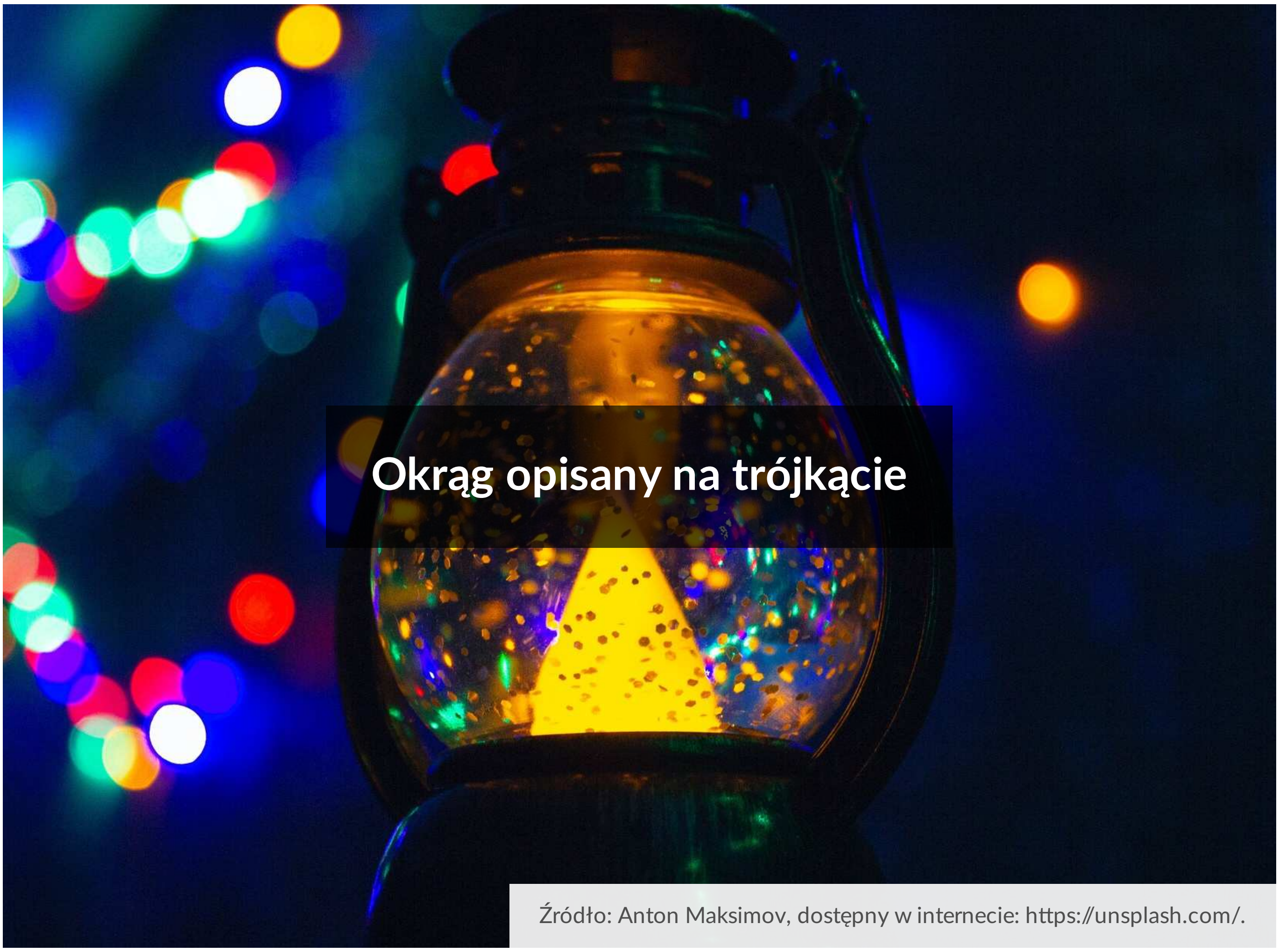
Okrąg opisany na trójkącie

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: Anton Maksimov, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Pewna sieć komórkowa planuje postawienie masztu w równej odległości od trzech ustalonych miejscowości. W którym punkcie należy umieścić ten maszt, aby był spełniony ten warunek? Do rozwiązania tego problemu pomocna będzie wiedza na temat wyznaczania środka okręgu opisanego na dowolnym trójkącie. W materiale przeanalizujemy, gdzie leży środek okręgu opisanego na trójkącie. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Określisz położenie środka okręgu opisanego na trójkącie.
- Uzasadnisz, że na każdym trójkącie można opisać okrąg.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję symetralnej odcinka.

