

## Odległość na osi liczbowej

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki) filmy oraz ćwiczenia, w tym ćwiczenia interaktywne.

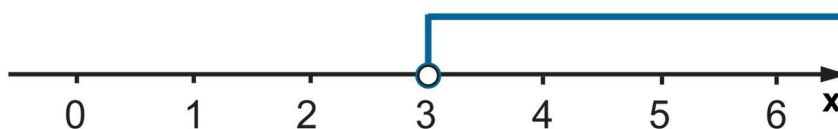
Przykłady i ćwiczenia - zaznaczanie na osi liczbowej zbiorów punktów, spełniających podane warunki (np. nierówność podwójną), obliczanie odległości liczba na osi liczbowej.

Ćwiczenia - obliczanie wartości bezwzględnej, graficzne rozwiązywanie nierówności z wartością bezwzględną, zapisywanie warunku, który spełniają dane liczby zaznaczone na osi liczbowej.

# Odległość na osi liczbowej

## Przykład 1

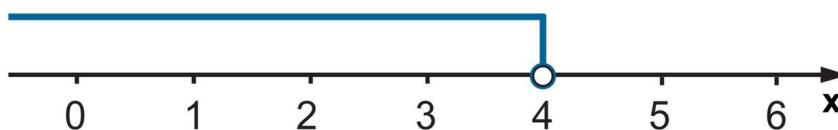
- Zaznaczmy na osi liczbowej liczby, które są większe od 3.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Liczby te spełniają nierówność  $x > 3$ . Jeżeli nierówność jest ostra, tzn. spełniona tylko przez liczby większe od trzech, wtedy kółko jest niezamalowane.

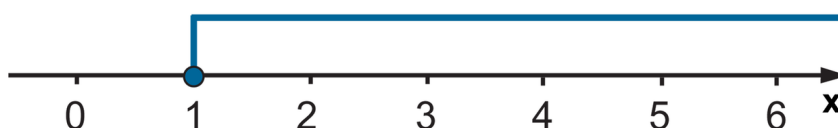
- Zaznaczmy na osi liczbowej liczby, które są mniejsze od 4.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Liczby te spełniają nierówność  $x < 4$ .

- Zaznaczmy na osi liczbowej liczby, które są większe lub równe od 1.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Liczby te spełniają nierówność  $x \geq 1$ . Jeżeli nierówność jest nieostra, tzn. spełniona przez liczby większe lub równe jeden, wtedy kółko jest zamalowane.

- Zaznaczmy na osi liczbowej liczby, które są mniejsze lub równe 5.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Liczby te spełniają nierówność  $x \leq 5$ .

## Przykład 2

- Jeżeli o pewnej liczbie  $x$  wiemy, że jest większa od  $-1$  i mniejsza od  $4$ , to znaczy, że liczba  $x$  spełnia warunek:  $-1 < x < 4$ .

Wszystkie liczby  $x$  spełniające ten warunek możemy zaznaczyć na osi liczbowej.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Jeżeli o pewnej liczbie  $x$  wiemy, że jest większa lub równa od  $-1$  i mniejsza od  $4$ , to znaczy, że liczba  $x$  spełnia warunek:  $-1 \leq x < 4$ .

Wszystkie liczby  $x$  spełniające ten warunek możemy zaznaczyć na osi liczbowej.



- Jeżeli o pewnej liczbie  $x$  wiemy, że jest większa od  $-1$  i mniejsza lub równa od  $4$ , to znaczy, że liczba  $x$  spełnia warunek:  $-1 < x \leq 4$ .

Wszystkie liczby  $x$  spełniające ten warunek możemy zaznaczyć na osi liczbowej.



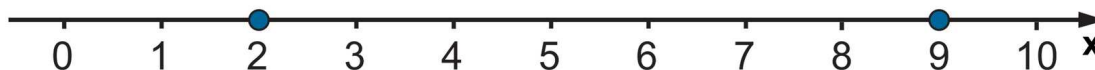
- Jeżeli o pewnej liczbie  $x$  wiemy, że jest większa lub równa od  $-1$  i mniejsza lub równa od  $4$ , to znaczy, że liczba  $x$  spełnia warunek:  $-1 \leq x \leq 4$ .

Wszystkie liczby  $x$  spełniające ten warunek możemy zaznaczyć na osi liczbowej.



### Przykład 3

- Zaznaczymy na osi liczbowej liczby 2 i 9.



