



Pole czworokąta o danych przekątnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Pole czworokąta o danych przekątnych

Źródło: David Zydd, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Głównym pytaniem w tym materiale jest:

Jak można wykorzystać własności przekątnych do wyznaczenia pola czworokąta?

Najczęściej wykorzystywaną informacją praktyczną jest umieszczanie informacji o parametrach ekranu telewizora, monitora, wyświetlacza urządzeń mobilnych w postaci:

Ekran: 55 cali, 3840×2160 px.

Informacja 55 cali oznacza długość przekątnej ekranu w kształcie prostokąta wyrażoną w calach. Informacja 3840×2160 px opisuje rozdzielczość ekranu wyrażoną w pikselach, przy czym pierwsza wartość odpowiada szerokości ekranu a druga wysokości ekranu. Rozdzielczość ekranu zawiera informacje o proporcji szerokości ekranu do jego wysokości. W przykładzie przytoczonym tutaj proporcja ta jest równa $\frac{3840}{2160} = 16 : 9$. Obecnie proporcja ta dominuje na rynku telewizorów. Stosuje się również proporcje $14 : 9$ i $4 : 3$.

Twoje cele

- Wykorzystasz związek między przekątnymi a polem danego czworokąta.
- Zastosujesz wzory na pole równoległoboku z wykorzystaniem przekątnych.

- Wyprowadzisz wzór na pole prostokąta, rombu, kwadratu na podstawie wzoru na pole równoległoboku z wykorzystaniem przekątnych.
- Wykorzystasz wzór na pole deltoidu z wykorzystaniem przekątnych.
- Zastosujesz poznane wzory na pole czworokąta z wykorzystaniem przekątnych w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych

Przeczytaj

Dowody dotyczące pola figur opierają się na ważnych własnościach pola.

Własność: Własności pola figury

Niech P_F oznacza pole figury F . Wówczas możemy wyróżnić trzy ważne własności.

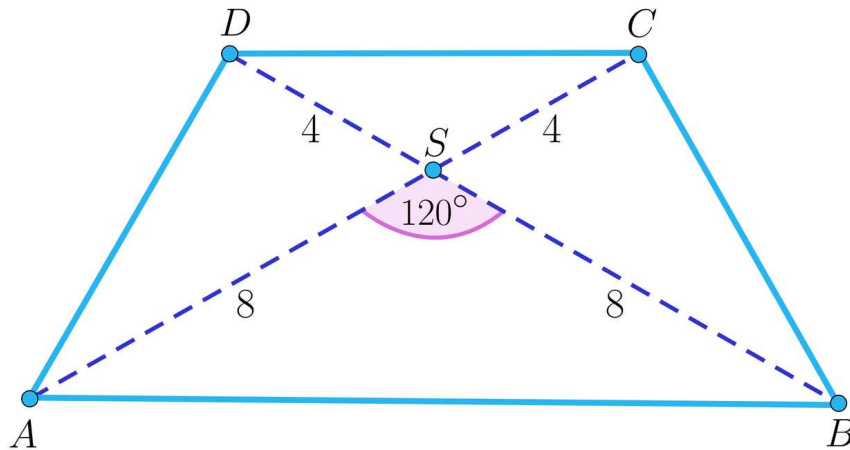
1. Figury przystające mają równe pola.
2. Jeżeli figura F_1 jest zawarta w figurze F_2 to $P_{F_1} \leq P_{F_2}$.
3. Jeżeli F_1, F_2 są rozłączne, to pole ich sumy jest równe sumie pól. W ogólności, pole sumy figur jest równe sumie ich pól minus pole ich części wspólnej.

Przykład 1

W **trapezie równoramiennym** $ABCD$ każda przekątna ma długość 12. Przekątne przecinają się pod kątem 120° i dzielą się w stosunku $2 : 1$. Wyznamy pole tego trapezu.

Rozwiązanie

W trójkącie DSC dwa boki są równe: $|DS| = |CS| = \frac{d}{3} = 4$.