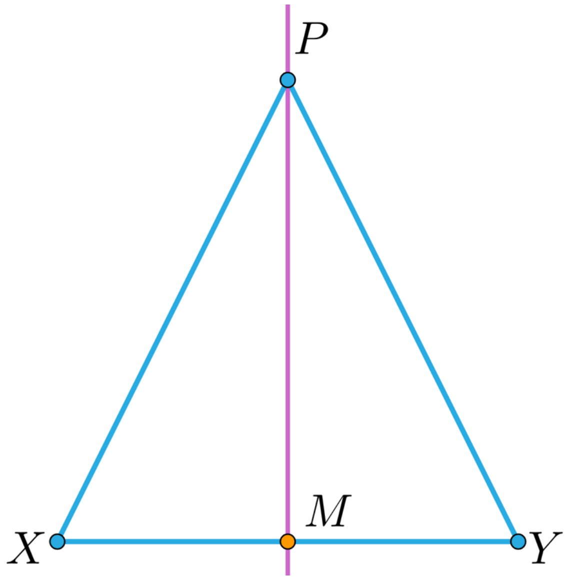
Definicja: Symetralna odcinka

Symetralna niezerowego odcinka to prosta prostopadła do danego odcinka, przechodząca przez środek tego odcinka.

Jak wiadomo, symetralna odcinka jest miejscem geometrycznym punktów równoodległych od jego końców.

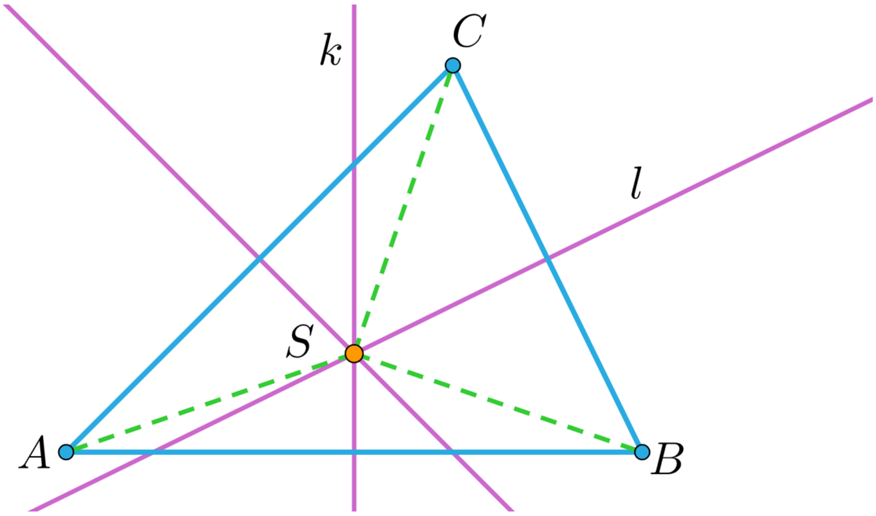
Twierdzenie: o punktach równoodległych od symetralnej odcinka

Niech X i Y będą różnymi punktami. Punkt P leży na symetralnej odcinka XY wtedy i tylko wtedy, gdy $|XP| = |YP|$.



Twierdzenie: o przecięciu symetralnych trzech boków trójkąta

Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest równoodległy od jego wierzchołków.



