



Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Do tej pory mówiliśmy o funkcjach trygonometrycznych argumentu, który był miarą kąta – stopniową lub łukową. W tej lekcji skupimy się na tym, aby zdefiniować funkcje trygonometryczne liczb rzeczywistych. Okazuje się, że po tym zabiegu można zupełnie “oderwać się” od geometrii oraz miar kątów i czysto analitycznie badać własności funkcji trygonometrycznych takie jak: monotoniczność, okresowość, znak, parzystość, nieparzystość, wykresy oraz ich własności itp. Te z kolei znakomicie sprawdzają się przy rozwiązywaniu równań trygonometrycznych.

Twoje cele

- Wykonasz dzielenie z resztą liczby rzeczywistej przez liczbę rzeczywistą.
- Zastosujesz definicje funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej.

Przeczytaj

Zacniemy od zdefiniowania dzielenia z resztą liczby rzeczywistej przez liczbę rzeczywistą.

Podzielić z resztą liczbę rzeczywistą x przez liczbę rzeczywistą dodatnią y oznacza przedstawić liczbę x w postaci

$$x = k \cdot y + r$$

gdzie:

k – jest liczbą całkowitą,

r – jest liczbą nieujemną mniejszą niż y .

Liczbę r w powyższej definicji nazywamy resztą z dzielenia liczby x przez liczbę y .

Liczba k jest największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą liczby $\frac{x}{y}$.

Przykład 1

Wykonamy **dzielenie z resztą** liczby x przez liczbę y , wyznaczając iloraz całkowity k i resztę r :

a) $x = 7, y = \frac{1}{3}$

Liczba k jest największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą ilorazu $\frac{7}{\frac{1}{3}} = 21$.

Zatem $k = 21$. Czyli $7 = 21 \cdot \frac{1}{3} + 0$.

Stąd reszta z dzielenia liczby 7 przez liczbę $\frac{1}{3}$ jest równa 0.

b) $x = 13, y = \frac{5}{3}$

Liczba k jest największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą ilorazu $\frac{13}{\frac{5}{3}} = \frac{39}{5} = 7\frac{4}{5}$.

Zatem $k = 7$. Czyli $13 = 7 \cdot \frac{5}{3} + \frac{4}{3}$.

Stąd reszta z dzielenia liczby 13 przez liczbę $\frac{5}{3}$ jest równa $\frac{4}{3}$.

c) $x = 5\frac{2}{7}, y = 1\frac{3}{7}$

Liczba k jest największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą ilorazu

$$\frac{5\frac{2}{7}}{1\frac{3}{7}} = \frac{\frac{37}{7}}{\frac{10}{7}} = \frac{37}{7} \cdot \frac{7}{10} = \frac{37}{10} = 3\frac{7}{10}$$

Zatem $k = 3$. Czyli $5\frac{2}{7} = 3 \cdot 1\frac{3}{7} + 1$.

Stąd reszta z dzielenia liczby $5\frac{2}{7}$ przez liczbę $1\frac{3}{7}$ jest równa 1.

$$\text{d) } x = -\frac{11}{9}, y = \frac{2}{3}$$

Liczba k jest największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą ilorazu

$$\frac{-\frac{11}{9}}{\frac{2}{3}} = -\frac{11}{9} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{11}{6} = -1\frac{5}{6}.$$

$$\text{Zatem } k = -2. \text{ Czyli } -\frac{11}{9} = -2 \cdot \frac{2}{3} + r.$$

Stąd reszta r z dzielenia liczby $5\frac{2}{7}$ przez liczbę $1\frac{3}{7}$ jest równa

$$r = -\frac{11}{9} + 2 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{11}{9} + \frac{4}{3} = -\frac{11}{9} + \frac{12}{9} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{e) } x = -\frac{17\sqrt{2}}{3}, y = 2\sqrt{2}$$

Liczba k jest największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą ilorazu

$$\frac{-\frac{17\sqrt{2}}{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{17\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{17}{6} = -2\frac{5}{6}.$$

$$\text{Zatem } k = -3. \text{ Czyli } -\frac{17\sqrt{2}}{3} = -3 \cdot 2\sqrt{2} + r.$$

Stąd reszta r z dzielenia liczby $-\frac{17\sqrt{2}}{3}$ przez liczbę $2\sqrt{2}$ jest równa

$$r = -\frac{17\sqrt{2}}{3} + 6\sqrt{2} = -\frac{17\sqrt{2}}{3} + \frac{18\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ponieważ funkcje trygonometryczne są nierozzerwalnie połączone z miarami kątów, najważniejsze będzie dla nas wyznaczanie reszty z dzielenia przez pewne szczególne liczby takie jak 2π oraz $\frac{\pi}{2}$.