Stąd pole trójkąta DSC jest równe $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Pole trójkąta ASB jest 4 razy większe od pola trójkąta DCS , bo trójkąty te są podobne w skali $2 : 1$. Zatem pole trójkąta ASB jest równe $16\sqrt{3}$.

Trójkąt ASD ma boki długości:

$$|AS| = \frac{2d}{3} = 8, |DS| = \frac{d}{3} = 4 \text{ oraz } \angle ASD = \frac{360^\circ - 2 \cdot 120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

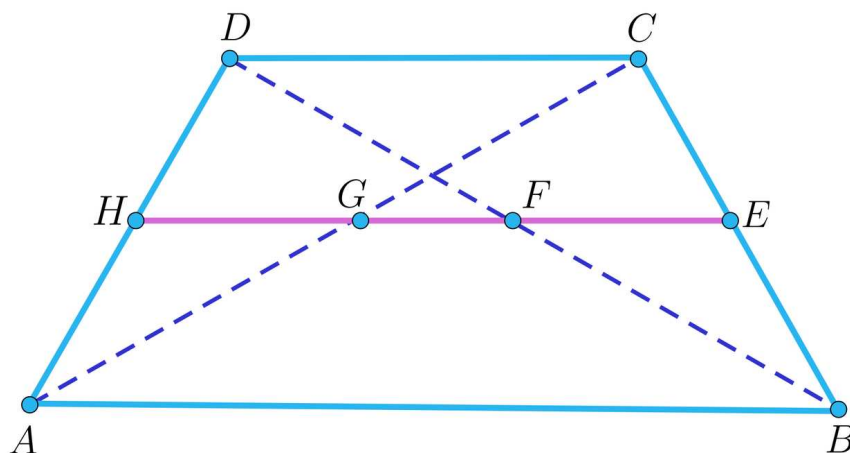
Stąd pole trójkąta ASD jest równe $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$.

Ostatecznie pole trapezu $ABCD$ jest równe $4\sqrt{3} + 16\sqrt{3} + 2 \cdot 8\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$.

Twierdzenie: o długości odcinka łączącego środki przekątnych trapezu

W trapezie o podstawach długości a, b odległość między środkami przekątnych wyraża się wzorem $\frac{a-b}{2}$.

Dowód



Przyjmujemy oznaczenia: $|AB| = a$ oraz $|CD| = b$. Zauważmy, że na odcinku HE leżą środki przekątnych trapezu, więc jest to jego linia środkowa. Wynika stąd, że odcinek EH łączy środki ramion AD oraz BC . Zatem $|AH| = \frac{|AD|}{2}$, $|BE| = \frac{|BC|}{2}$, $|AG| = \frac{|AC|}{2}$, $|BF| = \frac{|BD|}{2}$ oraz $|GF| = |HF| - |HG|$.

Wyróżnimy dwa trójkąty: ABD oraz ACD .

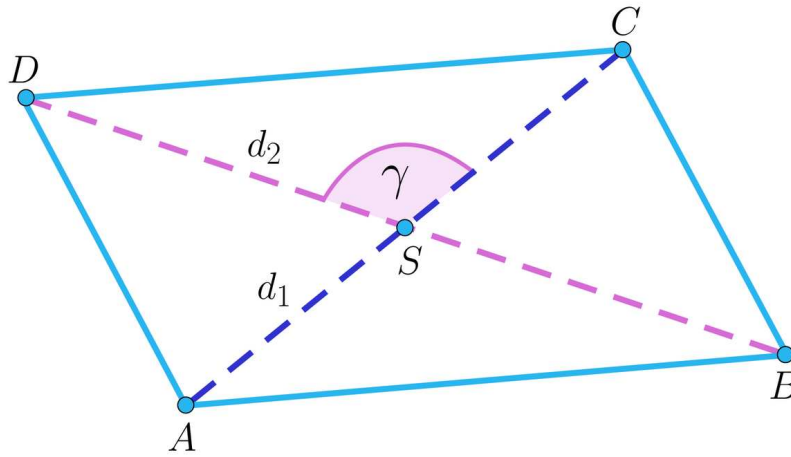
Zacznijmy od trójkąta ACD . Zauważmy trójkąty AGH i ACD są podobne na mocy cechy podobieństwa kkk . Więc możemy zapisać następującą zależność $\frac{|AH|}{|AD|} = \frac{|HG|}{|CD|}$, czyli $\frac{1}{2} = \frac{|HG|}{b}$. Wynika stąd, że $|HG| = \frac{b}{2}$.