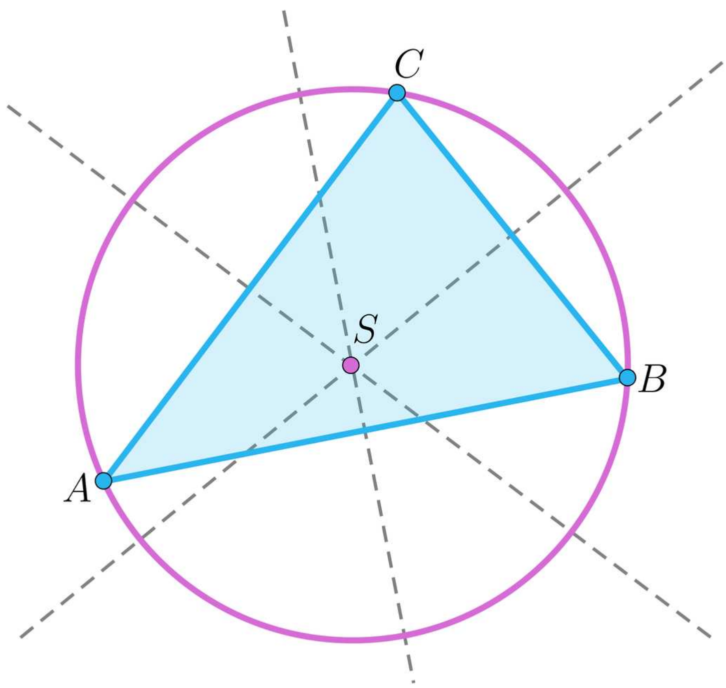
Dowód

Niech $\triangle ABC$ będzie dowolnym trójkątem. Niech k i l będą symetralnymi boków AB i BC. Niech też S będzie punktem wspólnym tych prostych. Taki punkt istnieje i jest jedyny.

Wówczas na mocy poprzedniego twierdzenia mamy $|AS| = |BS| = |CS|$. Zatem, znów na mocy tego twierdzenia, punkt S należy do symetralnej odcinka CA.

Wniosek

Dla każdego trójkąta istnieje dokładnie jeden okrąg przechodzący przez wszystkie wierzchołki tego trójkąta (okrąg opisany na trójkącie).



Zdefiniujmy pojęcie okręgu opisanego na trójkącie.

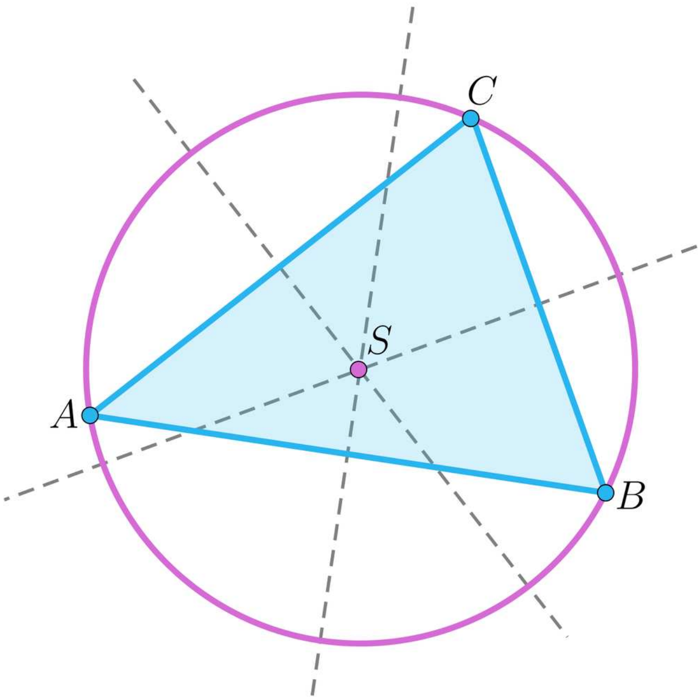
> **Definicja: Okrąg opisany na trójkącie**
>
> Mówimy, że okrąg jest opisany na trójkącie, jeżeli wszystkie wierzchołki trójkąta należą do tego okręgu.

Wynika z tego, że jeżeli okrąg jest opisany na trójkącie, to trójkąt jest wpisany w okrąg.

Przeanalizujmy, gdzie położony jest środek okręgu w zależności od rodzaju trójkąta.

