



Zastosowanie logarytmów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



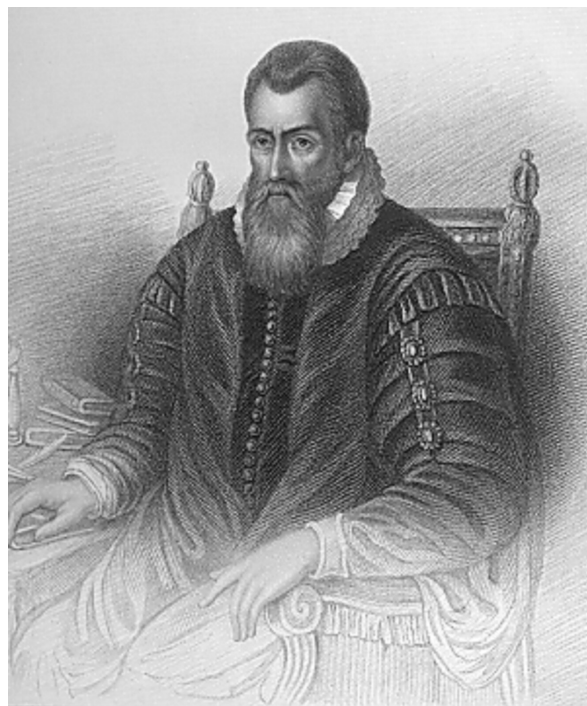
Zastosowanie logarytmów

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Kiedy w 1614 r. John Napier opublikował swoją słynną pracę *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, nie opisał w niej popularnych obecnie logarytmów dziesiętnych, ale zamieścił informacje o logarytmach tzw. naturalnych. Dopiero później weszły do powszechnego użycia logarytmy o podstawie 10.

Logarytmy naturalne, oznaczane zwykle symbolem $\ln$, często zwane dzisiaj logarytmami Napiera, to logarytmy o podstawie oznaczonej literą e . Liczba ta, to znana Ci na pewno stała matematyczna, wykorzystywana w obliczeniach z fizyki i innych dziedzin wiedzy.

$$e = 2,71828\dots$$



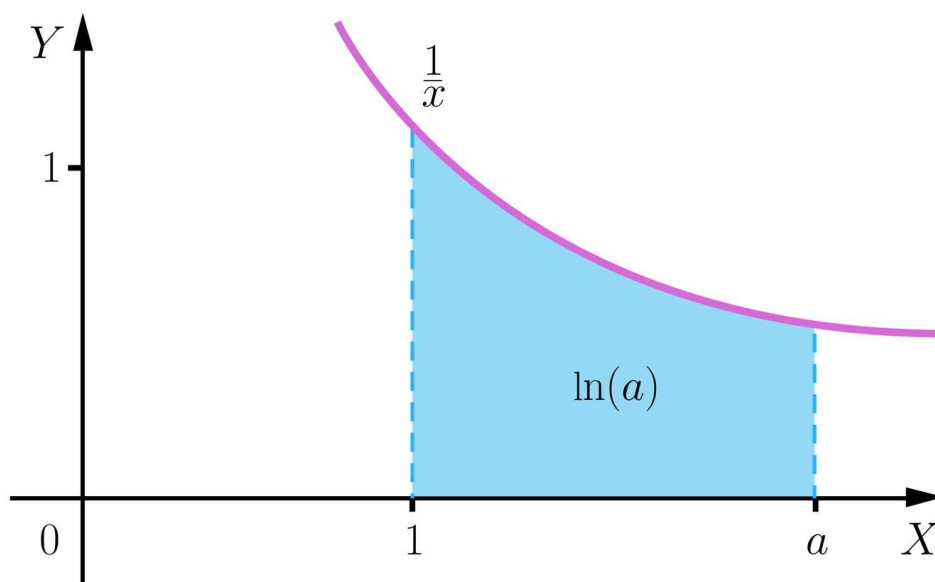
John Napier (1550 - 1617) - wynalazca logarytmów

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Liczba e jest przybliżoną wartością wyrażenia $(1 + \frac{1}{n})^n$ dla dostatecznie dużych liczb n .