Podobne rozważania przeprowadzamy dla trójkąta ABD . Zauważmy trójkąty HGD i ABD są podobne na mocy cechy podobieństwa kkk . Więc możemy zapisać następującą zależność $\frac{|HD|}{|AD|} = \frac{|HF|}{|AB|}$, czyli $\frac{1}{2} = \frac{|HF|}{a}$. Wynika stąd, że $|HF| = \frac{a}{2}$.

Podsumowując $|GF| = |HF| - |HG| = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$.

Równoległobok jest trapezem, więc własności przekątnych w trapezie stosują się też do równoległoboku.

Twierdzenie: o polu równoległoboku



Pole równoległoboku o przekątnych d_1 , d_2 i kącie γ między przekątnymi jest równe:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin \gamma$$

Dowód

Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe:

$$\begin{aligned} P &= P_{ASB} + P_{CSD} + P_{ASD} + P_{CSB} = 2P_{ASB} + 2P_{ASD} = \\ &= 2 \cdot \frac{\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}}{2} \sin \gamma + 2 \cdot \frac{\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}}{2} \cdot \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{d_1 \cdot d_2}{4} \cdot (\sin \gamma + \sin(180^\circ - \gamma)) = \\ &= \frac{d_1 \cdot d_2}{4} \cdot 2 \cdot \sin \gamma = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin \gamma \end{aligned}$$

Przykład 2

Przekątne równoległoboku mają długości 14 i 18. Kąt rozwarty między przekątnymi jest 5 razy większy niż kąt ostry między tymi przekątnymi. Wyznaczymy pole tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Niech α będzie miarą kąta ostrego. Wtedy $\alpha + 5\alpha = 180^\circ$, więc $\alpha = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$.

Zatem $P = \frac{14 \cdot 18}{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{14 \cdot 18}{2 \cdot 2} = 63$.