Przykład 2

Podzielimy z resztą liczbę x przez liczbę y , wyznaczając iloraz całkowity k oraz resztę r .

$$\text{a) } x = \frac{20\pi}{3}, y = 2\pi$$

Liczba k jest największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą ilorazu

$$\frac{\frac{20\pi}{3}}{2\pi} = \frac{20\pi}{3} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

$$\text{Zatem } k = 3. \text{ Czyli } \frac{20\pi}{3} = 6\frac{2}{3} \cdot \pi = 3 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}.$$

Stąd reszta z dzielenia liczby $\frac{20\pi}{3}$ przez liczbę 2π jest równa $\frac{2\pi}{3}$.

$$\text{b) } x = -\frac{20\pi}{3}, y = 2\pi$$

Liczba k jest największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą ilorazu

$$\frac{-\frac{20\pi}{3}}{2\pi} = -\frac{20\pi}{3} \cdot \frac{1}{2\pi} = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}.$$

$$\text{Zatem } k = -4. \text{ Czyli } -\frac{20\pi}{3} = -6\frac{2}{3} \cdot \pi = -4 \cdot 2\pi + r.$$

Stąd reszta r z dzielenia liczby $-\frac{20\pi}{3}$ przez liczbę 2π jest równa $r = 4 \cdot 2\pi - 6\frac{2}{3} \cdot \pi = \frac{4\pi}{3}$.

$$\text{c) } x = \frac{20\pi}{3}, y = \frac{\pi}{2}$$

Liczba k jest największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą ilorazu

$$\frac{\frac{20\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{20\pi}{3} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

Zatem $k = 13$. Czyli $\frac{20\pi}{3} = 13 \cdot \frac{\pi}{2} + r$.

Stąd reszta r z dzielenia liczby $\frac{20\pi}{3}$ przez liczbę $\frac{\pi}{2}$ jest równa

$$r = \frac{20\pi}{3} - 13 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{40\pi}{6} - \frac{39\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{d) } x = -\frac{20\pi}{3}, y = \frac{\pi}{2}$$

Liczba k jest największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą ilorazu

$$\frac{-\frac{20\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{20\pi}{3} \cdot \frac{2}{\pi} = -\frac{40}{3} = -13\frac{1}{3}.$$

Zatem $k = -14$. Czyli $-\frac{20\pi}{3} = -14 \cdot \frac{\pi}{2} + r$.

Stąd reszta r z dzielenia liczby $-\frac{20\pi}{3}$ przez liczbę $\frac{\pi}{2}$ jest równa

$$r = -\frac{20\pi}{3} + 14 \cdot \frac{\pi}{2} = -6\frac{2}{3} \cdot \pi + 7\pi = \frac{\pi}{3}.$$

Przypomnijmy, że największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą danej liczby a nazywamy częścią całkowitą (lub cechą) liczby a i oznaczamy $[a]$. Różnicę liczby a i jej części całkowitej nazywamy **częścią ułamkową** (lub mantysą) i oznaczamy $\{a\}$. Zatem $\{a\} = a - [a]$.

W omawianym przez nas wzorze $x = ky + r$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \langle 0, y \rangle$, k jest częścią całkowitą ilorazu $\frac{x}{y}$, zatem $k = \left[\frac{x}{y} \right]$, czyli wzór przyjmuje postać:

$$x = \left[\frac{x}{y} \right] \cdot y + r \Leftrightarrow r = x - \left[\frac{x}{y} \right] \cdot y \Leftrightarrow r = y \left(\frac{x}{y} - \left[\frac{x}{y} \right] \right) \Leftrightarrow r = y \cdot \left\{ \frac{x}{y} \right\}$$

Wynika stąd, że r jest iloczynem części ułamkowej ilorazu $\frac{x}{y}$ oraz liczby y .

Przykład 3

Wyznamy iloraz całkowity i resztę z dzielenia liczby 2020 przez π .