1. Okrąg opisany na trójkącie ostrokątnym

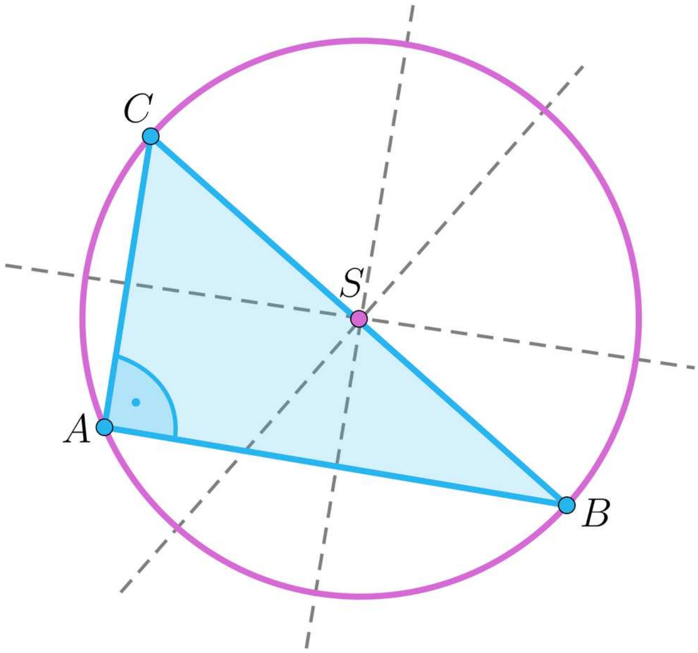
Jeżeli okrąg jest opisany na trójkącie ostrokątnym, to środek okręgu leży wewnątrz trójkąta.



Wynika to z faktu, że symetralne boków trójkąta ostrokątnego przecinają się w punkcie leżącym wewnątrz trójkąta.

2. Okrąg opisany na trójkącie prostokątnym

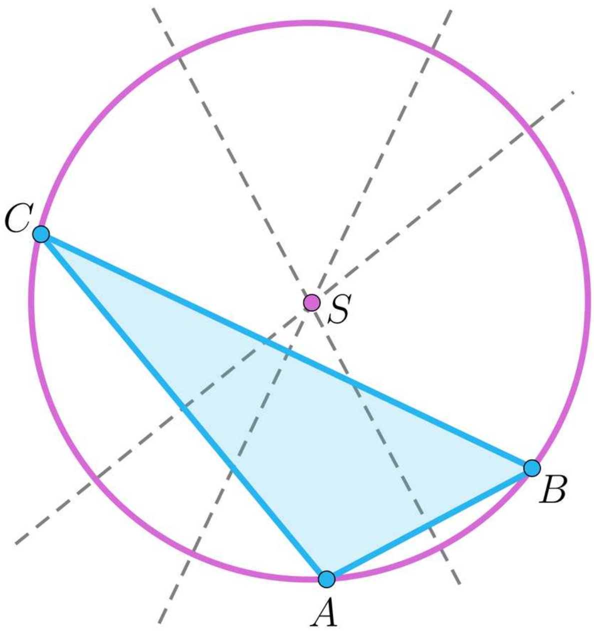
Jeżeli okrąg jest opisany na trójkącie prostokątnym, to środek okręgu leży w punkcie, który dzieli przeciwprostokątną trójkąta na dwa odcinki równej długości.



Wynika to z faktu, że symetralne boków trójkąta prostokątnego przecinają się w punkcie będącym środkiem przeciwprostokątnej trójkąta.

3. Okrąg opisany na trójkącie rozwartokątnym

Jeżeli okrąg jest opisany na trójkącie rozwartokątnym, to środek okręgu leży na zewnątrz tego trójkąta.



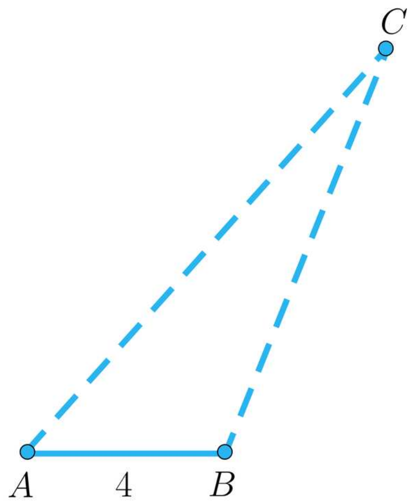
Wynika to z faktu, że symetralne boków trójkąta rozwartokątnego przecinają się w punkcie leżącym na zewnątrz trójkąta.