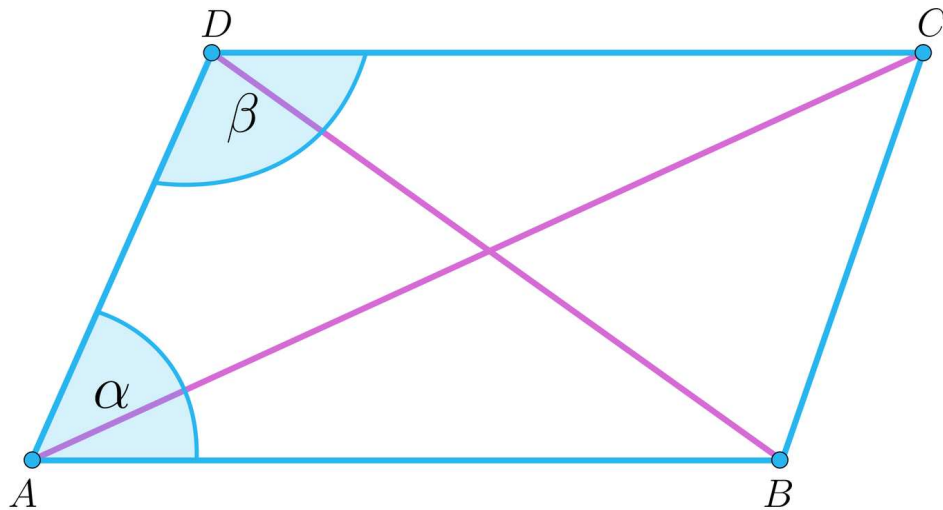
Przykład 3

Pole równoległoboku o bokach długości 4 oraz 6 wynosi $12\sqrt{3}$. Wyznaczymy długości przekątnych tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Zaczniemy od wyznaczenia miar kątów w równoległoboku. Skorzystamy ze wzoru $P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$, co daje $12\sqrt{3} = 4 \cdot 6 \cdot \sin \alpha$. Wynika stąd, że $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $\alpha = 60^\circ$. Kąt rozwarty oznaczmy jako β . Zatem $\beta = \frac{360^\circ - 120^\circ}{2} = 120^\circ$.

Korzystając z rysunku oraz [twierdzenia cosinusów](#) wyznaczmy długości przekątnych.



Zatem

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos 60^\circ = 36 + 16 - 48 \cdot \frac{1}{2} = 28,$$

czyli $|BD| = 2\sqrt{7}$ oraz

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos 120^\circ =$$

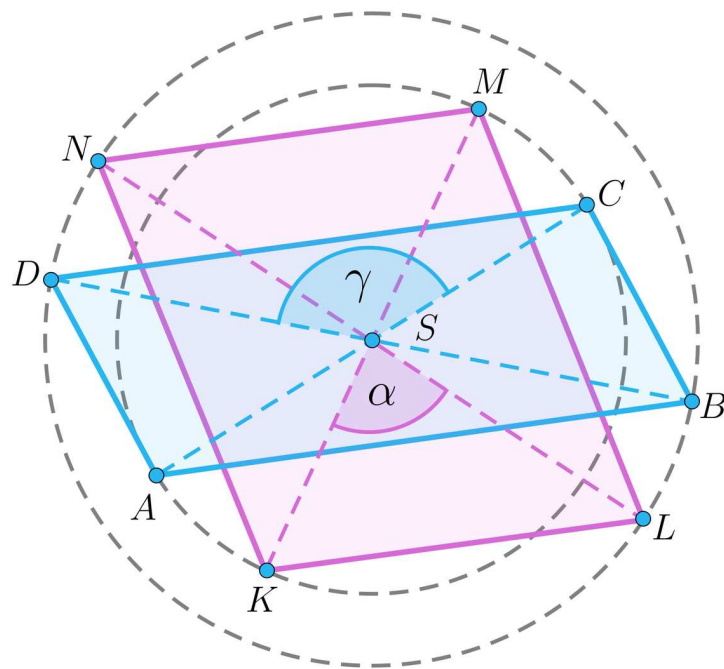
$$= 36 + 16 - 48 \cdot \cos(180^\circ - 60^\circ) =$$

$$= 52 + 48 \cdot \cos 60^\circ = 52 + 24 = 76,$$

czyli $|AC| = 2\sqrt{19}$.

Przykład 4

Dane są dwa równoległoboki $KLMN$ i $ABCD$, których odpowiednie przekątne są tej samej długości: $|AC| = |KM| = d_1$ oraz $|BD| = |LN| = d_2$.



Wyznamy stosunek pól tych równoległoków.

