Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Ostrosłup prawidłowy czworokątny to bryła, z którą najczęściej będziesz się spotykać w szkole średniej. Znana jest od wielu tysięcy lat – wystarczy wspomnieć Piramidę Cheopsa. Gdybyś chciał obliczyć objętość tej budowli, musiałbyś znać jedynie długość jego krawędzi podstawy oraz wysokość.

Piramida Cheopsa

Źródło: DEZALB, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Warto wyjechać do Egiptu i zmierzyć ją.

W tym materiale dowiesz się, jak obliczyć objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.

Twoje cele

- Obliczysz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.
- Wykorzystasz trygonometrię w zadaniach.

Przeczytaj

Ostrosłup prawidłowy czworokątny to ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat, a ściany boczne są identycznymi trójkątami równoramiennymi.

Zacznijmy od ogólnego wzoru na objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H,$$

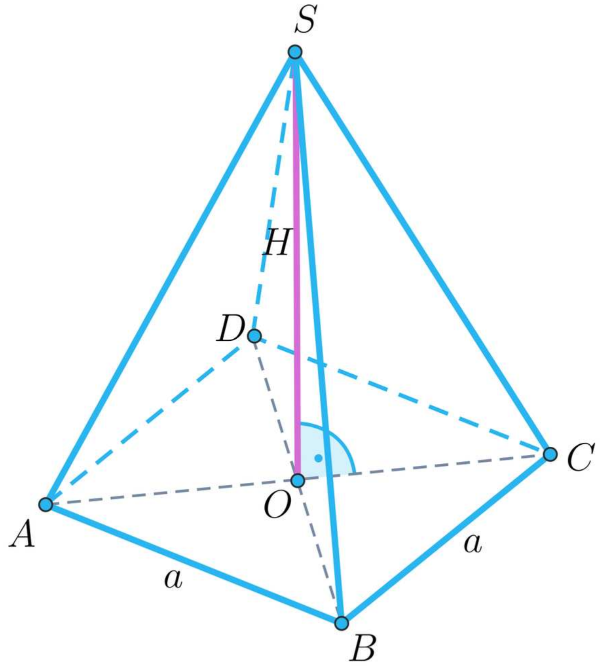
gdzie:

P_p – pole podstawy,

H – wysokość ostrosłupa.

Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat, zatem wzór na jego objętość możemy przedstawić następująco:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H.$$



Przykład 1

Jaką wysokość powinien mieć ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy długości $10\ \text{cm}$, aby miał tę samą objętość co ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy długości $12\ \text{cm}$ i wysokości $9\ \text{cm}$?

Rozwiązanie

Zacznijmy od policzenia objętości drugiego ostrosłupa:

$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 9 = 432,$

Niech H – wysokość pierwszego ostrosłupa. Wtedy:

$432 = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot H,$

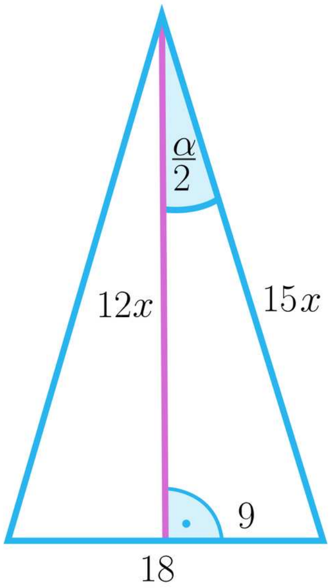
$H = 12,96\ [\text{cm}].$

Przykład 2

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym kąt pomiędzy ramionami ma miarę α. Oblicz objętość ostrosłupa, wiedząc, że $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{12}{15}$, a krawędź podstawy ma długość $18\ \text{cm}$.

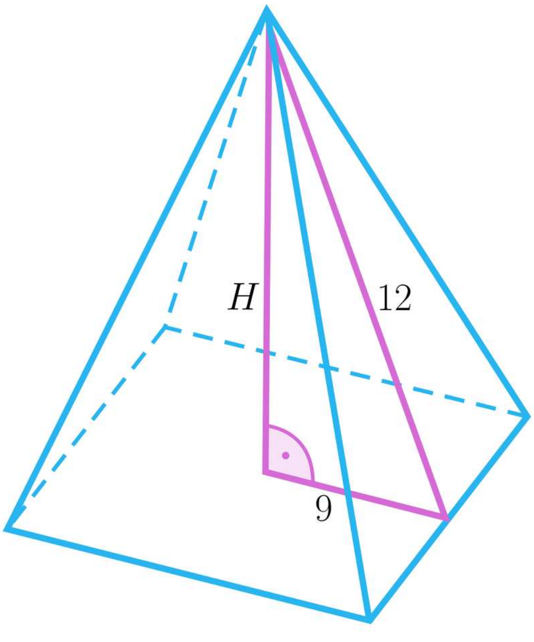
Rozwiązanie

Przeanalizujmy rysunek i ścianę boczną trójkąta.