Przykład 1

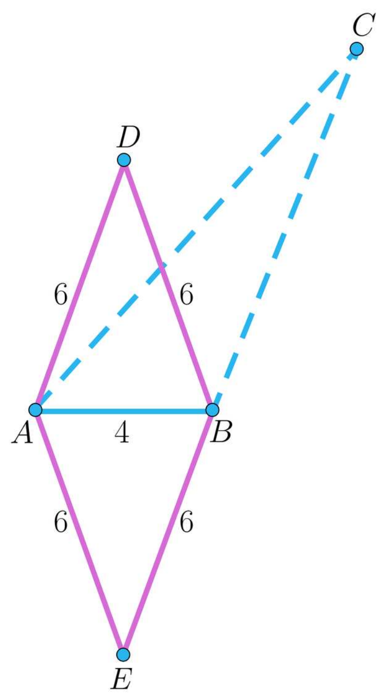
Skonstruujemy okrąg opisany na trójkącie o boku długości 4, jeżeli promień tego okręgu ma długość 6.

Rozwiązanie

Niech dany będzie bok AB długości 4 trójkąta ABC.

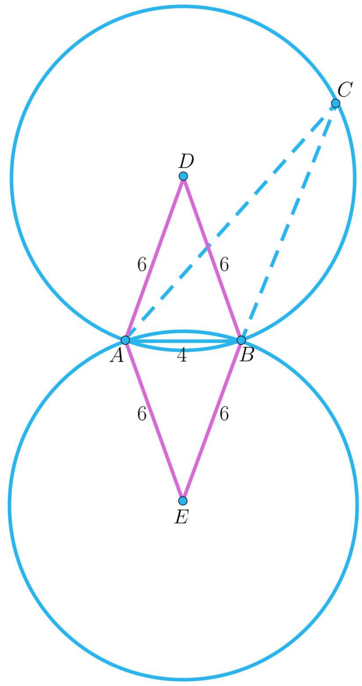


Na boku AB budujemy trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 (będą 2 takie trójkąty).



Jeden z punktów D lub E będzie środkiem szukanego okręgu (leży na symetralnej boku AB i jest oddalony od punktów A i B o 6)

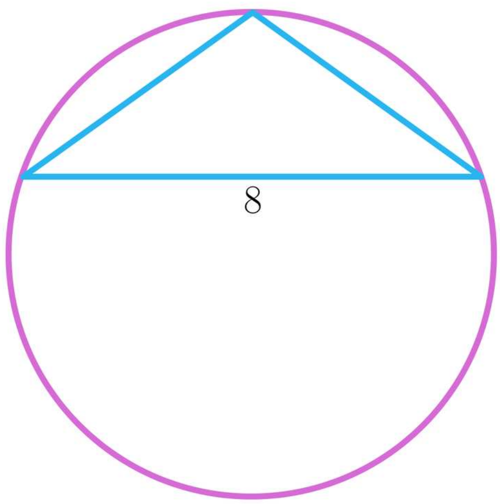
Szkicujmy okrąg o promieniu długości 6 i środku w punkcie, który jest wierzchołkiem trójkąta (będą dwa takie okręgi).



Jeden z powstałych okręgów przechodzi przez trzeci wierzchołek trójkąta ABC, okrąg ten spełnia warunki zadania.

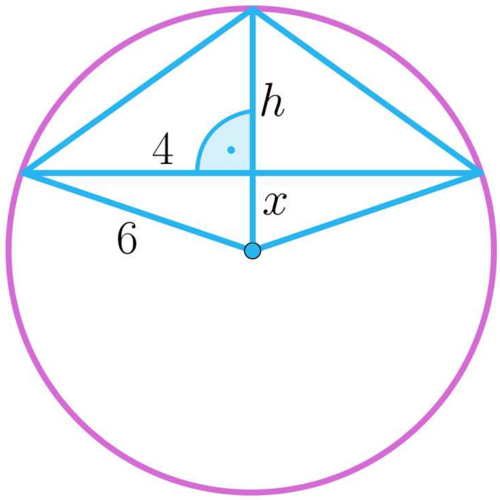
Przykład 2

Obliczymy pole trójkąta równoramiennego przedstawionego na rysunku, jeżeli promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość 6.



Rozwiązanie

Dorysujmy promienie okręgu oraz wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Wobec tego długość odcinka x obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$x^2 + 4^2 = 6^2$

$x^2 = 20$, czyli $x = 2\sqrt{5}$.

Zatem wysokość trójkąta jest równa:

$h = 6 - 2\sqrt{5}$.