Rozwiązanie

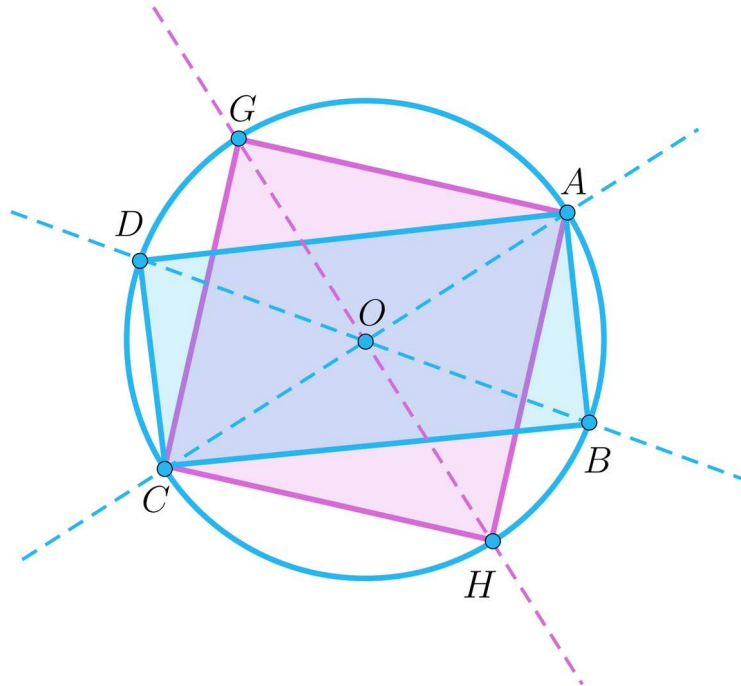
Skorzystamy ze wzoru wykorzystującego długości przekątnych oraz miarę kąta pomiędzy nimi w równoległoku.

$$P_{KLMN} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin \alpha, P_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin \gamma.$$

Wtedy $\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.$

Przykład 5

Na rysunku przedstawiony jest kwadrat oraz prostokąt, którego przekątne mają tę samą długość d . Wpisujemy je w okrąg o promieniu $\frac{d}{2}$.



Pokażemy, że pola **kwadratu** $AHCG$ i prostokąta $ABCD$ są różne.

Rozwiązanie

Rzeczywiście, pole kwadratu $AHCG$ jest równe

$$2 \cdot P_{CAG} = 2 \cdot \frac{\frac{d}{2} \cdot d}{2} = \frac{d^2}{2}.$$

Natomiast, pole prostokąta $ABCD$ jest równe $2 \cdot P_{CAD} = 2 \cdot \frac{hd}{2} = hd$, gdzie h jest wysokością trójkąta CAD .

Długością wysokości h jest odległość punktu D od średnicy AC okręgu. Z własności okręgu odległość ta jest mniejsza od promienia, czyli $h < \frac{d}{2}$ i stąd $hd < \frac{d^2}{2}$.

Twierdzenie: o polu prostokąta

Pole prostokąta o przekątnej d i kącie γ między przekątnymi jest równe $P = \frac{d^2}{2} \sin \gamma$.

Dowód

Korzystamy ze wzoru na pole równoległoboku wstawiając w miejsce d_1 i d_2 wartość d .

Przykład 6

Pokażemy, że pole kwadratu o przekątnej d jest równe $\frac{d^2}{2}$.

Rozwiązanie

W kwadracie przekątne przecinają się pod kątem prostym, więc $\sin \gamma = 1$. Podstawiając tę wartość do wzoru na pole prostokąta dostajemy, że pole kwadratu jest równe $\frac{d^2}{2}$.

Twierdzenie: o polu deltoidu

Pole deltoidu o przekątnych d_1, d_2 jest równe $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Dowód

Aby wyznaczyć pole deltoidu, oznaczmy go $ABCD$, skorzystamy z umiejętności obliczania pól trójkątów prostokątnych. Oznaczmy przez S punkt przecięcia przekątnych tego deltoidu. Pole deltoidu jest sumą trójkątów ABC i ADC , więc pole deltoidu jest sumą pól tych trójkątów.

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ADC} = \frac{|BS| \cdot |AC|}{2} + \frac{|DS| \cdot |AC|}{2} = \frac{|AC|}{2} (|BS| + |DS|) = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Zauważmy, że romb i kwadrat są deltoidami, więc do obliczenia ich pól możemy zastosować bezpośrednio twierdzenie o polu deltoidu.

Przykład 7

Pokażemy, że dla deltoidu o przekątnych d_1, d_2 zachodzi nierówność $P \leq \frac{1}{4} (d_1^2 + d_2^2)$, gdzie P – pole deltoidu.