Na osi liczbowej między 2 i 9 mieści się 7 odcinków jednostkowych, a więc odległość między liczbami 2 i 9 wynosi 7, ponieważ

$$9 - 2 = 7.$$

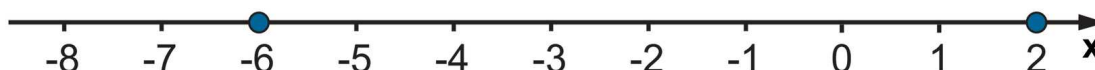
- Zaznaczymy na osi liczbowej liczby  $-8$  i  $-3$ .



Na osi liczbowej między  $-8$  i  $-3$  mieści się 5 odcinków jednostkowych, a więc odległość między liczbami  $-8$  i  $-3$  wynosi 5, ponieważ

$$-3 - (-8) = -3 + 8 = 5.$$

- Zaznaczymy na osi liczbowej liczby  $-6$  i 2.



Na osi liczbowej między  $-6$  i 2 mieści się 8 odcinków jednostkowych, a więc odległość między liczbami  $-6$  i 2 wynosi 8, ponieważ

$$2 - (-6) = 2 + 6 = 8.$$

### Przykład 4

Obliczmy odległość między liczbami  $a = -3,5$  i  $b = -8,2$ .

Ponieważ  $-8,2 < -3,5$ , to aby obliczyć szukaną odległość musimy od  $-3,5$  odjąć  $-8,2$ .

$$-3,5 - (-8,2) = -3,5 + 8,2 = 4,7.$$

A zatem odległość między liczbami  $a$  i  $b$  wynosi  $4,7$  jednostki.

Możemy również policzyć wartość bezwzględną różnicy liczb  $a$  i  $b$ , wtedy nie ma znaczenia, czy od większej odejmujemy mniejszą, czy odwrotnie.

$$|a - b| = |-3,5 - (-8,2)| = |-3,5 + 8,2| = |4,7| = 4,7$$

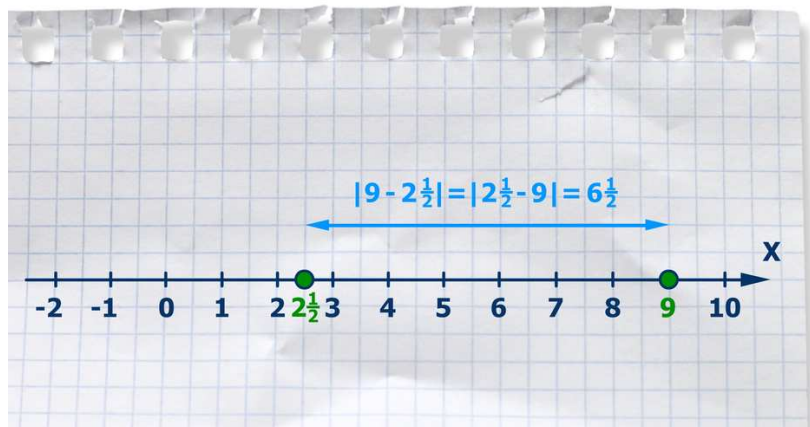
$$|b - a| = |-8,2 - (-3,5)| = |-8,2 + 3,5| = |-4,7| = 4,7$$

$$|a - b| = |b - a|.$$

Odległość między liczbami  $a$  i  $b$  jest równa  $|a - b|$  lub  $|b - a|$ .

#### Przykład 5

Obliczmy odległość na osi liczbowej między liczbami  $a = 2,5$  i  $b = 9$ .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R34PRGfqzVMHb>

Nierownosci przedzialy odleglosc\_470a

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia zaznaczoną na osi liczbowej odległość między liczbami dwa i jedna druga oraz dziewięć.

Ponieważ  $2,5 < 9$ , więc aby obliczyć szukaną odległość musimy od  $9$  odjąć  $2,5$ .

$$9 - 2,5 = 6,5.$$

A zatem odległość między liczbami  $a$  i  $b$  wynosi  $6,5$ .

Możemy również obliczyć wartość bezwzględną różnicy liczb  $a$  i  $b$ . Wówczas nie ma znaczenia, czy od liczby większej odejmujemy mniejszą, czy odwrotnie.

