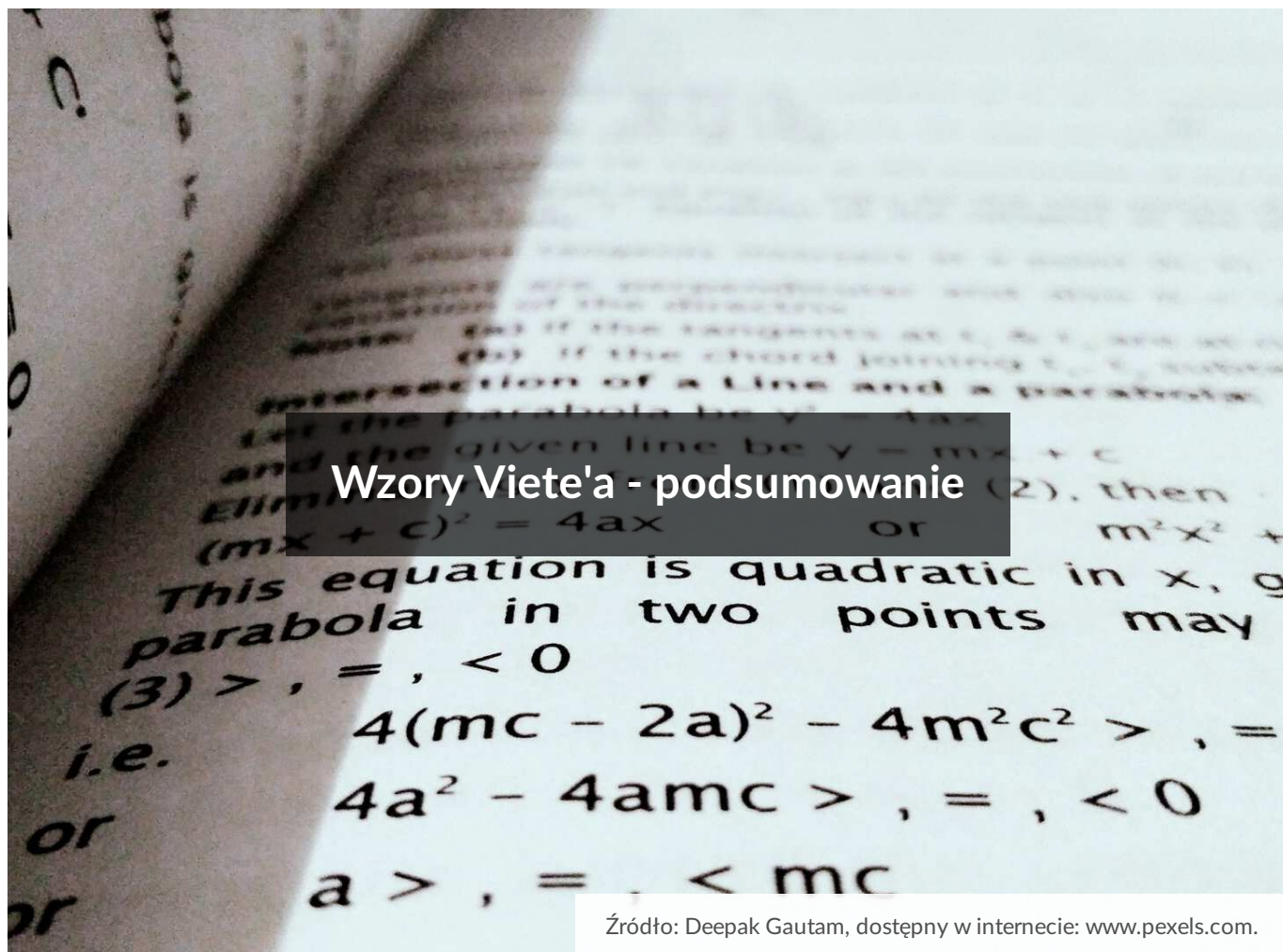




Wzory Viete'a - podsumowanie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Gra edukacyjna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: Deepak Gautam, dostępny w internecie: www.pexels.com.