Rozwiązanie

Skorzystamy ze wzoru na pole deltoidu $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. Wówczas:

$$\frac{d_1 \cdot d_2}{2} \leq \frac{1}{4} (d_1^2 + d_2^2),$$

$$0 \leq \frac{1}{4} d_1^2 - \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 + \frac{1}{4} d_2^2,$$

$$0 \leq \left(\frac{1}{2} d_1 - \frac{1}{2} d_2 \right)^2.$$

Ostatnia nierówność jest spełniona zawsze, więc teza została udowodniona.

Zestawienie wzorów stosowanych do obliczania pól czworokątów z wykorzystaniem przekątnych.

Czworokąt	Wzór na pole z wykorzystaniem przekątnych
Trapez	brak
Równoległobok	$\frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin \gamma$
Prostokąt	$\frac{d^2}{2} \sin \gamma$
Deltoid	$\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

Czworokąt	Wzór na pole z wykorzystaniem przekątnych
Romb	$\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$
Kwadrat	$\frac{d^2}{2}$

Słownik

czworokąt wypukły

czworokąt, którego wszystkie cztery kąty wewnętrzne są wypukłe

trapez

czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych

trapez równoramienny

trapez, którego ramiona mają równe długości

równoległobok

czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych

prostokąt

czworokąt, który ma wszystkie kąty proste

kwadrat

czworokąt, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty proste

romb

czworokąt, który ma wszystkie boki równe

deltoid

czworokąt wypukły, który ma dwie pary równych boków sąsiednich

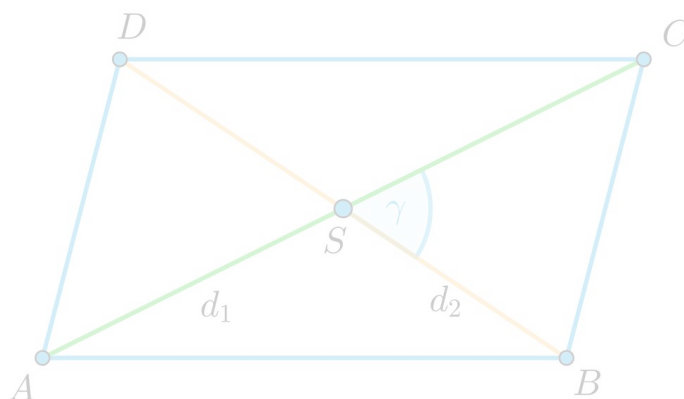
twierdzenie cosinusów

w dowolnym trójkącie kwadrat długości boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków tego trójkąta pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta między tymi bokami

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

1. Wybierz figurę na ekranie. Zobaczysz tam wzór na obliczenie pola z wykorzystaniem przekątnych.
2. Przy pomocy suwaków ustaw odpowiednie dane i zobacz wyliczoną wartość pola (dokładną lub przybliżoną) tej figury.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D14CqVYVx>

Polecenie 2

Zaznacz prawidłowe odpowiedzi w poniższym teście jednokrotnego wyboru.

1. Jeżeli w równoległoboku przekątne mają długości $d_1 = 8$, $d_2 = 11$ i kąt między nimi $\alpha = 135^\circ$, to pole równoległoboku jest równe:

☐ 88.

☐ 44.

☐ $22\sqrt{2}$.

☐ $44\sqrt{2}$.

