



Przypomnienie podstawowych pojęć trygonometrycznych i rozwiązywanie zadań

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Przypomnienie podstawowych pojęć trygonometrycznych i rozwiązywanie zadań

Źródło: sraone, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Trygonometria (czyli dosłownie „mierzenie trójkąta”) to dział matematyki, który zajmuje się zależnościami między bokami i kątami w trójkątach. Znajomość trygonometrii pozwala na przykład na wyznaczenie trzeciego boku trójkąta, gdy znamy dwa jego boki i kąt między tymi bokami.

Rozwój trygonometrii miał znaczący wpływ na odkrycia w astronomii i usprawnił pomiary geodezyjne.

W tym materiale poznasz podstawowe funkcje trygonometryczne: sinus, cosinus, tangens i cotangens. Przy czym wiadomości dotyczące funkcji cotangens wykraczają poza treści wskazane w podstawie programowej.

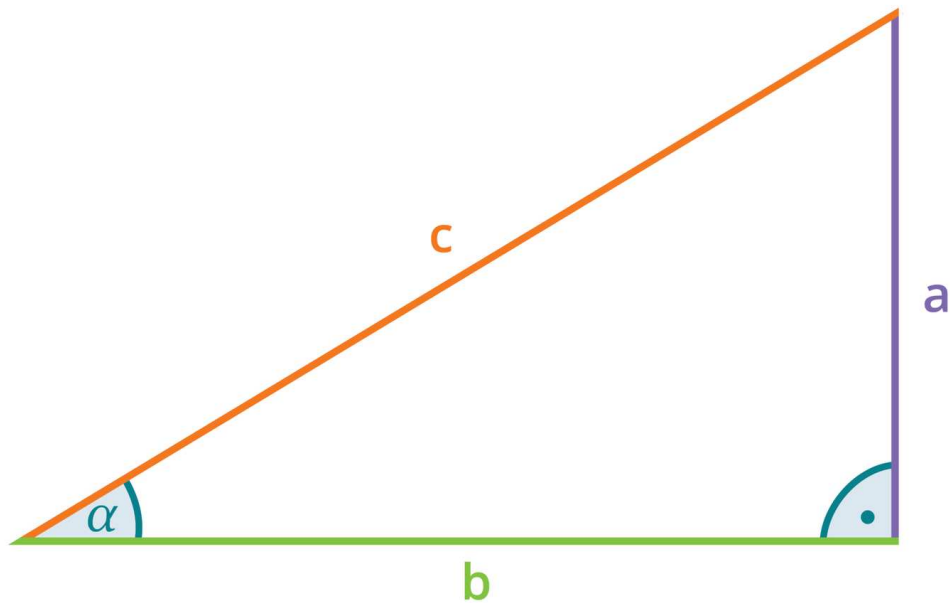
Twoje cele

- Poznasz podstawowe pojęcia trygonometryczne.
- Obliczysz brakujące kąty i boki w trójkątach prostokątnych.

Przeczytaj

Podstawowe pojęcia

Niech dany będzie trójkąt prostokątny taki, jak na rysunku.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

W trójkącie prostokątnym określone są pewne związki między bokami, a kątami, zwane funkcjami trygonometrycznymi. Podajmy ich definicje.

Sinus kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym jest to stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinus kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym jest to stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Zauważmy, że zarówno sinus, jak i cosinus wyrażają stosunek jednej z przyprostokątnych do przeciwprostokątnej.

Tangens kąta ostrego α w trójkącie przyprostokątnym jest stosunkiem długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości drugiej z przyprostokątnych.

Tangens, podobnie jak sinus, jest wyrażony za pomocą ułamka, którego licznikiem jest długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw danego kąta ostrego.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Cotangens kąta ostrego α w trójkącie przyprostokątnym jest stosunkiem długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Przedrostek ko- (co-), jaki pojawia się w nazwach cosinus i cotangens jest stosowany w języku polskim w opisie czynności oraz zjawisk wykonywanych wspólnie.

Cosinus i cotangens są wyrażone za pomocą ułamka, którego licznikiem jest długość przyprostokątnej leżącej przy danym kącie ostrym.

Z przedstawionych wyżej zależności można wywnioskować kilka podstawowych tożsamości. Po pierwsze, dzieląc sinus przez cosinus otrzymamy tangens.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Z kolei cotangens to cosinus przez sinus.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Widzimy, że tangens i cotangens to liczby wzajemnie odwrotne.

