Pole czworokąta opisanego na okręgu

Pole czworokąta opisanego na okręgu

Źródło: Jude Beck on Unsplash, domena publiczna.

Podczas tej lekcji przypomnimy własności czworokąta opisanego na okręgu oraz utrwalimy rożne wzory na pole czworokąta. Odwołamy się do wielu wzorów, definicji i twierdzeń dotyczących czworokątów.

> **Twoje cele**
>
> - Zastosujesz wzory na pole czworokąta.
> - Określisz własności czworokątów opisanych na okręgu.
> - Wykorzystasz własności czworokątów opisanych na okręgu w zadaniach geometrycznych.
> - Podasz wzór na pole czworokąta, na którym jednocześnie można opisać okrąg i w który można wpisać okrąg, gdy dane są długości jego boków.

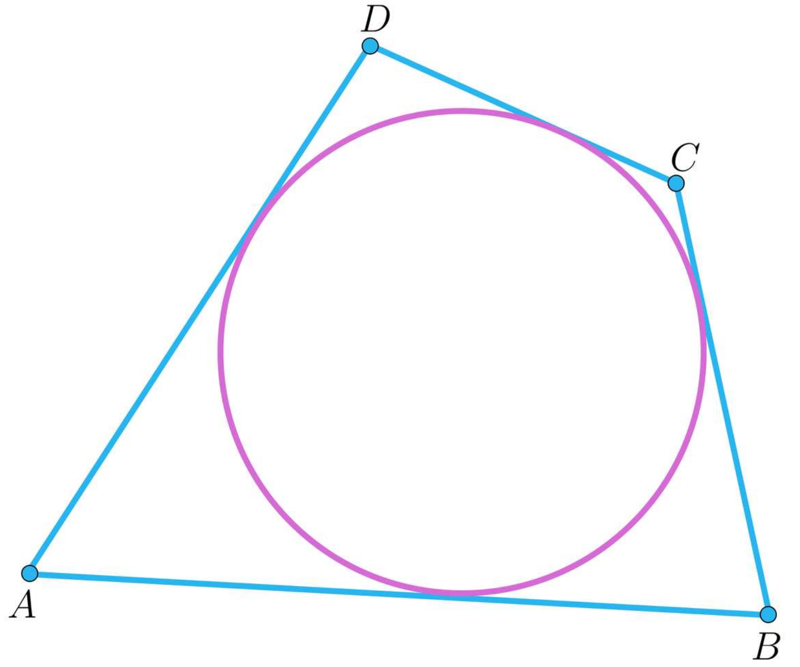
Przeczytaj

Zacznijmy od przypomnienia definicji i najważniejszych własności czworokąta opisanego na okręgu.

> **Definicja: Czworokąt opisany na okręgu**
>
> Jeżeli na okręgu obierzemy cztery różne punkty i poprowadzimy przez nie styczne, to punkty przecięcia kolejnych stycznych będą wierzchołkami czworokąta opisanego na okręgu.

lub inaczej:

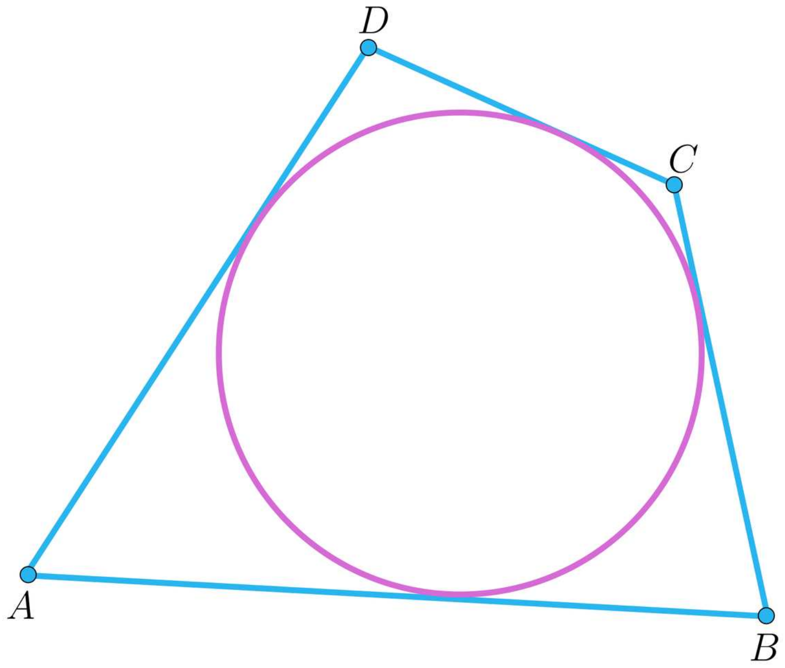
> **Definicja: Okrąg wpisany w czworokąt**
>
> Okrąg, który jest styczny do każdego boku wielokąta.
>
> Odcinki łączące środek okręgu wpisanego z punktami styczności na bokach wielokąta są do nich prostopadłe i są promieniami tego okręgu.