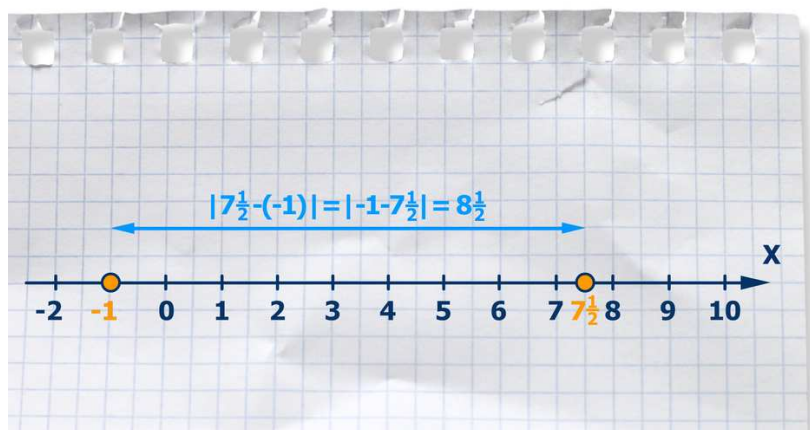
$$|a - b| = |9 - 2,5| = |2,5 - 9| = 6,5$$

$$|a - b| = |b - a|.$$

Odległość między liczbami  $a$  i  $b$  jest równa  $|a - b|$  lub  $|b - a|$ .

#### Przykład 6

Obliczmy odległość na osi liczbowej liczb  $-1$  i  $7,5$ .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RngEFGpJqr2od>

Nierownosci przedzialy odleglosc\_atrapa\_animacja\_1485

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia zaznaczoną na osi liczbowej odległość między liczbami minus jeden oraz siedem i jedna druga.

**Definicja: Odległość między dwiema dowolnymi liczbami na osi liczbowej**

Odległość między dwiema dowolnymi liczbami na osi liczbowej jest równa długości odcinka łączącego punkty odpowiadające tym liczbom.

**Zapamiętaj!**

- Aby obliczyć odległość na osi liczbowej między dwiema liczbami, należy od większej odjąć mniejszą.
- Jeżeli nie wiemy, która z liczb  $a$  i  $b$  jest większa, to aby obliczyć odległość między tymi liczbami na osi liczbowej wystarczy obliczyć  $|b - a|$  lub  $|a - b|$ .

**Przykład 7**

**Dana jest liczba dodatnia  $a$ .**

**Szukamy takich liczb, których odległość od liczby 0 jest mniejsza od  $a$ .**



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RIZn7EUpYQUgU>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazująca, że dla dowolnej liczby dodatniej  $a$  liczby, których odległość od zera jest mniejsza od  $a$ , to liczby większe od  $-a$  oraz mniejsze od  $a$ .

**Przykład 8**



Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, których odległość od liczby 0 jest mniejsza niż 4.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RiLxvJJQa27xW>

atrapa:opis animacji

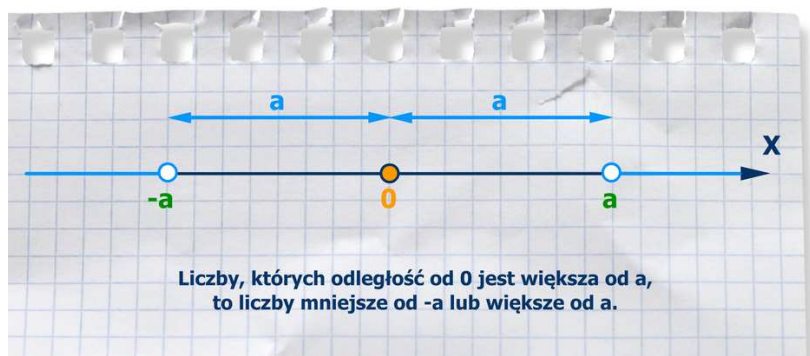
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazująca, że liczby, których odległość od zera jest mniejsza od czterech, to liczby większe od minus czterech oraz mniejsze od czterech.

### Przykład 9

Dana jest liczba dodatnia  $a$ .

Szukamy takich liczb, których odległość od liczby 0 jest większa od  $a$ .