W tym materiale powtórzymy i utrwalimy wiadomości dotyczące wzorów Viète'a, czyli wzorów wiążących pierwiastki równania kwadratowego z jego współczynnikami. Ich nazwa pochodzi od nazwiska francuskiego matematyka François Viète'a.

Będziemy rozwiązywać ćwiczenia interaktywne, bazując na części teoretycznej materiału i podanych przykładach



François Viète

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

- Przeanalizujesz sposoby rozwiązywania zadań z wykorzystaniem wzorów Viete'a.
- Zapoznasz się ze sposobem wyprowadzania wzorów Viete'a dla równania kwadratowego.
- Ocenisz swoją wiedzę, wykonując zestaw przygotowanych ćwiczeń.

Przeczytaj

François Viète'a był szesnastowiecznym matematykiem, któremu przypisuje się wynalezienie metody rozwiązywania równań poprzez wprowadzenie oznaczania niewiadomej literą i wykonywanie serii równoważnych przekształceń. Nie bał się nawet, w poszukiwaniu rozwiązań, korzystać ze zbioru liczb zespolonych. Jednak polscy uczniowie (i to tylko ci, którzy realizują matematykę na poziomie rozszerzonym) kojarzą głównie wzory Viète'a podające użyteczne własności pierwiastków równanie kwadratowego.

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ma dwa rozwiązania: x_1, x_2 , to prawdziwe są dla nich następujące zależności, zwane wzorami Viète'a:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

W szczególnym przypadku, dla $a = 1$, otrzymujemy:

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

Uwaga! Stosując powyższe twierdzenie musimy być czujni i pamiętać o założeniach twierdzenia.

Przykład 1

Rozważając równanie kwadratowe $x^2 + 2x + 4 = 0$, możemy zapisać, że $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$ oraz $\frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$, ale te wielkości nie odpowiadają sumie i iloczynowi pierwiastków rozważanego trójmianu. Dlaczego? Trójmian $x^2 + 2x + 4$ nie ma pierwiastków: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12 < 0$.

Ciekawostka

Wzory Viète'a można stosować, by rozwiązywać w pamięci równania kwadratowe. Jest to szczególnie łatwe, gdy $a = 1$. Weźmy na przykład równanie: $x^2 - 5x + 4 = 0$. Ze wzorów Viète'a otrzymujemy od razu, że iloczyn rozwiązań równania jest równy 4, a ich suma wynosi 5. Liczby spełniające takie warunki możemy odgadnąć. Rozwiązaniami tego równania są liczby 1 oraz 4.

Przykład 2

Nie wyznaczając rozwiązań x_1 i x_2 równania $2x^2 - 10x - 6 = 0$ obliczymy $x_1^2 + x_2^2$ (suma kwadratów pierwiastków trójmianu).

Sprawdźmy najpierw, że równanie ma dwa różne pierwiastki. W tym celu wyznaczmy wyróżnik odpowiedniego trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = 100 + 48 = 148 > 0,$$

zatem równanie ma dwa różne pierwiastki.

Spróbujmy zapisać wyrażenie $x_1^2 + x_2^2$ z wykorzystaniem sumy i iloczynu pierwiastków x_1, x_2 . Skorzystamy ze wzorów skróconego mnożenia:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Teraz wystarczy już zastosować [wzory Viète'a](#) i wykonać obliczenia:

$$x_1 + x_2 = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_1x_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\text{Stąd: } x_1^2 + x_2^2 = 5^2 - 2 \cdot (-3) = 25 + 6 = 31$$

Polecenie w przykładzie mogło wydawać się sztuczne: „nie wyznaczając rozwiązań x_1 i x_2 ...”. Ale spróbuj rozwiązać powyższe zadanie wyznaczając rozwiązania równania. Dzięki temu docenisz użyteczność stosowania wzorów Viète'a.

Podstawowym problemem przy zastosowaniach wzorów Viète'a jest zapisanie szukanej wielkości z wykorzystaniem sumy i iloczynu pierwiastków. Rozważmy kilka przykładów.

Przykład 3

Suma odwrotności pierwiastków trójmianu: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2}$.