Warto zauważyć, że nie w każdy czworokąt można wpisać okrąg.

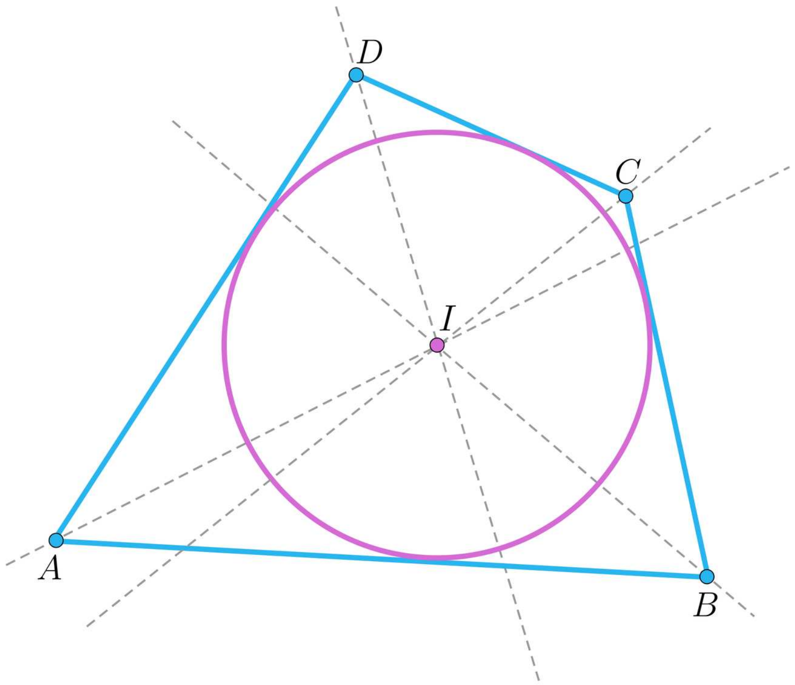
Własności czworokąta opisanego na okręgu

> **Ważne!**
>
> Czworokąt można opisać na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe:
>
> $$|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$$



Przypomnijmy, że dowód powyższego twierdzenia opiera się na równości odcinków stycznych.

Dowolny czworokąt można opisać na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich jego kątów przecinają się jednym punkcie, który jest środkiem okręgu.



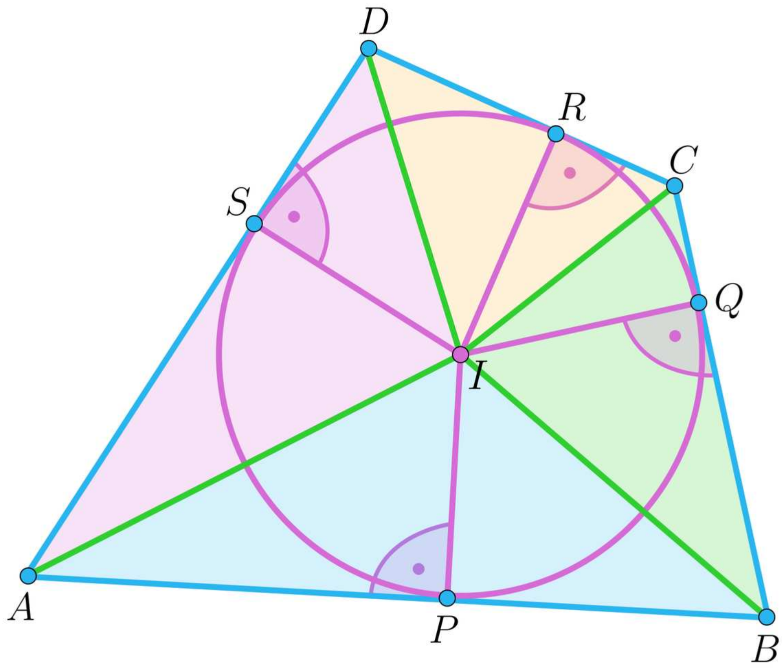
Z powyższych wzorów wynika, że jeżeli w równoległobok można wpisać okrąg, to jest on rombem.