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Logarytm naturalny liczby a można zdefiniować jako pole pod wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w przedziale od 1 do a .



Korzystając z tego wykresu można udowodnić np. wzory na logarytm iloczynu i logarytm ilorazu, ale to pozostawiamy Twojej dociekliwości.

W tym materiale podsumujemy wiadomości na temat logarytmów i ich zastosowań w obliczeniach matematycznych. Nie będziemy korzystać z logarytmów naturalnych, wiadomości na ich temat potraktuj więc jako ciekawostkę. Jeśli jednak w przyszłości zajmiesz się naukami ścisłymi, na pewno z logarytmami o podstawie e spotkasz się wielokrotnie.

Twoje cele

- Powtórzysz i rozwiniesz umiejętności związane z wykorzystaniem logarytmów.
- Zastosujesz poznane wzory logarytmiczne w obliczeniach.
- Przeprowadzisz proste rozumowania dedukcyjne, podasz argumenty uzasadniające poprawność tych rozumowań.
- Zbudujesz model matematyczny problemu, uwzględniając konieczne założenia i zastrzeżenia.

Przeczytaj

Podsumujemy teraz i rozwinieśmy wiadomości i umiejętności dotyczące zastosowań logarytmów w obliczeniach matematycznych.

Korzystając wprost z definicji logarytmu oraz poznanych wzorów, można ustalić niektóre własności funkcji określonej za pomocą wzoru zawierającego logarytm.

Przykład 1

Wykażemy, że funkcja $f(x) = \log(\sqrt{1+x^2} - x)$ jest nieparzysta. Określimy najpierw dziedzinę funkcji, wynikającą z definicji logarytmu. Jeśli zmienna jest liczbą niedodatnią, to łatwo widać, że wartość wyrażenia logarytmowanego jest dodatnia. Rozpatrzmy więc przypadek, gdy zmienna ma wartość dodatnią.

$$\sqrt{1+x^2} - x > 0$$

$$\sqrt{1+x^2} > x$$

$$1+x^2 > x^2$$

$$1 > 0$$

Otrzymaliśmy nierówność prawdziwą dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej, zatem (w połączeniu z poprzednimi rozważaniami): $D = \mathbb{R}$.

Funkcja f jest nieparzysta, gdy dla każdej liczby $x \in D$, liczba $(-x) \in D$ oraz $f(-x) = -f(x)$.

Ponieważ $D = \mathbb{R}$, zatem dla każdej liczby należącej do dziedziny funkcji, liczba $(-x)$ należy również do dziedziny tej funkcji.

Wyznamy wzór funkcji $f(-x)$.

$$f(-x) = \log(\sqrt{1+x^2} + x)$$

Przekształcamy wzór funkcji, rozszerzając wyrażenie logarytmowane przez $\sqrt{1+x^2} - x$.

$$\text{Ponieważ } (\sqrt{1+x^2} + x) \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x},$$

$$\text{stąd } f(-x) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right).$$

Korzystamy z twierdzenia o logarytmie ilorazu, przekształcając wyrażenie logarytmowane.

$$f(-x) = \log 1 - \log(\sqrt{1+x^2} - x) = 0 - \log(\sqrt{1+x^2} - x)$$

$$f(-x) = -\log(\sqrt{1+x^2} - x)$$

$f(-x) = -f(x)$ - co oznacza, że funkcja f jest nieparzysta.

W zastosowaniach praktycznych często zachodzi konieczność porównywania logarytmów. W takich przypadkach korzystamy z monotoniczności funkcji logarytmicznej.

- Jeśli podstawa a logarytmu jest większa od 1, to funkcja logarytmiczna jest rosnąca.

$$\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y \text{ dla } a > 1$$

- Jeśli podstawa a logarytmu jest większa od 0, ale mniejsza od 1, to funkcja logarytmiczna jest malejąca.

$$\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y \text{ dla } 0 < a < 1$$

Przykład 2

Określmy, dla jakich liczb rzeczywistych x spełniona jest nierówność $(\log_{0,5} x)^2 > 100$.

