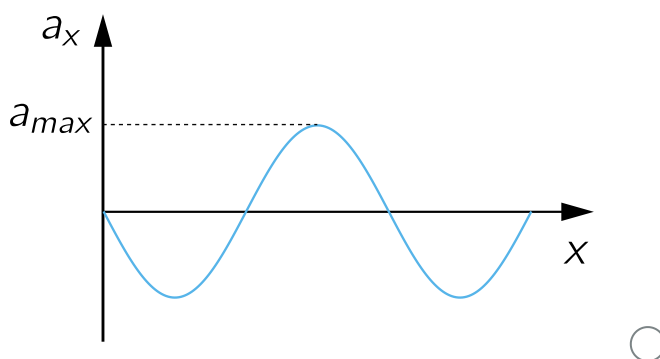


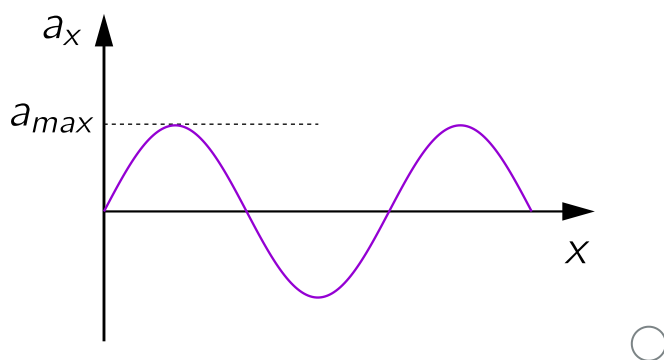
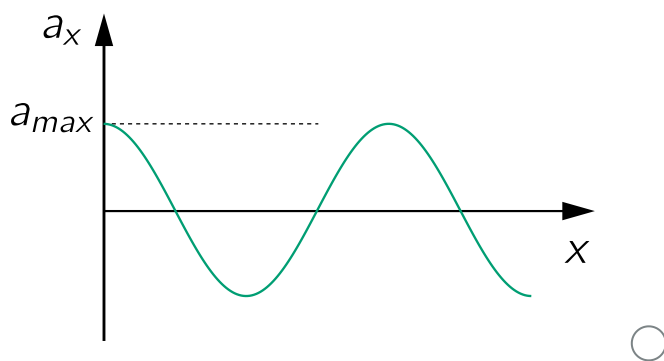
Na rysunku przedstawiono położenia drgającego ciężarka zawieszonego na sprężynie, zanotowane co $1/4$ okresu drgań.



Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

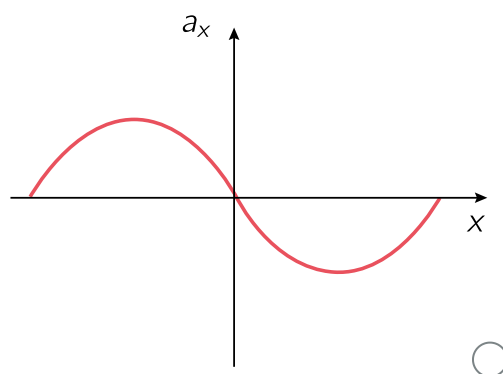
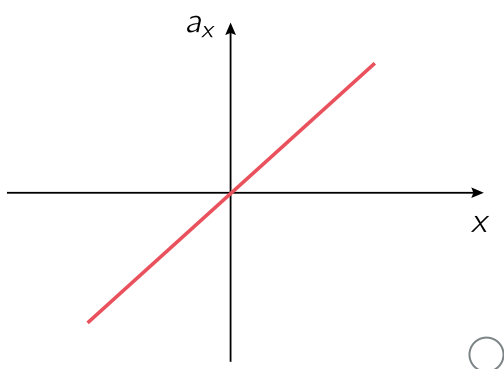
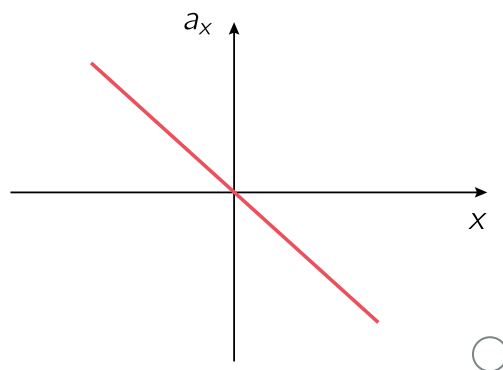
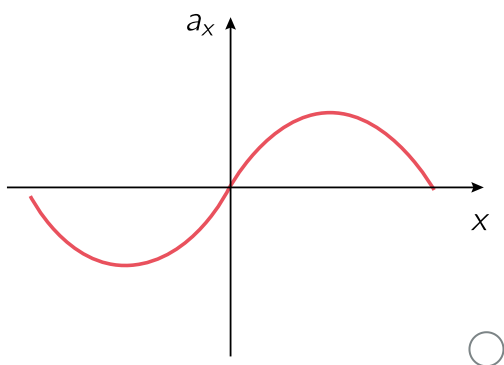
Który z poniższych wykresów poprawnie przedstawia zależność przyspieszenia tego ciężarka od czasu?





