



Wielomian wielu zmiennych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wielomian wielu zmiennych

Źródło: Carlos Irineu Da Costa, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Aby obliczyć pole powierzchni całkowitej sześcianu, wystarczy znać długość jego krawędzi (oznaczymy ją jako x). Pole powierzchni sześcianu możemy wówczas wyznaczyć, wstawiając odpowiednią wartość do wzoru $P(x) = 6x^2$, czyli obliczyć wartość pewnego wielomianu. W przypadku prostopadłościanu do obliczenia pola powierzchni nie wystarczy znajomość długości jednej krawędzi. Jeżeli jednak będziemy znać długości trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka (oznaczymy je jako x , y i z), to pole powierzchni obliczymy jako wartość funkcji tych trzech zmiennych: $P(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2zx$. Ta funkcja również może być nazwana wielomianem, ale jest to wielomian z trzema zmiennymi.

W tym materiale zajmiemy się właśnie wielomianami kilku zmiennych.

Twoje cele

- Rozpoznasz jednomiany zawierające więcej niż jedną zmienną.
- Rozróżnisz wielomiany wielu zmiennych.
- Określisz stopień wielomianu wielu zmiennych.

Przeczytaj

Definicja: Jednomian wielu zmiennych

Jednomianem wielu zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_k$ nazywamy iloczyn liczb i tych zmiennych.

Zmienne w jednomianie mogą być podniesione do potęgi o wykładniku naturalnym. Zauważmy też, że współczynnikiem liczbowym jednomianu może być w szczególności liczba jeden lub minus jeden.

Przykład 1

- $-5x^3y^2z$ - to jednomian zmiennych x, y i z
- $\frac{14}{25}x_1^5x_2^6$ - to jednomian zmiennych x_1, x_2

Jednomian wielu zmiennych jest więc uogólnieniem pojęcia jednomianu jednej zmiennej.

Definicja: Stopień jednomianu wielu zmiennych

Stopniem jednomianu wielu zmiennych nazywamy sumę wykładników potęg wszystkich zmiennych danego jednomianu.

Jeżeli jednomian jest liczbą różną od zera, to jest on jednomianem stopnia 0.

Jeżeli jednomian jest zerem (stałą równą 0), to przyjmuje się, że nie ma on określonego stopnia.

Przykład 2

- **Stopień jednomianu** $-5x^3y^2z$ wynosi $3 + 2 + 1 = 6$.
- Stopień jednomianu $\frac{14}{25}x_1^5x_2^6$ to $5 + 6 = 11$.
- Jednomian $6\sqrt{5}$ jest jednomianem stopnia 0.
- Jednomian zerowy 0 nie ma określonego stopnia.

Definicja: Wielomian wielu zmiennych

Wielomianem wielu zmiennych $W(x_1, x_2, \dots, x_k)$ nazywamy sumę jednomianów z tymi zmiennymi.

Zauważmy, że nie w każdym jednomianie muszą wystąpić wszystkie podane zmienne.

Przykład 3

Wielomianami wielu zmiennych są:

- $W(x, y, z) = 5x^3y^2z - 11xyz^3 + 4x - 21$
- $W(a, b, c, d) = a^3b^2c^5d^4 - 3abcd + ab^2cd$

Definicja: Stopień wielomianu wielu zmiennych

Stopniem wielomianu wielu zmiennych $W(x_1, x_2, \dots, x_k)$ nazywamy najwyższy spośród stopni jednomianów, których suma tworzy dany wielomian (po zredukowaniu wyrazów podobnych).

Podając stopień wielomianu można użyć oznaczenia $\text{st}(W(x_1, x_2, \dots, x_k))$ lub $\text{deg}(W(x_1, x_2, \dots, x_k))$.

Przykład 4

Krótki film pokazuje, jak ustalić **stopień wielomianu** trzech zmiennych

$$W(x, y, z) = 5x^3yz - 7x^2y^2z + 12xyz^6 - 4x^5y + 2z - 13$$

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DZhd2ibQx>

Film nawiązujący do treści materiału

Przykład 5

Dany jest wielomian stopnia ósmego $W(x, y) = x^4y^4 + 4$.

Polecenie

Jak zapisać $W(x, y)$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia czwartego?

Rozwiązanie

- Posłużymy się dwoma wzorami skróconego mnożenia: na różnicę kwadratów i na kwadrat sumy.
- $W(x, y) = x^4y^4 + 4x^2y^2 + 4 - 4x^2y^2$
- $W(x, y) = (x^2y^2 + 2)^2 - (2xy)^2$
- $W(x, y) = (x^2y^2 + 2 - 2xy)(x^2y^2 + 2 + 2xy)$

Słownik

jednomian wielu zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_k$

iloczyn liczb i tych zmiennych.

Zmienne w jednomianie mogą być podniesione do potęgi o wykładniku naturalnym.

stopień jednomianu wielu zmiennych

suma wykładników potęg wszystkich zmiennych danego jednomianu.

- Jeżeli jednomian jest stałą różną od zera, to jest on jednomianem stopnia 0;
- Jeżeli jednomian jest zerem (stałą równą 0), to przyjmuje się, że nie ma on określonego stopnia

stopień wielomianu wielu zmiennych $W(x_1, x_2, \dots, x_k)$

najwyższy spośród stopni jednomianów, których suma tworzy dany wielomian (po zredukowaniu wyrazów podobnych), $\deg(W(x_1, x_2, \dots, x_k))$

wielomian wielu zmiennych $W(x_1, x_2, \dots, x_k)$

suma jednomianów z tymi zmiennymi

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj rozwiązane poniżej przykłady.