Pole trójkąta wynosi:

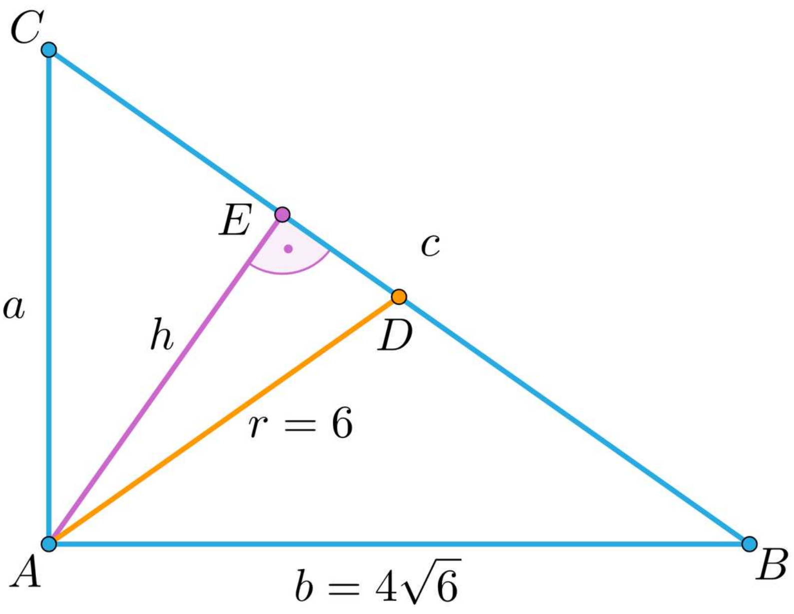
$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \left(6 - 2\sqrt{5}\right) = 24 - 8\sqrt{5}$.

Przykład 3

Obliczymy długość wysokości trójkąta prostokątnego wychodzącej z wierzchołka kąta prostego, jeśli promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość 6, a jedna z przyprostokątnych ma długość $4\sqrt{6}$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Odcinek AD jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC, zatem $c = |BC| = 12$. Wyznaczamy długość przyprostokątnej a:

$a^2 = 12^2 - \left(4\sqrt{6}\right)^2$

$a^2 = 48$

$a = 4\sqrt{3}$.

Zauważmy, że:

$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h$

Stąd:

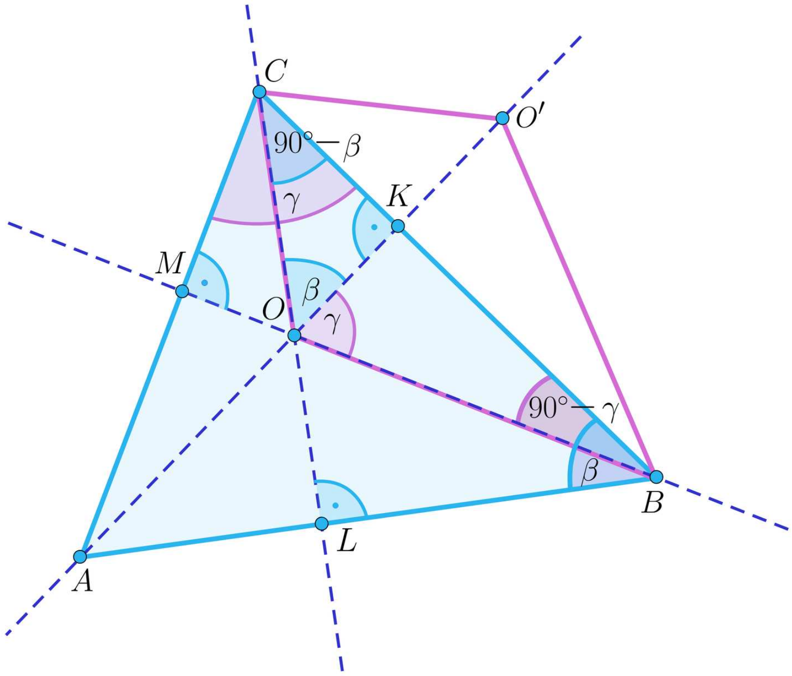
$h = 4\sqrt{2}$

Przykład 4

Dany jest trójkąt ABC. Wykażemy, że punkt symetryczny do ortocentrum względem prostej zawierającej bok BC leży na okręgu opisanym na tym trójkącie.