Twierdzenie: Pole czworokąta opisanego na okręgu o promieniu r

Pole czworokąta $ABCD$ opisanego na okręgu o promieniu r wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) \cdot r$$

Dowód



Połączmy wierzchołki czworokąta ze środkiem okręgu. Dostajemy cztery trójkąty, których wysokości są równe promieniowi okręgu. Stosując wzór na pole trójkąta i sumując te cztery trójkąty otrzymujemy:

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot r + \frac{1}{2}|BC| \cdot r + \frac{1}{2}|CD| \cdot r + \frac{1}{2}|DA| \cdot r =$$

$$= \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) \cdot r$$

Dla zainteresowanych

Dla czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, których długości boków to a, b, c, d pole wyraża się wzorem:

$$P = \sqrt{abcd}$$

Dowód:

Przypomnijmy **wzór Brahmagupty** na pole czworokąta wpisanego w okrąg:

$$P = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

gdzie $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

Z drugiej strony, gdy skorzystamy z własności, że w czworokącie opisanym na okręgu sumy długości przeciwległych boków są równe $(a + c = b + d)$ otrzymujemy:

$$p - a = \frac{1}{2}(a+b+c+d) - a = \frac{1}{2}((a+c)+(b+d)) - a =$$

$$= \frac{1}{2}(a+c+a+c) - a = \frac{1}{2}(2a+2c) - a = a + c - a = c,$$

analogicznie:

$$p-b=\frac{1}{2}(a+b+c+d)-b=d,$$

$$p-c=\frac{1}{2}(a+b+c+d)-c=a$$

$$p-d=\frac{1}{2}(a+b+c+d)-d=b,$$

$$P=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}=\sqrt{abcd}.$$

Tym samym udowodniliśmy powyższy wzór.

Teraz pokażemy kilka zastosowań własności czworokąta opisanego na okręgu do wyznaczania jego pola. Zacznijmy od następującego, prostego przykładu.

Przykład 1

Wyznaczymy pole czworokąta opisanego na okręgu, którego obwód jest równy 30, natomiast promień okręgu wpisanego w ten czworokąt ma długość 3.

Rozwiązanie

Podstawiając bezpośrednio do wzoru:

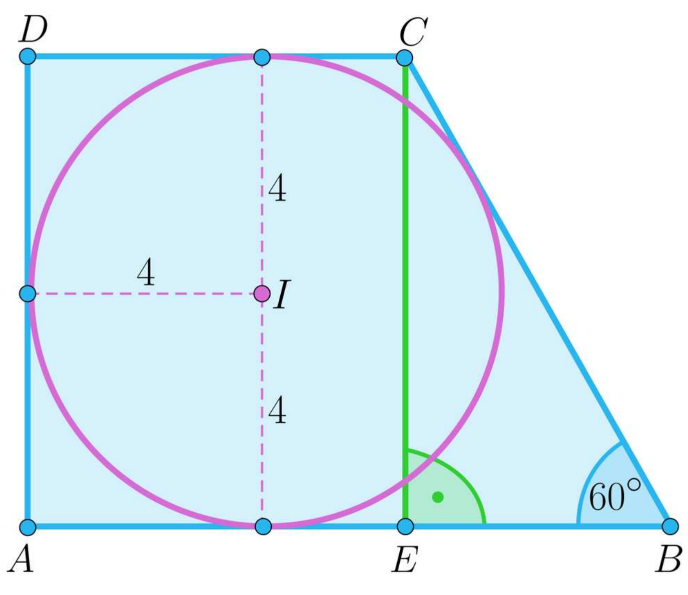
$P=\frac{1}{2}(|AB|+|BC|+|CD|+|DA|)\cdot r=\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 3=45.$