Ćwiczenie 7

Który z poniższych wykresów poprawnie przedstawia zależność współrzędnej przyspieszenia oscylatora harmonicznego od jego wychylenia?



Ćwiczenie 8



Oblicz wartość przyspieszenia oscylatora harmonicznego o amplitudzie 0,1 m i częstotliwości 2 Hz w chwili, gdy jego wychylenie jest równe połowie amplitudy. Wynik podaj z dokładnością do jednej cyfry znaczącej.

Odpowiedź: m/s²

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Elżbieta Kawecka
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Wykres zależności przyspieszenia od czasu w ruchu drgającym
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia - wymagania ogólne I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. Zakres rozszerzony Treści nauczania - wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 6) tworzy teksty, tabele, diagramy lub wykresy, rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk bądź problemu; właściwie skaluje, oznacza i dobiera zakresy osi; V. Drgania. Uczeń: 4) analizuje zależności położenia, prędkości i przyspieszenia od czasu dla ciała w ruchu drgającym harmonicznym oraz interpretuje wykresy tych zależności.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. podaje zależność matematyczną i wykres przyspieszenia od czasu ciała poruszającego się ruchem harmonicznym, 2. interpretuje wykresy zależności przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym, 3. wymienia podobieństwa i różnice między wykresami położenia, prędkości i przyspieszenia oscylatora harmonicznego.
Strategie nauczania:	formative feedback - kształtująca (ucząca) informacja zwrotna lub ocenianie kształtujące
Metody nauczania:	Praca z wykorzystaniem multimediiów, analiza pomysłów.
Formy zajęć:	- praca w parach, - praca indywidualna.
Środki dydaktyczne:	Animacja/ model 3D „Wykres zależności prędkości od czasu w ruchu drgającym i jego interpretacja”, zestaw zadań interaktywnych.
Materiały pomocnicze:	e-materiały: Cechy ruchu harmonicznego, Wykres zależności położenia od czasu i jego interpretacja.
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Zaciekawienie (pogadanka wstępna): nauczyciel omawia rolę i znaczenie badania wykresów w analizowaniu zależności między różnymi wielkościami fizycznymi. Podaje przykłady. Rozpoznanie wiedzy wyjściowej uczniów w kontekście realizowanego tematu oraz nawiązanie do tej wiedzy. Pytania skierowane do uczniów: - Naskicuj wykres zależności położenia od czasu ciała poruszającego się ruchem harmonicznym. - Wymień i zdefiniuj wielkości fizyczne stosowane do opisu ruchu drgającego. - Omów zależność wychylenia od czasu w ruchu harmonicznym.	
Faza realizacyjna:	

- Nauczyciel omawia sposób pracy i zadania uczniów.
- Praca indywidualna - uczniowie uruchamiają symulację.
- Nauczyciel dzieli klasę na grupy 2-osobowe (np. metodą losowania).
- Uczniowie analizują w parach przykłady 1 i 2 zamieszczone pod symulacją.
- Nauczyciel obserwuje pracę uczniów, w razie potrzeby udziela wskazówek.
- Praca w parach. Uczniowie rozwiązują zadania 1, 6 i 7 z zestawu zadań interaktywnych.
- Nauczyciel obserwuje pracę uczniów, pomaga, wyjaśnia wątpliwości.

Faza podsumowująca:

- Praca w parach. Uczniowie rozwiązują zadania 3 i 5 z zestawu zadań interaktywnych.
- Nauczyciel kieruje dyskusją podsumowującą w oparciu o rozwiązane zadania.

Praca domowa:

Uczniowie utrwalają wiedzę i umiejętności zdobyte w czasie lekcji przez rozwiązanie w domu zadań nr 2, 4 i 8 z zestawu zadań interaktywnych.

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:

Symulację „Wykres zależności prędkości od czasu w ruchu drgającym i jego interpretacja” można wykorzystać podczas lekcji według scenariusza. Może być też wykorzystana przez uczniów do powtórzenia i utrwalenia wiadomości.