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku:



gdzie punkt O jest ortocentrum trójkąta ABC, zaś O' – punktem symetrycznym do punktu O względem prostej zawierającej bok BC.

Ponieważ $|OK| = |KO'|$, to $\triangle CKO \equiv \triangle CKO'$. Oznacza to, że: $|\sphericalangle COK| = |\sphericalangle CO'K| = \beta$ oraz $|\sphericalangle OCK| = 90^\circ - \beta$. Stąd w trójkącie CLB: $|\sphericalangle LBC| = \beta$.

Analogicznie $|\sphericalangle BOK| = |\sphericalangle BO'K| = \gamma$; $|\sphericalangle OBK| = 90^\circ - \gamma$ oraz $|\sphericalangle MCB| = \gamma$.

Zatem: $|\sphericalangle CO'B| = |\sphericalangle CO'K| + |\sphericalangle BO'K| = \gamma + \beta$.

W trójkącie AKB: $|\sphericalangle BAK| = 90^\circ - \beta$.

W trójkącie AKC: $|\sphericalangle CAK| = 90^\circ - \gamma$.

Stąd: $|\sphericalangle BAC| = 180^\circ - (\beta + \gamma)$.

Zauważmy, że w czworokącie $CABO'$:

$|\sphericalangle CAB| + \left|\sphericalangle CO^{'}B\right| = \beta + \gamma + 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ$.

Oznacza to, że $\left|\sphericalangle ACO^{'}\right| + \left|\sphericalangle ABO^{'}\right| = 180^\circ$.

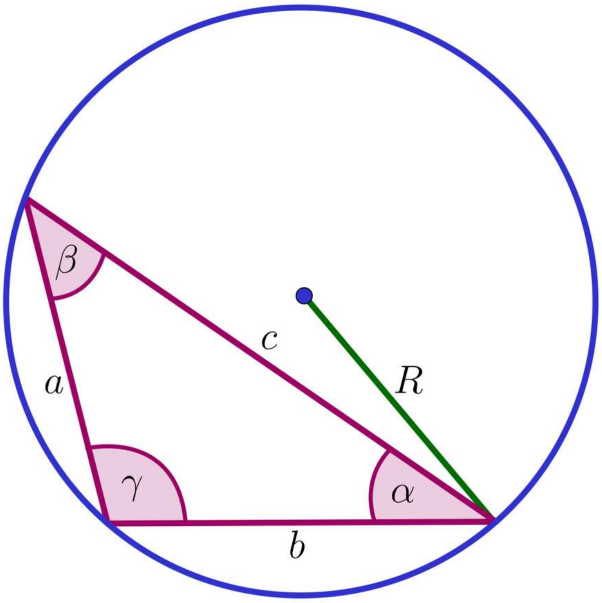
Zatem na czworokącie $CABO'$ można opisać okrąg. Jest to jednocześnie okrąg opisany na trójkącie ABC, do którego należy punkt O', co należało udowodnić.

Przypomnimy poniżej twierdzenie sinusów, które wykorzystujemy między innymi do wyznaczania długości promienia okręgu opisanego na trójkącie.

Twierdzenie: Twierdzenie sinusów (twierdzenie Snelliusa)

W dowolnym trójkącie na płaszczyźnie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe i równają się średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