Na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy, że $x = 1$, czyli krawędź boczna ma długość 15 cm, a wysokość ściany bocznej 12 cm.

Policzmy teraz wysokość ostrosłupa.



$H = \sqrt{12^2 - 9^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 18^2 \cdot 3\sqrt{7} = 324\sqrt{7}$

Przykład 3

Objętość ostrosłupa wyrażona jest za pomocą wyrażenia algebraicznego $27a^3b$. Ile wynosi wysokość ostrosłupa, jeśli jego przekątna podstawy ma długość b?

Rozwiązanie

Zacznijmy od przyjęcia założeń: $a > 0$ i $b > 0$.

Niech H oznacza wysokość ostrosłupa.

$P_p = \frac{b \cdot b}{2} = \frac{b^2}{2}$

$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$

Mamy więc równanie:

$27a^3b = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot H,$

$162a^3b = b^2H.$

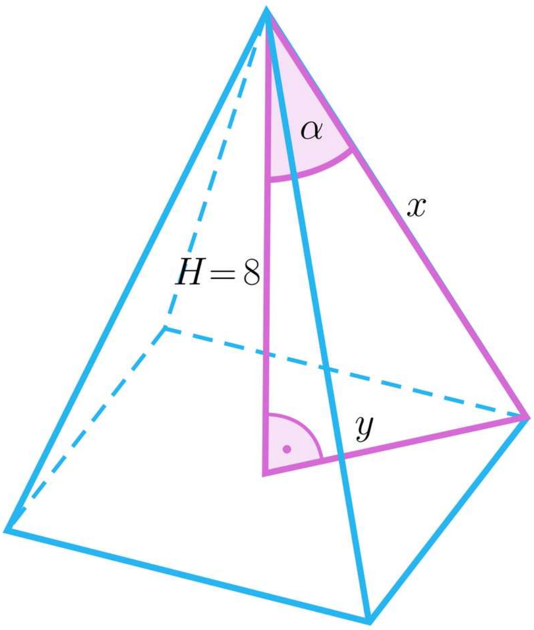
Stąd wysokość ostrosłupa wynosi:

$H = \frac{162a^3}{b}.$

Przykład 4

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości równej 8, jeśli cosinus kąta między wysokością tego ostrosłupa a krawędzią boczną jest równy $\frac{4}{5}$.

Rozwiązanie



Z definicji cosinusa mamy $\frac{4}{5} = \frac{8}{x}$,

$x = 10$, więc $y = 6$.

$P_p = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72$

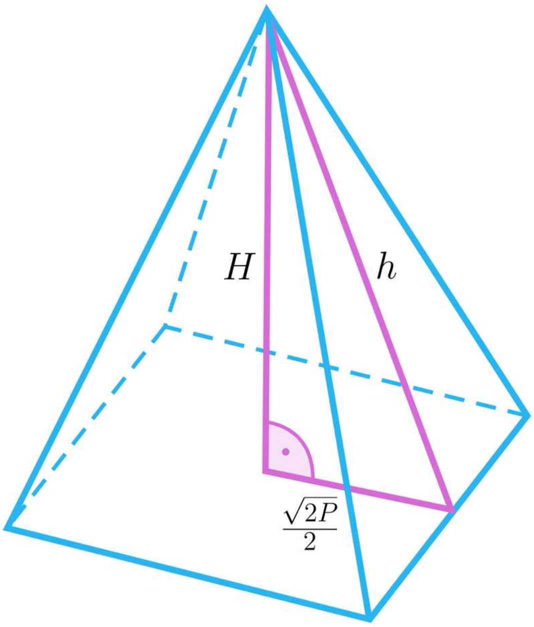
$V = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 8 = 192$

Przykład 5

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe $2P$, a wysokość jego ściany bocznej jest równa h. Wyznacz objętość ostrosłupa.

Rozwiązanie

Skoro pole podstawy wynosi $2P$, to krawędź podstawy ma długość $\sqrt{2P}$. Zróbmy rysunek pomocniczy.



Obliczmy wysokość ostrosłupa:

$$H^2 + \left(\frac{\sqrt{2P}}{2}\right)^2 = h^2,$$

$$H^2 = h^2 - \frac{2P}{4},$$

$$H^2 = \frac{4h^2 - 2P}{4},$$

$$H = \frac{\sqrt{4h^2 - 2P}}{2}.$$

Objętość ostrosłupa wynosi więc:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2P \cdot \frac{\sqrt{4h^2 - 2P}}{2} = \frac{p}{3}\sqrt{4h^2 - 2P}.$$

Zauważmy, że kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego zależy od długości krawędzi podstawy oraz od długości jego wysokości.