Iloraz całkowity to **część całkowita liczby** $\frac{2020}{\pi}$, zatem $k = \left[\frac{2020}{\pi} \right] = 642$. Reszta r

z dzielenia 2020 przez π jest równa

$$\pi \cdot \left\{ \frac{2020}{\pi} \right\} = \pi \cdot \left(\frac{2020}{\pi} - \left[\frac{2020}{\pi} \right] \right) = \pi \cdot \left(\frac{2020}{\pi} - 642 \right) = 2020 - 642\pi \approx 3,0975, \text{ co}$$

istotnie jest liczbą mniejszą od π .

Ważne!

Można zauważyć, że:

1. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dowolnej liczby dodatniej y istnieje dokładnie jedna liczba całkowita k oraz dokładnie jedna liczba $r \in \langle 0, y \rangle$ takie, że $x = ky + r$.
2. Każdej liczbie rzeczywistej x można przyporządkować jej resztę z dzielenia przez 2π . Reszta ta jest miarą łukową pewnego kąta z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Wobec powyższego:

- sinusem liczby rzeczywistej x nazywamy sinus kąta o mierze łukowej x_0 , gdzie x_0 jest resztą z dzielenia liczby x przez 2π ,
- cosinusem liczby rzeczywistej x nazywamy cosinus kąta o mierze łukowej x_0 , gdzie x_0 jest resztą z dzielenia liczby x przez 2π ,
- tangensem liczby rzeczywistej x nazywamy tangens kąta o mierze łukowej x_0 , gdzie x_0 jest resztą z dzielenia liczby x przez 2π (o ile tangens istnieje, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Przykład 4

$$\text{a) } \sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(-1 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{b) } \text{tg}\left(-\frac{23\pi}{6}\right) = \text{tg}\left(-2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{c) } \cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \cos\left(3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Przykład 5

Wykażemy, że $\sin \frac{51\pi}{5} = \cos \frac{-117\pi}{10}$.

Podzielimy z resztą liczby $\frac{51\pi}{5}$ oraz $\frac{-117\pi}{10}$ przez 2π :

$$\frac{51\pi}{5} = \frac{50\pi + \pi}{5} = \frac{50\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = 10\pi + \frac{\pi}{5} = 5 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{5}$$

$$\frac{-117\pi}{10} = \frac{-120\pi + 3\pi}{10} = -\frac{120\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = -12\pi + \frac{3\pi}{10} = -6 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{10}$$

Zatem:

$$\sin \frac{51\pi}{5} = \sin\left(5 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \sin \frac{\pi}{5}$$

$$\cos \frac{-117\pi}{10} = \cos\left(-6 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{10}\right) = \cos \frac{3\pi}{10}$$

Zauważmy teraz, że $\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$.

Stąd, na mocy tożsamości $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, otrzymujemy

$$\sin \frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos \frac{3\pi}{10}, \text{ co kończy dowód.}$$

Słownik

dzielenie z resztą liczb rzeczywistych

podzielić z resztą liczbę rzeczywistą x przez liczbę dodatnią y oznacza przedstawić liczbę x w postaci

$$x = k \cdot y + r$$

gdzie:

k – jest liczbą całkowitą,

r – należy do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$

iloraz całkowity liczb rzeczywistych x i y

największa liczba całkowita nie większa niż iloraz $\frac{x}{y}$; inaczej: część całkowita ilorazu $\frac{x}{y}$

część całkowita liczby x

największa liczba całkowita nie większa niż x , oznaczamy ją przez $[x]$

część ułamkowa liczby x

różnica liczby x oraz jej części całkowitej, oznaczamy ją przez $\{x\}$; zachodzi równość:

$$\{x\} = x - [x]$$


Infografika

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w infografice.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Wiedząc, że dziedziną funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ jest zbiór liczb $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, wyznacz dziedzinę funkcji o wzorze $g(x) = \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykonuje dzielenie z resztą liczby rzeczywistej przez liczbę rzeczywistą.
- stosuje definicje funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego;
- metoda krokodyła.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają na czym polega dzielenie z resztą. Analizują Przykład 1 z sekcji „Przeczytaj”.
2. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej”.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują pozostałe przykłady z sekcji „Przeczytaj”. Po zapoznaniu się z każdym zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy
2. Uczniowie indywidualnie analizują treści w sekcji „Infografika”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

[Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej”.