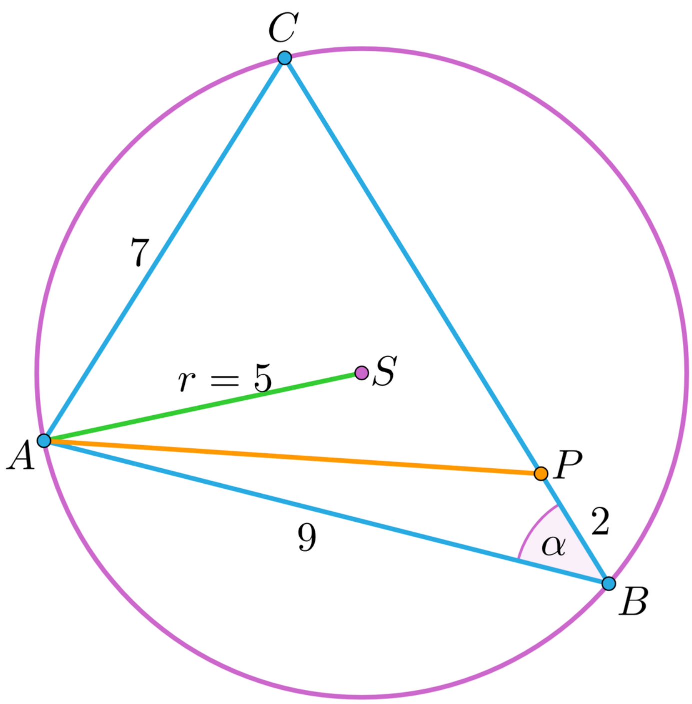


Przykład 5

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest ostry. Długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa 5 oraz $|AC| = 7$, $|AB| = 9$. Na boku BC wybrano taki punkt P, że $|BP| = 2$. Obliczymy długość odcinka AP.

Rozwiązanie

Wykonajmy rysunek zgodny z treścią zadania. Kąt ostry przy wierzchołku B trójkąta ABC oznaczmy przez α.



Z zadania mamy następujące dane:

$|AC| = 7$

$|AB| = 9$

$|BP| = 2$

$|AS| = r = 5$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABC z rysunku mamy:

$\frac{|AC|}{\sin\alpha} = 2r$

$\frac{7}{\sin\alpha} = 10$, czyli $\sin\alpha = \frac{7}{10}$

Korzystając z jedynki trygonometrycznej, obliczamy wartość $\cos\alpha$.

Zatem $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{51}}{10}$.

Do wyznaczenia długości odcinka AP stosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABP:

$|AP|^2 = |AB|^2 + |BP|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BP| \cdot \cos\alpha$

$|AP|^2 = 9^2 + 2^2 - 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10}$

$|AP|^2 = 85 - \frac{18\sqrt{51}}{5} = \frac{425-18\sqrt{51}}{5}$, czyli $|AP| = \sqrt{\frac{425-18\sqrt{51}}{5}}$

Słownik

symetralna odcinka

prosta prostopadła do tego odcinka i przechodząca przez jego środek

okrąg

zbiór punktów płaszczyzny euklidesowej odległych od ustalonego punktu nazywanego środkiem o odległość nazywaną promieniem

twierdzenie cosinusów

w dowolnym trójkącie, kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków, pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi

ortocentrum

punkt przecięcia wysokości trójkąta

Aplet

Polecenie 1
Przeanalizuj działanie apletu. Za każdym razem określ położenie środka okręgu opisanego na trójkącie, w zależności od wybranego rodzaju trójkąta.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dn75LnvG4

Polecenie 2
W trójkącie równoramiennym jeden z kątów ma miarę 40°. Określ położenie środka okręgu opisanego na tym trójkącie.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o bokach 12 i 6 oraz kącie między nimi o mierze 120°.

Ćwiczenie 7

Wiadomo, że jeden z kątów w trójkącie równoramiennym ma miarę 70°. Określ położenie środka okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ćwiczenie 8

Oblicz obwód koła opisanego na trójkącie prostokątnym o krótszej przyprostokątnej długości $6\ \mathrm{cm}$ i kącie ostrym o mierze 60°.

Ćwiczenie 9

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okrąg opisany na trójkącie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:
10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- ustala położenie środka okręgu opisanego na danym trójkącie;
- dowodzi, że na każdym trójkącie można opisać okrąg;
- określa miary kątów wewnętrznych w trójkącie, jeżeli jest opisany na nim okrąg;
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat zajęć: „Okrąg opisany na trójkącie” i prosi, by na jego podstawie uczniowie sformułowali cel lekcji oraz kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi wybranego ucznia lub uczniów o przedstawienie sytuacji problemowej związanej z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w 4-osobowych grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z apletem. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia numer 1 i 2 w sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5 w sekcji „Sprawdź się”. Po każdym zakończonym zadaniu wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 w sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Okrąg opisany na trójkącie

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Aplet” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w taki sposób, aby samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące okręgu opisanego na trójkącie.
- „Aplet” można zastosować do realizacji lekcji „Środek okręgu opisanego na trójkącie”.