Teraz przećwiczymy wyznaczanie pola czworokąta opisanego na okręgu, w których będziemy korzystać z poznanych wzorów i faktów geometrii płaskiej.

Przykład 2

Trapez o kątach przy dłuższej podstawie równych 60° i 90° jest opisany na okręgu o promieniu 4. Zastanówmy się, jakie jest pole tego trapezu.

Rozwiązanie



Zauważmy, że w trapezie prostokątnym jego wysokość jest równa średnicy okręgu wpisanego, zatem

$|CE| = 2 \cdot 4 = 8.$

Mając długość boku CE i korzystając z własności trójkąta EBC możemy wyznaczyć długości jego boków:

$|EB| = \frac{8}{\sqrt{3}},$

natomiast

$|CB| = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$

Warto zauważyć, że nie musimy wyznaczać długości podstaw, gdyż suma podstaw potrzebna do wyznaczenia pola jest równa sumie ramion, a to już mamy.

Zatem szukane pole jest równe:

$P = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot h = \frac{1}{2}(|BC| + |DA|) \cdot h =$

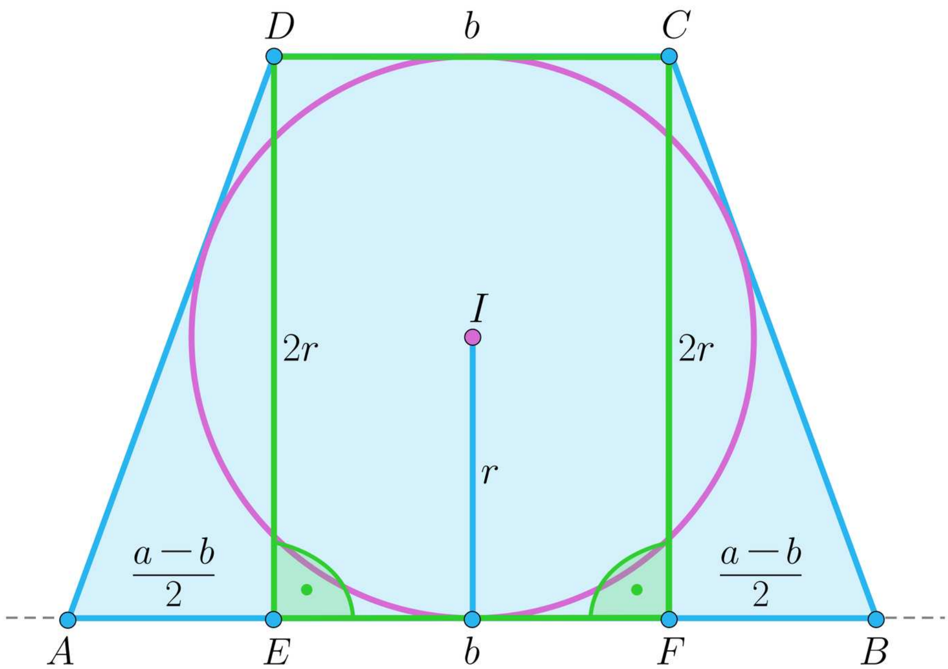
$= \frac{1}{2}\left(\frac{16\sqrt{3}}{3} + 8\right) \cdot 8 = 32\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right).$

Rozwiążemy teraz dwoma sposobami zadanie typu maturalnego.

Przykład 3

Trapez równoramienny $ABCD$ o długościach podstaw $|AB| = a$, $|CD| = b$ jest opisany na okręgu. Przyjmijmy, że $a > b$. Wyznaczymy promień okręgu wpisanego i pole trapezu.