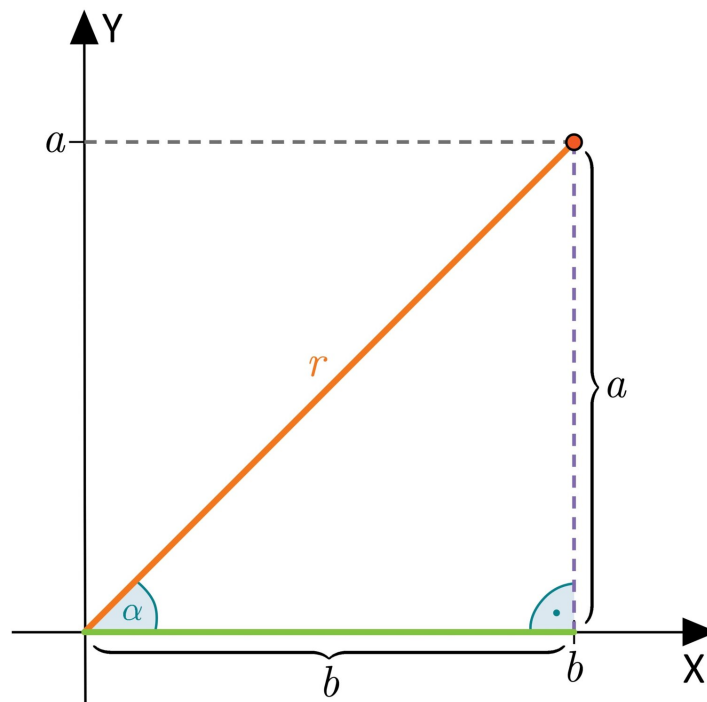
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Zwróćmy teraz uwagę na podstawową tożsamość trygonometryczną, z którą często będziemy spotkać się w różnych działach matematyki. Ta tożsamość zwana jest „jedynką trygonometryczną”.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Wyprowadzenie podanego wzoru jest proste, jeśli na rysunku poniżej zauważymy pewne prawidłowości, które już znamy.



Na początek przyjmijmy założenie, że $a, b > 0$, a co za tym idzie $r > 0$. Zauważmy teraz, że trójkąt na rysunku jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych równych a i b oraz przeciwprostokątnej równej r . Na mocy twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać:

$$a^2 + b^2 = r^2.$$

Jednocześnie możemy skorzystać z definicji funkcji sinus: $\sin \alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \sin \alpha$.

Analogicznie $\cos \alpha = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cos \alpha$.

Tak wyznaczone zależności podstawimy teraz do wzoru wynikającego z twierdzenia Pitagorasa:

$$(r \sin \alpha)^2 + (r \cos \alpha)^2 = r^2$$

$$r^2 \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \alpha = r^2$$

Dzieląc obie strony przez r^2 (pamiętamy o początkowym założeniu, że $r > 0$).

Mamy: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, co należało wykazać.

Słownik

sinus

sinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym to stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości przeciwprostokątnej

cosinus

cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym to stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej

tangens

tangens kąta ostrego w trójkącie przyprostokątnym jest stosunkiem długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości drugiej z przyprostokątnych

cotangens

cotangens kąta ostrego w trójkącie przyprostokątnym jest stosunkiem długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta

Film samouczek

Polecenie 1

Statek A płynie z prędkością 8 węzłów pod kątem $33^\circ 45'$ na południe od kierunku zachodniego. O godzinie 9 : 35 załoga statku A zauważyła statek B , znajdujący się w odległości A mil na zachód od statku A . Statek B płynie dalej na zachód z prędkością 5 węzłów.

O której godzinie statek B znajdzie się na północ od statku A ?

Uwaga! 1 węzeł to 1 mila morska na godzinę.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1GfIHpdW>

Film przedstawiający rozwiązywanie zadań tekstowych z geometrii i trygonometrii.

Polecenie 2

Jak zmieni się czas, w ciągu którego statek B znajdzie się dokładnie na północ od statku A , jeżeli statek A przedstawiony w filmie będzie płynął pod kątem 20° na południe od kierunku zachodniego?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uzupełnij tabelę wartościami funkcji trygonometrycznych.