Suma sześciątów pierwiastków trójmianu:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = \\ &= (x_1 + x_2) \cdot \left((x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2 \right) = \\ &= (x_1 + x_2)^3 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = \left(\frac{-b}{a} \right)^3 - 3 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{-b}{a} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} \end{aligned}$$

Suma odwrotności kwadratów pierwiastków trójmianu:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{\left(\frac{-b}{a} \right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a} \right)^2}$$

Przykład 4

Równanie $ax^2 + bx - 6 = 0$ ma dwa różne rozwiązania, których suma jest równa 2, a ich iloczyn wynosi (-3) . Znajdź współczynniki a i b tego równania.

Wykorzystując **wzory Viète'a** dla rozpatrywanego równania (aby równanie miało dwa rozwiązania, współczynnik a musi być różny od zera) otrzymujemy:

$$-\frac{b}{a} = 2$$

$$\frac{c}{a} = \frac{-6}{a} = -3$$

Z drugiego z powyższych równań łatwo wywnioskować, że współczynnik a wynosi 2. Wówczas z pierwszego równania wynika, że współczynnik b jest równy (-4) . Szukanym równaniem kwadratowym jest więc:

$$2x^2 - 4x - 6 = 0$$

W celu sprawdzenia poprawności otrzymanego wyniku wystarczy znaleźć rozwiązania równania kwadratowego $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Są one równe (-1) i 3 , a więc spełniają warunki zadania.

Wzorów Viète'a możemy używać również do określenia znaku pierwiastków trójmianu kwadratowego, bez konieczności ich wyliczania.

Zastanówmy się, kiedy oba pierwiastki trójmianu kwadratowego są dodatnie. Zwróćmy uwagę, że warunek $x_1 + x_2 > 0$ nie gwarantuje, że zarówno x_1 jak i x_2 są dodatnie. Musimy zażądać dodatkowo żeby oba pierwiastki miały taki sam znak, tj. żeby spełniony był warunek $x_1 x_2 > 0$. Analogicznie, żeby oba pierwiastki były ujemne muszą być spełnione równocześnie warunki $x_1 + x_2 < 0$ oraz $x_1 x_2 > 0$. Pierwiastki mają różne znaki wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek $x_1 x_2 < 0$.

Typowym przykładem wykorzystania powyższych obserwacji jest następujące zadanie.

Przykład 5

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + 1 = 0$ dwa różne pierwiastki dodatnie?

Zacniemy od odpowiedzi na pytania, dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa pierwiastki, tj. kiedy zachodzi nierówność $\Delta > 0$.

$$\Delta = m^2 - 4, \text{ więc } \Delta > 0 \text{ dla } m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$$

Drugi warunek, który sprawdzimy, to: $x_1 + x_2 > 0$, tj. $-\frac{b}{a} = -\frac{m}{1} > 0$. Zatem $m < 0$.

Zauważmy jeszcze, że $\frac{c}{a} = 1 > 0$.

Podsumowując, równanie ma dwa różne pierwiastki dodatnie, gdy $m \in (-\infty, -2)$.

Słownik

wzory Viète'a

wzory wiążące pierwiastki równania kwadratowego z jego współczynnikami; ich nazwa pochodzi od nazwiska francuskiego matematyka François Viète'a

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę memory, a następnie rozwiąż polecenia. W grze suma i iloczyn to suma i iloczyn pierwiastków pewnego równania kwadratowego, a liczby to rozwiązania tego równania.

Polecenie 2

Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2 + x + m = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

Polecenie 3

Znajdź pierwiastki równania $2x^2 + 4x - 6 = 0$. stosując wzory Viete'a.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dla równania $x^2 + x - 9 = 0$ oblicz Δ .

☐ $\Delta = 100$

☐ $\Delta = 8$

☐ $\Delta = 37$

☐ $\Delta = 64$

Ćwiczenie 2



W równaniu $-x^2 + 2x + 1 = 0$ określ znak Δ .

☐ $\Delta = 0$

☐ $\Delta < 0$

☐ $\Delta > 0$

Ćwiczenie 3



Dla równania $x^2 - 12x + 20 = 0$ oblicz sumę pierwiastków $x_1 + x_2$.