Rozwiązanie



Zauważmy, że jeżeli w trapez równoramienny można wpisać okrąg, to znając długości jego podstaw łatwo jest obliczyć długość ramienia.

Oznaczmy $|AD| = |BC| = c$.

Wtedy $2c = a + b$, więc $c = \frac{a+b}{2}$.

Poprowadzimy teraz wysokości ED i CF. Widzimy, że czworokąt $EFCD$ jest prostokątem, więc $|EF| = |CD| = b$.

Zatem $|AE| = |FB| = \frac{a-b}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED lub FBC otrzymujemy:

$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (2r)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i skorzystaniu ze wzorów skróconego mnożenia otrzymujemy:

$4r^2 = \frac{a^2+2ab+b^2-\left(a^2-2ab+b^2\right)}{4} = ab$.

Zatem $r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$ natomiast pole trapezu jest równe:

$P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = \frac{1}{2}(a+b) \cdot 2r = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$.

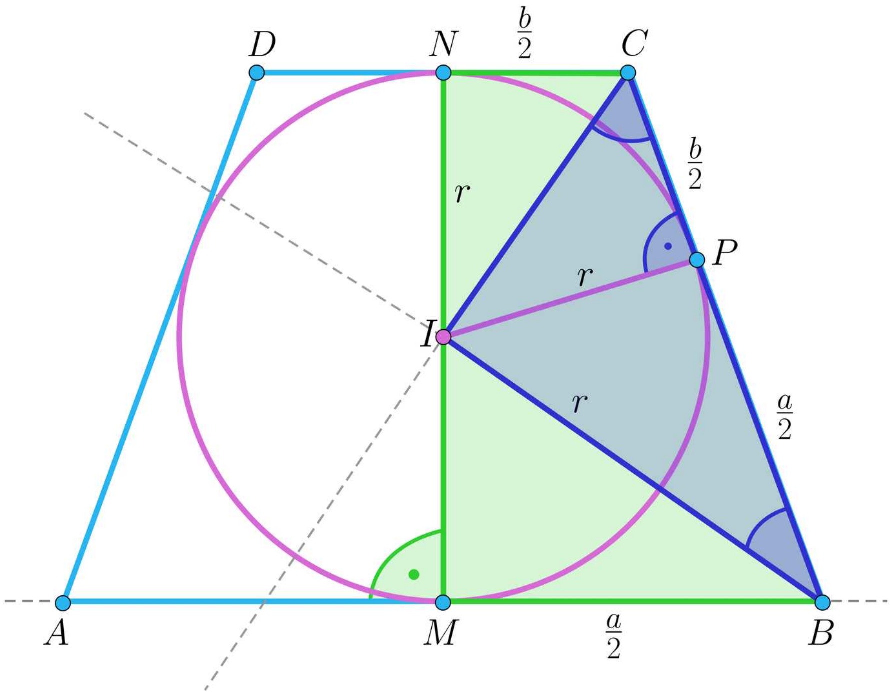
Teraz pokażemy zupełnie inne podejście do wyznaczenia promienia okręgu wpisanego w ten trapez.

Przykład 4

Trapez równoramienny $ABCD$ o długościach podstaw $|AB| = a$, $|CD| = b$ jest opisany na okręgu. Przyjmijmy, że $a > b$. Wyznaczymy promień okręgu wpisanego i pole trapezu.

Rozwiązanie

Zacznijmy od przeanalizowania poniższego rysunku:



Środek okręgu wpisanego oznaczmy I.

Wiemy, że środek okręgu wpisanego w wielokąt wypukły leży na dwusiecznych kątów wewnętrznych, zatem proste BI oraz CI są dwusiecznymi kątów przy wierzchołkach B i C trapezu $ABCD$.

Wiemy też, że suma miar kątów wewnętrznych leżących przy tym samym ramieniu dowolnego trapezu jest równa 180°, więc suma kątów CBI oraz BCI jest równa połowie tej sumy, a więc 90°. Trójkąt BCI jest zatem trójkątem prostokątnym, o kącie prostym przy wierzchołku I.