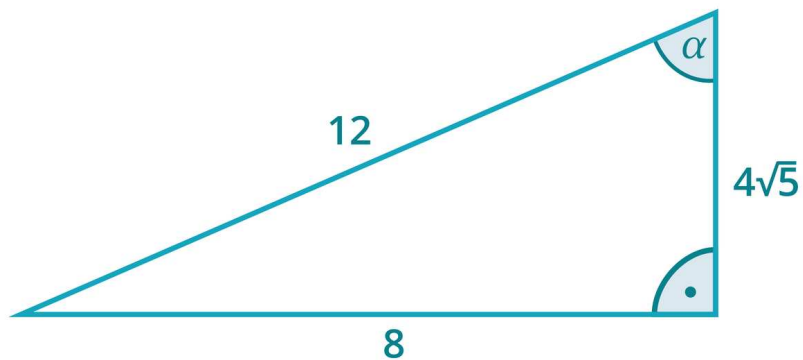
$\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$

α	30°	45°
60°		
$\sin \alpha$		
$\cos \alpha$		
$\operatorname{tg} \alpha$		

Ćwiczenie 2



W trójkącie prostokątnym dane są długości boków jak na rysunku poniżej.



Zaznacz prawdziwą równość.

☐ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

☐ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

☐ $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

☐ $\sin \alpha = \frac{2}{3}$

Ćwiczenie 3



Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, wtedy $\cos \alpha$ jest równy:

☐ $\frac{2}{5}$

☐ $\frac{3}{5}$

☐ $\frac{4}{5}$

☐ $\frac{1}{5}$

Ćwiczenie 4



Jeżeli $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 30^\circ$, to:

☐ $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha} = 2$

☐ $\frac{\sin \beta}{\cos \alpha} = 1$

☐ $\sin \beta + \cos \alpha = 1$

☐ $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5



Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = 0,6$. Wówczas:

☐ $\cos \alpha = 0,8$ i $\operatorname{tg} \alpha = 0,4$

☐ $\cos \alpha = 0,4$ i $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$

☐ $\cos \alpha = 0,8$ i $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$

☐ $\cos \alpha = 0,4$ i $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$

Ćwiczenie 6



Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$. Wówczas $\cos \alpha$ jest równy:

☐ $\frac{10}{13}$

☐ $\frac{12}{13}$

☐ $\frac{5}{12}$

☐ $\frac{5}{13}$

Ćwiczenie 7



Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 3 i 9. Sinus najmniejszego kąta tego trójkąta jest równy:

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

☐ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

☐ $\frac{\sqrt{10}}{30}$

Ćwiczenie 8



Połącz w pary równe sobie wyrażenia.

$\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$

$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$

$\sqrt{2}$

$\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$

$\frac{3}{2}$

$\sin 60^\circ + \cos 60^\circ$

$\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$

1

Ćwiczenie 9



Dla kąta ostrego α , $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ile wyniesie $\sin^2 \alpha$?

Ćwiczenie 10



Dla kąta ostrego α , $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ile wyniesie $\cos \alpha$?

☐ $\frac{1}{4}$

☐ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{\sqrt{13}}{4}$

Dla nauczyciela

Autor: Adam Jackowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przypomnienie podstawowych pojęć i rozwiązywanie zadań trygonometrycznych

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1. wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;
2. znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
3. znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyjaśnia podstawowe pojęcia trygonometrii
- opisuje, w jakich sytuacjach można wykorzystać funkcje trygonometryczne
- wykorzystuje posiadaną wiedzę do wyznaczania brakujących kątów i boków w trójkątach prostokątnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- quiz,
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem filmu i ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg zajęć:

Przed lekcją

Ochotnicy zapoznają się z treścią lekcji i przygotowują quiz wiedzy z podstawowych pojęć trygonometrii dla kolegów i koleżanek.

Faza wstępna

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej uczniowie prezentują podstawowe pojęcia trygonometryczne.
3. Uczniowie na tablicy rysują mapę myśli związaną z podstawowymi pojęciami trygonometrycznymi oraz odpowiednimi przykładami.

Faza realizacyjna

1. Ustalenie zasad zabawy (quiz). Nauczyciel dzieli klasę na drużyny i wykorzystuje przygotowane przed lekcją pytania quizowe do przeprowadzenia rozgrywek trygonometrycznych. Drużyny rywalizują między sobą, zbierając punkty za każdą poprawną odpowiedź. Nauczyciel ocenia aktywność i zaangażowanie uczniów.
2. Praca z filmem. Uczniowie oglądają i omawiają go wraz z nauczycielem. Wspólnie analizują podobne zadanie do zaprezentowanego.
3. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca

1. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

2. Na zakończenie zajęć uczniowie rozmawiają o tym, w jakiego typu zadaniach matematycznych można będzie wykorzystać funkcje trygonometryczne.

Materiały pomocnicze:

[Wprowadzenie do trygonometrii](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Uczniowie mogą przeanalizować treść filmu jako pracę własną przed lekcją lub po niej, jako podsumowanie.