☐ $x_1 + x_2 = 2$

☐ $x_1 + x_2 = 14$

☐ $x_1 + x_2 = 12$

☐ $x_1 + x_2 = -1$

Ćwiczenie 4



Dla równania $-5x^2 + 10x = 0$ oblicz iloczyn pierwiastków $x_1 \cdot x_2$.

☐ $x_1 \cdot x_2 = 0$

☐ $x_1 \cdot x_2 = -9$

☐ $x_1 \cdot x_2 = -1$

☐ $x_1 \cdot x_2 = 20$

Ćwiczenie 5



Znajdź sumę i iloczyn pierwiastków równania $x^2 + 7x - 450 = 0$ bez ich obliczania.

$x_1 + x_2 =$

$x_1 \cdot x_2 =$

Ćwiczenie 6



Dla równania $-x^2 + 2x + 1 = 0$ znajdź iloczyn $\Delta \cdot (x_1 + x_2)$.

☐ $\Delta \cdot (x_1 + x_2) = 24$

☐ $\Delta \cdot (x_1 + x_2) = 18$

☐ $\Delta \cdot (x_1 + x_2) = 16$

☐ $\Delta \cdot (x_1 + x_2) = 12$

Ćwiczenie 7



Wstaw poprawną liczbę.

Iloczyn miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = -x^2 - 2x + 15$ jest równy .

10

(-8)

15

(-15)

5

Ćwiczenie 8



Połącz w pary równania z liczbą będącą sumą pierwiastków tego równania.

$x^2 - 1,5x - 1 = 0$

1,5

$x^2 + 9x - 14 = 0$

(-9)

$x^2 = 100$

0

Ćwiczenie 9



Rozważ równanie $(m+1)x^2 + (m-2)x + m = 0$. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki dodatnie? Wskaż konieczne założenia a następnie podaj odpowiedź.

☐ $\frac{m-2}{m+1} > 0$

☐ $(m-2)^2 - 4m(m+1) > 0$

☐ $\frac{m}{m+1} < 0$

☐ $m \neq 1$

☐ $m \neq -1$

☐ $m(m+1) > 0$

☐ $(m+1)^2 - 4m(m-2) > 0$

☐ $\frac{m-2}{m+1} < 0$

Ćwiczenie 10



Rozważmy równanie: $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{5}x = 1$. Niech x_1, x_2 będą pierwiastkami tego równania. Połącz w pary wyrażania wraz z ich wartościami.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{5}{2} + \sqrt{2}$$

$$x_1^3 + x_2^3$$

$$-\sqrt{5}$$

$$x_1^2 + x_2^2$$

$$\frac{5}{4}\sqrt{10} + \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

Dla nauczyciela

Autor: Julia Wódka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzory Viete'a - podsumowanie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- analizuje sposoby rozwiązywania zadań z wykorzystaniem wzorów Viete'a;
- wyprowadza wzory Viete'a dla równania kwadratowego;
- ocenia swoją wiedzę, wykonując zestaw przygotowanych ćwiczeń.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa
- metoda krokodyla

- gra edukacyjna

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

Nauczyciel przedstawia temat lekcji: „Wzory Viete'a – podsumowanie”, następnie wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna: Uczniowie bazują na wiedzy z wcześniejszych lekcji i na przykładach z sekcji „Przeczytaj”, które wcześniej samodzielnie opracowali w domu.

Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Wśród uczniów wyłonieni zostają uczniowie, którzy rozwiązali ćwiczenia interaktywne w najkrótszym czasie, popełniając przy tym najmniej błędów. Najlepsi uczniowie przystępują do gry edukacyjnej, zwycięzca może zostać nagrodzony oceną.

Faza podsumowująca:

Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

- Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń interaktywnych 7 i 8. Następnie przesyłają je do siebie za pomocą poczty elektronicznej, rozwiązują i dzielą się wynikami.

Materiały pomocnicze:

- [Równanie kwadratowe](#)

Wskazówki metodyczne:

- Gra edukacyjna może posłużyć uczniom do powtórzenia przed sprawdzianem. Można ją też wykorzystać, rozwiązując równania kwadratowe różnymi metodami. .