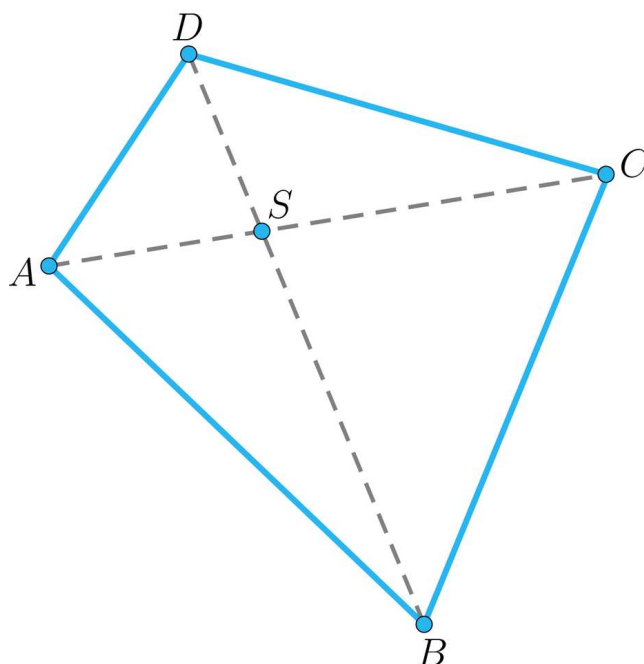
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Korzystając z oznaczeń z rysunku oblicz i wpisz poprawną wartość w odpowiednie pole.



1. $P_{ABCD} = 73$, $P_{ABC} = 48$. Wtedy $P_{ACD} =$.

2. $P_{ABCD} = 100$, $P_{ABC} = 65$, $P_{ADS} = 19$. Wtedy $P_{CDS} =$.

3. $P_{ABCD} = 81$, $AB \parallel CD$, $P_{ABS} = 35$, $P_{ADS} = 20$. Wtedy $P_{CDS} =$.

Ćwiczenie 2



Ocen prawdziwość zdań. Zaznacz Prawdę lub Fałsz przy każdym zdaniu.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Jeżeli w równoległoboku znamy tylko długości jego przekątnych, to możemy obliczyć jego pole.	☐	☐
Jeżeli w deltoidzie znamy tylko długości jego przekątnych, to możemy obliczyć jego pole.	☐	☐
Jeżeli w prostokącie znamy tylko długość jego przekątnej, to możemy obliczyć jego pole.	☐	☐
Jeżeli w rombie znamy tylko długości jego przekątnych, to możemy obliczyć jego pole.	☐	☐
Jeżeli w kwadracie znamy tylko długość jego przekątnej, to możemy obliczyć jego pole.	☐	☐

Ćwiczenie 3



Najczęściej stosowane proporcje ekranu telewizora to $16 : 9$, $14 : 9$, $4 : 3$. Najczęściej telewizory LCD mają wymiar $40''$, $42''$, $50''$, $60''$ co oznacza, że przekątna ekranu ma długość w calach 40, 42, 50, 60 cali.

Ćwiczenie 4

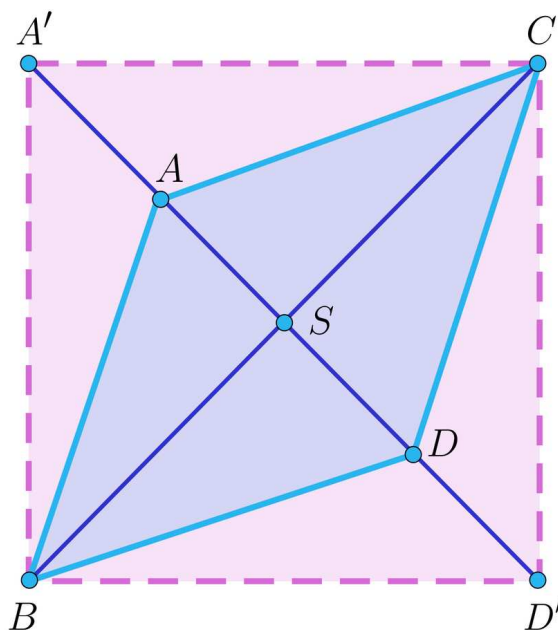


Ekran telewizora ma przekątną $d = 55$ cali i rozdzielczość 3840×2160 pikseli. Wyznacz pole powierzchni ekranu w centymetrach kwadratowych oraz wyznacz rozmiar piksela (przyjmujemy, że piksel jest kwadratem).