Zwróćmy uwagę, co się dzieje, gdy zwiększamy tylko wysokość ostrosłupa (np. dwukrotnie), albo tylko długość krawędzi podstawy (również dwukrotnie). Wyciągnij wnioski.

Jaki ma to wpływ na objętość naszej bryły?

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DP6kHc2Ub

Przykład 6

Jak zwiększy się objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, gdy jego wysokość zwiększymy 3 razy a krawędź podstawy 2 razy?

Rozwiązanie

Niech H – wysokość ostrosłupa,

a – długość krawędzi podstawy.

Objętość wynosi $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H$.

Jeśli wysokość zwiększymy 3 razy, a krawędź podstawy 2 razy, to otrzymamy:

$$V' = \frac{1}{3}(2a)^2 \cdot 3H = \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \cdot 3H = \frac{1}{3} \cdot 12a^2H = 12V,$$

co oznacza, że objętość zwiększyła się 12 razy.

Słownik

ostrosłup prawidłowy czworokątny

ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat, a wszystkie ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z treścią animacji 3D. Zwróć uwagę na wykorzystanie trójkątów prostokątnych w ostrosłupach, twierdzenie Pitagorasa i trygonometrię. Pomagają one w obliczeniu objętości omawianych ostrosłupów.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DaANfq6dU

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej objętości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.

Polecenie 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości $2\sqrt{3}$ i krawędzi bocznej długości 5.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

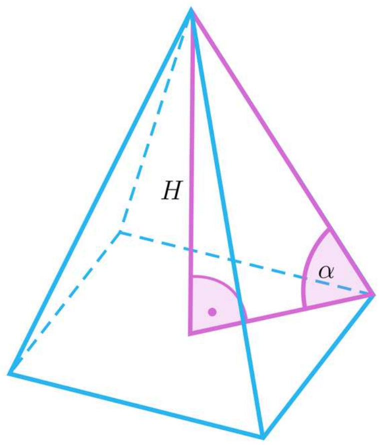
Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 4 cm i objętość $\frac{128}{3} \text{cm}^3$.

Ćwiczenie 6

Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny.



Ćwiczenie 7

Wyznacz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole podstawy jest równe P, a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi γ .

Ćwiczenie 8

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α . Oblicz objętość ostrosłupa, wiedząc, że krawędź podstawy ma miarę 6, a $\cos\alpha = \frac{41}{50}$.

Dla nauczyciela

Autor: Grażyna Kiełczykowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzór na objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego,
- oblicza objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego w różnych zadaniach,
- wykorzystuje trygonometrię w zadaniach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka,
- analiza pomysłów,
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca z całą klasą,
- praca w grupach,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu,
- zeszyt,
- tablica,
- pisak.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Zaciekawienie ucznia ostrosłupami prawidłowymi czworokątnymi poprzez pokazanie Piramidy Cheopsa, która jest przykładem takiej bryły.
- Burza mózgów na temat możliwych wymiarów piramidy.
- Odpowiedź na pytanie, które wymiary są potrzebne do obliczenia objętości takiej bryły.
- Przypomnienie wzoru na objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.

Faza realizacyjna:

- Uczniowie analizują w parach przykłady 1-5 w sekcji „Przeczytaj". Zgłaszają pytania na forum klasy, wspólnie z nauczycielem udzielają na nie odpowiedzi.
- Uczniowie analizują aplet geogebry (przykład 6 w sekcji „Przeczytaj"), który pokazuje, że kształt ostrosłupa zależy od długości krawędzi podstawy oraz wysokości ostrosłupa. Nauczyciel zadaje pytanie, czy na podstawie informacji o długościach krawędzi dwóch ostrosłupów można wywnioskować, który z nich ma większą objętość. Czy tak jest zawsze? Od czego to zależy?
- Uczniowie dzielą się na grupy, oglądają animację 3D a następnie rozwiązują polecenia z nią związane.
- Nauczyciel inicjuje wspólne omówienie wyników.
- Nauczyciel pyta uczniów, jak mogą zmienić się wymiary odcinków w ostrosłupie, aby objętość była taka sama, dwukrotnie mniejsza, trzykrotnie większa, itd.
- Uczniowie rozwiązują ćwiczenia zamknięte z sekcji „Sprawdź się". Wspólna analiza odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli).
- Nauczyciel prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

Rozwiązanie ćwiczeń otwartych z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Objętość ostrosłupa

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animację 3D do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jej treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące objętości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Można też zaproponować uczniom animację 3D jako powtórzenie wiadomości ze stereometrii lub przykłady zastosowań twierdzenia Pitagorasa.