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RWcF7UI7iR6Hc>

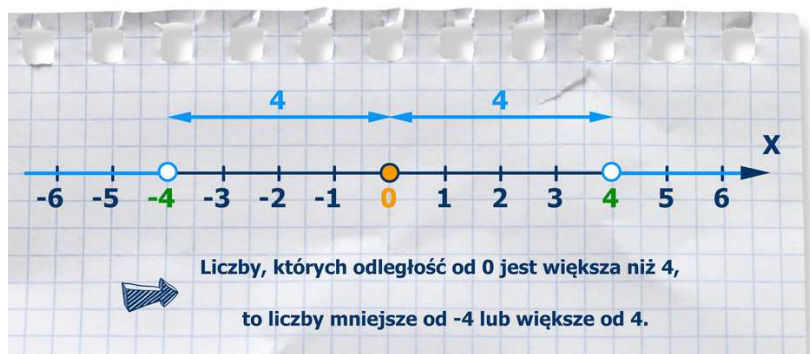
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazująca, że dla dowolnej liczby dodatniej  $a$  liczby, których odległość od zera jest większa od  $a$ , to liczby mniejsze od  $-a$  oraz większe od  $a$ .

### Przykład 10



Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, których odległość od liczby 0 jest większa niż 4.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RiKUrRSRiGod4>

atrapa:opis animacji

Animacja pokazująca, że liczby, których odległość od zera jest większa od czterech, to liczby mniejsze od minus czterech oraz większe od czterech.

### Ćwiczenie 1



Oblicz, a następnie uzupełnij równości, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- $|4| =$
- $|0| =$
- $|-7| =$
- $|\frac{7}{9}| =$
- $|-3\frac{1}{3}| =$
- $|-1, (4)| =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 2



Oblicz, a następnie uzupełnij równości, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- $|5 + 7| =$
- $|7 - 5| =$
- $|5 - 7| =$
- $|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}| =$
- $-|2,3 - 3,2| =$
- $-|1,2 - 1, (2)| =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 3



Uzupełnij nierówności, przeciągając w luki odpowiednie znaki lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- $|-5|$    $5$
- $|-2|$    $-2$
- $-|-1|$    $1$
- $-|-7|$    $-7$
- $|6 - 2|$    $|2 - 6|$
- $1 + |5 - 3|$    $|1 + 5 - 3|$
- $4 + 3 \cdot |6 - 2|$    $3 + 4 \cdot |2 - 6|$
- $|6 + |3 - 4| - 2|$    $|2 - |5 + 2| - 6|$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

#### Ćwiczenie 4



Ile jest liczb naturalnych spełniających warunek  $|x| < 3$ ? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

7

Jest ich nieskończenie wiele.

5

3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

#### Ćwiczenie 5



Zaznacz prawidłowe zakończenie zdania. Wszystkie liczby całkowite spełniające warunek  $|x - 1| < 2$ , to

0, 1, 2.

-1, 0, 1, 2, 3.

-1, 0, 1.

-1, 2.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

#### Ćwiczenie 6



Jaki warunek zachodzi, jeżeli  $|a| = |b|$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

$a = b$  lub  $a = -b$

$-a = b$

$a = b$

$a = -b$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

#### Ćwiczenie 7



Wyznacz zmienną  $x$ , a następnie uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej w każdym punkcie.

- Jeżeli  $|x| = 0$ , to  $x =$
- Jeżeli  $|x| = 5$  i  $x > 0$ , to  $x =$
- Jeżeli  $|x| = 2$  i  $x < 0$ , to  $x =$
- Jeżeli  $|x| = 4$  i  $x > 0$ , to  $x =$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 8



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- Liczby odwrotne mają przeciwne wartości bezwzględne
- Wartość bezwzględna każdej liczby jest liczbą dodatnią
- Liczby przeciwne mają taką samą wartość bezwzględną
- Wartość bezwzględna liczby jest równa liczbie do niej przeciwnej

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 9



Połącz w pary opisy słowne z odpowiednimi matematycznymi zapisami.

liczba $x$ jest ujemna	$x \geq -5$
liczba $x$ jest nie większa od $-5$	$x \geq 5$
liczba $x$ jest nie mniejsza od $5$	$x \leq -5$
liczba $x$ jest mniejsza od $5$	$x \geq 0$
liczba $x$ jest nieujemna	$x < 0$
liczba $x$ jest większa lub równa $-5$	$x < 5$

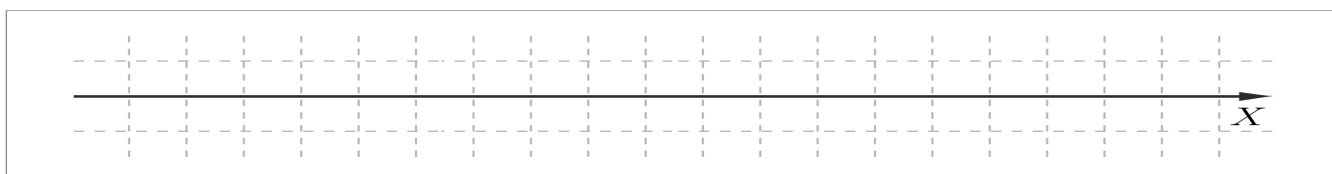
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 10



Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby spełniające dany warunek.