Wysokość IP z wierzchołka kąta prostego jest więc średnią geometryczną odcinków, na jakie podzieliła podstawę BC trójkąta IBC:

$$IP = r = \sqrt{BP \cdot CP}.$$

Teraz wystarczy, że zastosujemy twierdzenie o odcinkach stycznych i zauważymy równość odcinków:

$$|BP| = |BM| = \tfrac{1}{2}a$$

oraz

$$|CP| = |CN| = \tfrac{1}{2}b.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$r = \sqrt{\tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}b} = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

Mając długość promienia i podstaw analogicznie jak w poprzednim przykładzie wyznaczamy pole trapezu, które jest równe

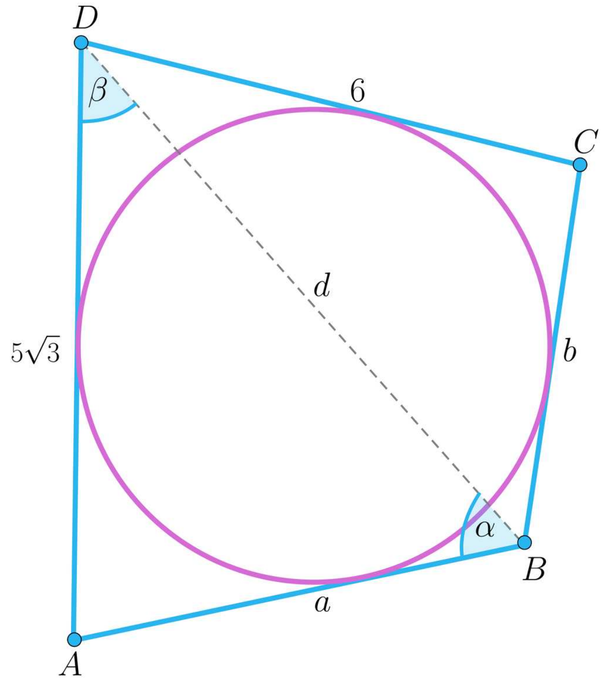
$P = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$.

Teraz przeanalizujemy problem, który będzie lekką modyfikacją innego zadania typu maturalnego.

Przykład 5

W czworokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 5\sqrt{3}$ i $|CD| = 6$ można wpisać okrąg. Przekątna BD tworzy z bokiem AB czworokąta kąt o mierze 60°, natomiast z bokiem AD kąt, którego sinus jest równy $\frac{3}{4}$. Wyznacz pole tego czworokąta.

Rozwiązanie



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku: $\alpha = 60^{\circ}$, $\sin\beta = \frac{3}{4}$, $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|BD| = d$.

Widzimy, że znając dwa kąty (lub wartości funkcji trygonometrycznej) oraz długość boku w trójkącie ABD możemy ten trójkąt rozwiązać.

Skorzystajmy z twierdzenia sinusów do wyznaczenia długości boku $|AB| = a$:

$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{5\sqrt{3}}{\sin\alpha}$,

$\frac{a}{\frac{3}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,

$a = \frac{15}{2}$.

Skorzystajmy z twierdzenia cosinusów do wyznaczenia długości przekątnej $|BD| = d$:

$$\left(5\sqrt{3}\right)^2 = d^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 - 2d\frac{15}{2}\cos 60^\circ.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe. Jego dodatnie rozwiązanie to długość przekątnej BD:

$$d = \frac{15+5\sqrt{21}}{4}.$$

Z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu wyznaczamy długość boku b:

$$b + 5\sqrt{3} = \frac{15}{2} + 6,$$

$$b = \frac{27-10\sqrt{3}}{2}.$$

Znając już wszystkie boki i przekątną czworokąta możemy wyznaczyć jego pole.

Podamy algorytm do wyznaczenia tego pola, gdyż większość boków to liczby niewymierne i uciążliwe rachunki mogłyby przysłonić ideę jego wyznaczania:

Zauważamy, że pole czworokąta jest równe sumie pól dwóch trójkątów: ABD i BCD.

Pole trójkąta ABC łatwo obliczamy ze wzoru:

$$\frac{1}{2}|AD| \cdot |BD| \cdot \sin\beta.$$

Natomiast, aby wyznaczyć pole trójkąta DBC wyznaczamy wartość cosinusa dowolnego kąta (z twierdzenia cosinusów).