Ćwiczenie 5



Przekątne rombu $ABCD$ mają długości 4 i 8.

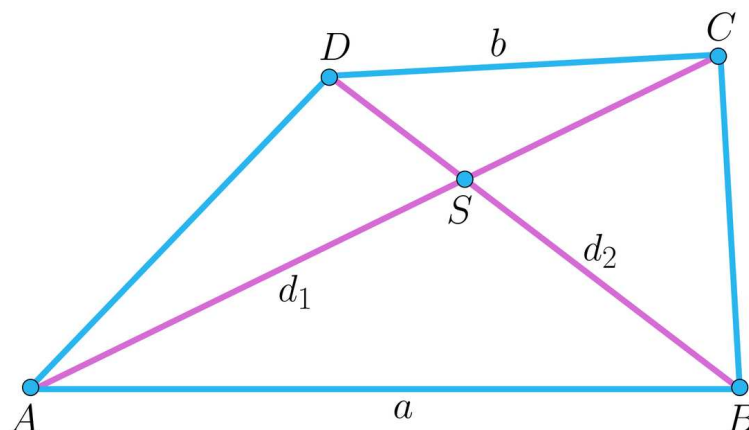


Na przedłużeniu krótszej przekątnej AD zaznaczono punkty A' i D' takie, że $|AA'| = |AS|$, $|DD'| = |DS|$. Wykaż, że czworokąt $A'BD'C$ jest kwadratem. Oblicz pole rombu $ABCD$ oraz pole czworokąta $A'BD'C$.

Ćwiczenie 6



Pokaż, że pola trójkątów ASD , BSC w trapezie z oznaczeniami na rysunku są równe.



Ćwiczenie 7



Wyznacz równoległobok o największym polu przy danych długościach przekątnych d_1, d_2 .
Wyznacz długości jego boków.

Ćwiczenie 8



Wyznacz prostokąt o największym polu przy danej długości przekątnej d . Wyznacz długości jego boków.

Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole czworokąta o danych przekątnych

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

4. korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

8. korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

9. wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;

11. stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

12. przeprowadza dowody geometryczne;

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1. wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa własności przekątnych w czworokątach,
- znajduje związki między przekątnymi i polami czworokątów,
- uzasadnia wzory na pola czworokątów na podstawie długości przekątnych i/lub dodatkowej informacji o czworokącie,
- wykorzystuje wzory na pola czworokątów w rozwiązywaniu zadań i zagadnień praktycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- technika niedokończonych zdań
- metoda kota i myszy
- lekcja odwrócona

Formy zajęć:

- praca indywidualna,
- praca w parach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- Komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji:

Przed lekcją

1. Uczniowie zapoznają się z twierdzeniami zawartymi w sekcji „Przeczytaj” oraz analizują przedstawione tam dowody.

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel przedstawia temat lekcji, wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie, metodą burzy mózgów, przypominają informacje o przekątnych czworokątów.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie krótko prezentują wiadomości, jakie uzyskali w domu, po zapoznaniu się z sekcją Przeczytaj.
2. Nauczyciel wyświetla symulację interaktywną a wybrany uczeń rozwiązuje Polecenie 2.
3. Uczniowie w parach, metodą kota i myszy, rozwiązują ćwiczenia 1 – 5 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi uczniów o podsumowania lekcji w kontekście nowych umiejętności, które nabyli na lekcji, wykorzystując technikę zdań niedokończonych.
2. Nauczyciel podsumowuje lekcję, wskazując na słabe i mocne strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Obliczanie pól i obwodów czworokątów

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może zostać wykorzystana przez uczniów:

- podczas przygotowywania się do zajęć.
- do utrwalania wiedzy.
- jako inspiracja do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji.
- jako poszerzenie wiedzy w lekcjach: „Pole kwadratu”, „Pole prostokąta”, „Pole rombu”, „Pole trapezu”, „Pole równoległoboku”.