1.  $x \leq 3$
2.  $x > -2,25$
3.  $x < \frac{2}{3}$
4.  $x \geq 5,5$
5.  $x < 2,7$
6.  $x \leq -1\frac{3}{4}$

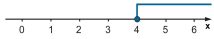


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

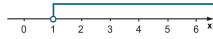
### Ćwiczenie 11



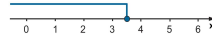
Dopasuj prawidłowo warunki, jakie spełniają liczby zaznaczone na osi liczbowej.



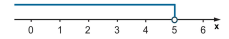
$$x \geq 4$$



$$x < 5$$



$$x > 1$$



$$x \leq 3,5$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 12



Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających dany warunek.

1.  $-2 < x < 0$

2.  $-1,5 \leq x \leq 2$

3.  $3 \leq x < 5$

4.  $-3,5 < x \leq -1$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 13



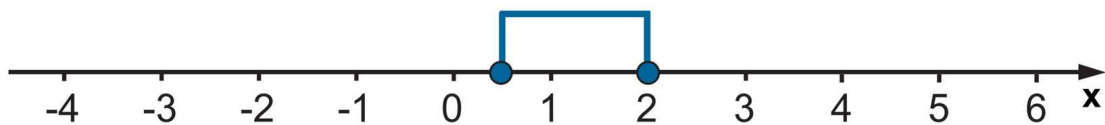
Określ, jaki warunek spełniają liczby zaznaczone na osi liczbowej.

1.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2.



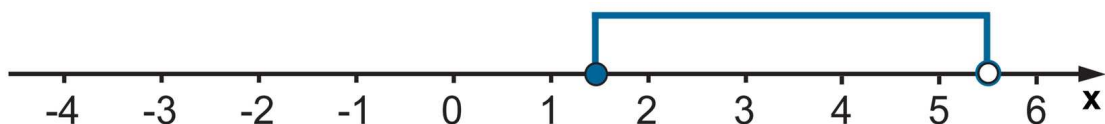
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

---

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 14



Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby i wyrażenia lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Jeżeli  $x \leq 5$  i  $x$  jest liczbą naturalną, to  $x =$
- Jeżeli  $x < 3$  i  $x$  jest liczbą całkowitą dodatnią, to  $x =$
- Jeżeli  $-3,5 < x \leq 1$  i  $x$  jest liczbą całkowitą, to  $x =$
- Jeżeli  $-5 < x \leq 5$  i  $x$  jest liczbą całkowitą ujemną, to  $x =$
- Jeżeli  $-2 \leq x \leq 0$  i  $x$  jest liczbą naturalną, to  $x =$
- Jeżeli  $5,5 < x < 10$ ,  $5$  i  $x$  jest liczbą wymierną, to liczb jest

-3, -2, -1, 0, 1
-4, -3, -2, -1
0
skończona ilość
1, 2
0, 1, 2, 3, 4, 5
nieskończenie wiele

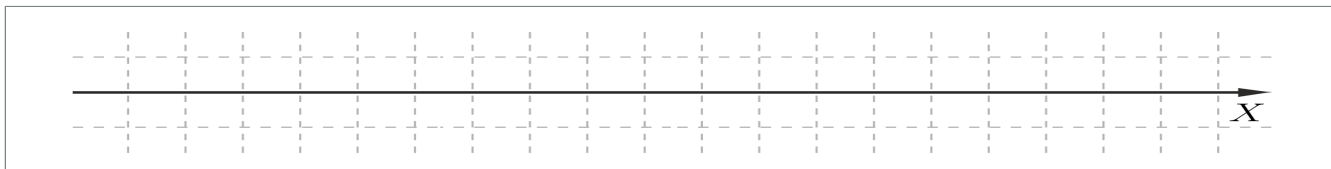
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 15



Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby spełniające podany warunek.