Następnie, z jedynki trygonometrycznej, wyznaczamy sinus tego kąta.

Teraz stosujemy (ten sam co poprzednio) wzór na pole trójkąta DBC.

Szukane pole czworokąta $ABCD$ to, jak wspomnieliśmy, suma tych dwóch wyznaczonych pól.

Słownik

trapez

czworokąt (wypukły) mający przynajmniej jedną parę równoległych boków; (wybraną) parę boków równoległych nazywa się podstawami, pozostałe boki noszą nazwę ramion, odległość między podstawami nazywa się wysokością trapezu

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych i następnie rozwiąż polecenie poniżej.

Polecenie 2

Wyznaczymy długości boków i pole czworokąta wypukłego opisanego na okręgu o promieniu długości $2,4$, jeśli stosunek długości 3 kolejnych jego boków wynosi $1:2:4$ a obwód tego czworokąta jest równy 25.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

W trapez $ABCD$ o kątach przy dłuższej podstawie 30° i 60° wpisano okrąg o promieniu 3. Oblicz pole tego trapezu.

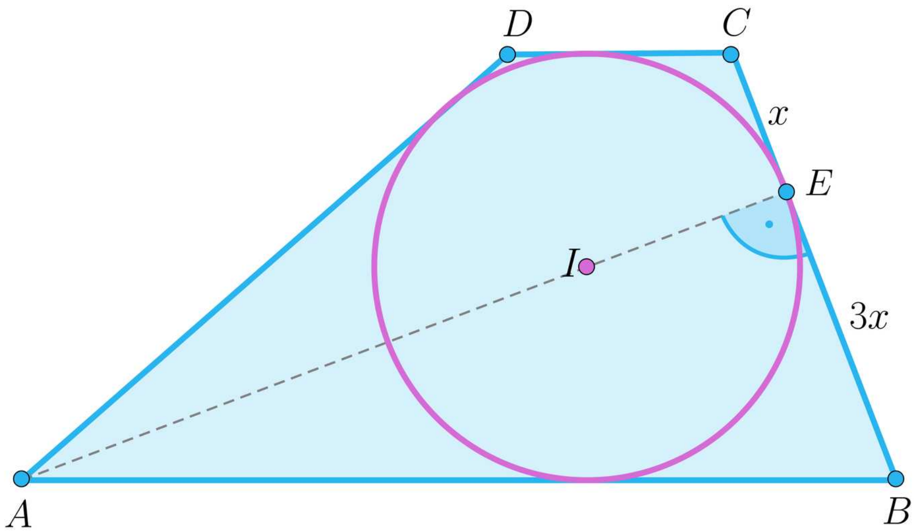
Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Na okręgu o promieniu 1 opisano trapez równoramienny, w którym stosunek długości podstaw jest równy $1 : 4$. Wyznacz pole tego trapezu.

Ćwiczenie 7

W trapez $ABCD$ wpisano okrąg o środku I. Prosta AI jest prostopadła do ramienia BC. Punkt styczności E okręgu z ramieniem BC i dzieli je w stosunku $|CE| : |EB| = 1 : 3$. Pole trójkąta ABE jest równe 9. Wyznacz pole trapezu $ABCD$.



Ćwiczenie 8

Ramiona trapezu opisanego na okręgu mają długości $3\ \mathrm{cm}$ i $5\ \mathrm{cm}$. Odcinek łączący środki ramion dzieli trapez na dwie figury, których stosunek pól wynosi $5 : 11$. Oblicz pole trapezu.

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Dziuba

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole czworokąta opisanego na okręgu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje własności czworokątów opisanych na okręgu.
- wykorzystuje własności czworokątów opisanych na okręgu w zadaniach geometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego;
- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Pole czworokąta opisanego na okręgu” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Galeria zdjęć interkatywnych”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- Obliczanie pól i obwodów czworokątów
- Koła i okręgi

Wskazówki metodyczne:

- Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać w realizacji lekcji o polu i obwodzie czworokąta.