Niech $a = x + y + z$, $b = xy + yz + zx$, $c = xyz$.

Prezentujemy, jak przedstawić podany wielomian $W(x, y, z)$ z niewiadomymi x, y, z jako wielomian $P(a, b, c)$ z niewiadomymi a, b i c w trzech przypadkach:

- $W(x, y, z) = x^3yz + xy^3z + xyz^3$
- $W(x, y, z) = x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2$
- $W(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DMpFPGNpV>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wielomianu wielu zmiennych.

Polecenie 2

Niech $a = x + y + z$, $b = xy + yz + zx$, $c = xyz$.

Przedstaw wielomian $W(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ z niewiadomymi x, y, z jako wielomian $P(a, b, c)$ z niewiadomymi a, b i c .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wpisz stopień każdego z podanych jednomianów

Jednomian	Stopień
$31x^6y^{11}z^4$	
$-15abc^2de$	
$\frac{3x_1^5x_2^{11}x_3}{7}$	
$12\sqrt[3]{5}$	

Ćwiczenie 2

Dany jest wielomian. Na podstawie instrukcji poniżej zaznacz odpowiednim kolorem jednomiany.



$W(x, y, z) =$
 $4x^6+4x^5+x^4+20x^3z+10x^2z+9x^2+12xy^2+6xz^3+4y^4+4y^2z^3+z^6+25z^2$

Ćwiczenie 3



Suma dwóch jednomianów stopnia trzeciego

☐ może być wielomianem stopnia pierwszego

☐ może być wielomianem stopnia trzeciego

☐ może być wielomianem stopnia zerowego

☐ może być wielomianem zerowym

☐ może być wielomianem stopnia drugiego

Ćwiczenie 4



Określ stopień wielomianu

$$W(a, b) = a^{10} - a^6b^9 - 6a^6b^3 + 2a^5b^7 - 3a^4b^6 + 9a^2b^6 - 3a^2b^3 - 6ab^{10} + b^{14} - 1$$

☐ 54

☐ 10

☐ 15

☐ 14

☐ 13

Ćwiczenie 5



Określ stopień wielomianu $W(x, y, z) = (x^4 y^3 z - 3xy^7 z + 4z^9)^{11}$

☐ 37

☐ 99

☐ 9

☐ 26

☐ 286

Ćwiczenie 6



Dany jest wielomian $W(x, y) = 10x^2 - 12xy - 4x + 5y^2 - 6y + 13$. Wskaż wszystkie zdania prawdziwe:

☐ Najmniejszą wartością wielomianu jest 0.

☐ Wielomian $W(x, y)$ przyjmuje tylko wartości dodatnie.

☐ Wielomian można przekształcić do postaci
 $W(x, y) = (3x - 2y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 3)^2$.

☐ Jeżeli liczby x i y będą nieparzyste, to $W(x, y)$ przyjmie wartość nieparzystą.

Ćwiczenie 7



Dany jest wielomian $W(x, y) = 4x^4 + y^4$. Uporządkuj kolejne kroki rozumowania pokazującego, jak zapisać ten wielomian w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego.

$$W(x, y) = (2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2$$



$$W(x, y) = 4x^4 + y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2$$



$$W(x, y) = (4x^4 + 4x^2y^2 + y^4) - 4x^2y^2$$



$$W(x, y) = (2x^2 + y^2 + 2xy) \cdot (2x^2 + y^2 - 2xy)$$



Ćwiczenie 8



Niech $a = x + y$, $b = xy$. Dopasuj do wielomianu $W(x, y)$ z niewiadomymi x, y odpowiedni wielomian $P(a, b)$ z niewiadomymi a, b

$$W(x, y) = x^2y^3 + x^3y^2$$

$$P(a, b) = ab^2$$

$$W(x, y) = x^2 + y^2$$

$$P(a, b) = a^2b - b^2$$

$$W(x, y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$$

$$P(a, b) = ab$$

$$W(x, y) = x^4 + y^4$$

$$P(a, b) = a^3 - 3ab$$

$$W(x, y) = x^3 + y^3$$

$$P(a, b) = a^2 - 2b$$

$$W(x, y) = x^2y + xy^2$$

$$P(a, b) = a^4 - 4a^2b + 2b^2$$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wielomian wielu zmiennych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje jednomiany zawierające więcej, niż jedną niewiadomą.
- buduje wielomiany wielu zmiennych.
- określa stopień wielomianu kilku zmiennych,
- tworzy algorytm wyznaczania stopnia wielomianu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji**Przed lekcją:**

- Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” i przygotowują po trzy pytania związane z tematem lekcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat lekcji. Uczniowie spisują na tablicy pytania, które przygotowali w domu.
2. Nauczyciel omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji, wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się z materiałem przedstawionym w animacji.
2. Nauczyciel dzieli uczniów na 4 grupy. Każda z grup po kolei udziela odpowiedzi na jedno z pytań związanych z tematem lekcji (przygotowanych przez uczniów w domu i zapisanych na tablicy na początku lekcji). Jeżeli odpowiedź jest niepełna uzupełniają ją uczniowie z kolejnej grupy, dopiero na końcu nauczyciel.
3. Uczniowie indywidualnie rozwiązują polecenia z sekcji animacja.
4. Zadania (numer 4, 5, 6, 7, 8) z sekcji „Sprawdź się”. uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi uczniów o podsumowanie. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do ustalonych na początku lekcji kryteriów sukcesu.

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1, 2, 3 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Wielomiany](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy przed kartkówką. Animację można wykorzystać w tematach związanych z przekształcaniem wyrażeń algebraicznych.