- $|x| \leq 5$
- $|x| < 3$
- $|x| > 0$



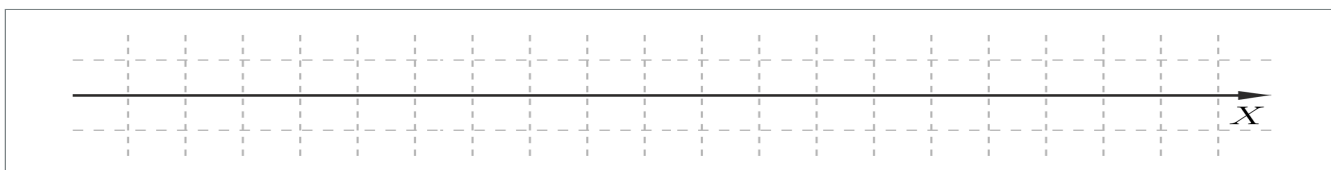
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 16



Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby spełniające podany warunek.

- $|x| > 2$
- $|x| < -3$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 17



Oblicz  $x$ , jeżeli  $|x - 2| = 3$ . Uzupełnij odpowiedź, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej. Liczby wstawiaj w kolejności rosnącej.

Odpowiedź: Wynikiem jest  $x =$   oraz  $x =$  .

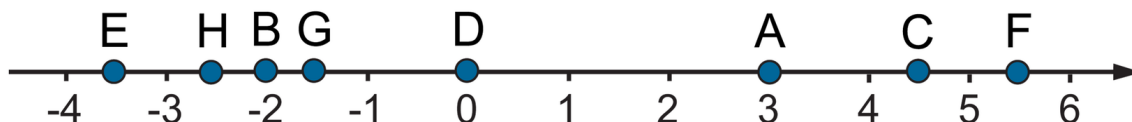
- 

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 18



Znajdź odległość na osi liczbowej między punktami:  $D$  i  $H$ ,  $B$  i  $C$ ,  $C$  i  $E$ ,  $E$  i  $F$ ,  $A$  i  $H$ ,  $A$  i  $G$ .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

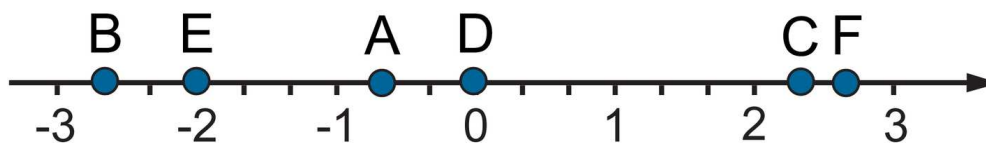
---

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 19



Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Odległość punktu  $A$  od punktu  $B$  jest  odległości punktu  $D$  od punktu  $E$ .
- Odległość punktu  $A$  od punktu  $B$  jest równa .
- Odległość punktu  $A$  od punktu  $E$  jest o  większa od odległości punktu  $B$  od punktu  $E$ .
- Odległość punktu  $B$  od punktu  $C$  jest  razy większa od odległości punktu  $A$  od punktu  $B$ .
- Odległość punktu  $D$  od punktu  $F$  jest równa podwojonej sumie odległości punktu  $A$  od punktu  $D$  i .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 20



Które liczby leżą na osi liczbowej w takiej samej odległości od liczby  $-4$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- $-7,5$  i  $-0,5$
- $-8$  i  $8$
- $-5\frac{2}{3}$  i  $-3\frac{2}{3}$
- $-6$  i  $-3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 21



Która liczba leży na osi liczbowej w takiej samej odległości od  $-15$  i  $2$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- $-8$
- $-6,5$
- $-8,5$
- $-7,5$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 22



Jak opiszemy zbiór liczb leżących na osi liczbowej w odległości nie większej niż 3 od liczby  $-5$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

$-5 < x < 3$

$-8 \leq x \leq -2$

$-5 \leq x \leq 3$

$-8 < x < -2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 23



Oblicz odległość między danymi liczbami, a następnie uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Odległość między liczbami  $3\frac{1}{2}$  i 0 wynosi
- Odległość między liczbami 2, 5 i  $-3,7$  wynosi
- Odległość między liczbami  $-3,24$  i  $-\frac{2}{5}$  wynosi
- Odległość między liczbami  $-\frac{3}{4}$  i 1, 2 wynosi
- Odległość między liczbami  $-\frac{1}{3}$  i 0, (3) wynosi
- Odległość między liczbami  $\frac{1}{7}$  i  $-\frac{3}{2}$  wynosi

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.