Oznaczmy: $\log_{0,5} x = t$, pamiętając, że $x > 0$.

Rozpatrywana nierówność przybiera postać $t^2 > 100$.

Stąd $t > 10$ lub $t < -10$.

Wynika z tego, że $\log_{0,5} x > 10$ lub $\log_{0,5} x < -10$.

Podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, więc

$$\log_{0,5} x > 10 \Leftrightarrow 0 < x < (0,5)^{10}$$

$$\log_{0,5} x < -10 \Leftrightarrow x > (0,5)^{-10}$$

Odpowiedź: $x \in (0; 0,5^{10}) \cup (0,5^{-10}; \infty)$.

Umiejętność analizowania nierówności logarytmicznych może przydać się też w rozwiązywaniu równań kwadratowych.

Przykład 3

Określmy, dla jakich wartości parametru k równanie $x^2 - 2x + \log_{0,1} k = 0$ ma dwa różne pierwiastki.

Na podstawie definicji logarytmu wiemy, że $k > 0$.

Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta > 0$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \log_{0,1} k$$

Rozwiązujemy nierówność.

$$4 - 4 \log_{0,1} k > 0$$

$$1 - \log_{0,1} k > 0$$

$$\log_{0,1} k < 1 \Leftrightarrow \log_{0,1} k < \log_{0,1} 0,1$$

Podstawa logarytmu jest liczbą mniejszą od 1. Funkcja $y = \log_{0,1} x$ jest malejąca. Zatem $k > 0,1$.

Liczba k musi więc spełniać koniunkcję nierówności $k > 0$ i $k > 0,1$, stąd $k > 0,1$.

Odpowiedź: $k \in (0,1; \infty)$.

Udowodnimy teraz twierdzenie, które często jest pomocne przy upraszczaniu wyrażeń logarytmicznych.

Twierdzenie: O logarytmie potęg

Jeżeli $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, k \in R, k \neq 0, p \in R$, to

$$\log_{a^k} b^p = \frac{p}{k} \log_a b.$$

Dowód

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej równości, korzystając ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu i ze wzoru na logarytm potęgi.

$$\log_{a^k} b^p = \frac{\log b^p}{\log a^k} = \frac{p \log b}{k \log a} = \frac{p}{k} \log_a b$$

Otrzymujemy prawą stronę dowodzonej równości, co kończy dowód.

Przykład 4

Obliczymy wartość wyrażenia $W = \log_{3^4} 9^6 + \log_{10^{-2}} 10^5$, korzystając z [twierdzenia o logarytmie potęg](#).

$$W = \log_{3^4} 9^6 + \log_{10^{-2}} 10^5$$

$$W = \frac{6}{4} \log_3 9 + \frac{5}{-2} \log_{10} 10 = \frac{3}{2} \cdot 2 - 2,5 \cdot 1 = 3 - 2,5 = 0,5$$

Logarytmy często wplatane są do zadań o ciągach liczbowych. Poniżej przykład takiego zadania.

Przykład 5

Liczby dodatnie (a, b, c) tworzą ciąg geometryczny rosnący. Suma tych liczb jest równa 62, a suma ich logarytmów dziesiętnych jest równa 3. Znajdź te liczby.

Oznaczmy: q – iloraz rozpatrywanego ciągu.

Liczby (a, b, c) tworzą ciąg geometryczny, zatem możemy zapisać:

a – pierwszy wyraz ciągu,

$b = aq$ – drugi wyraz ciągu,

$c = aq^2$ – trzeci wyraz ciągu.

Suma logarytmów dziesiętnych wyrazów ciągu jest równa 3, zatem

$$\log a + \log aq + \log aq^2 = 3.$$

Korzystamy z twierdzenia o logarytmie iloczynu.

$$\log(a \cdot aq \cdot aq^2) = 3$$

Korzystamy z twierdzenia o logarytmie potęgi.

$$\log(aq)^3 = 3$$

$$3 \log(aq) = 3 / : 3$$

$$\log(aq) = 1$$

$$\log(aq) = \log 10$$

$$aq = 10$$

Stąd $a = \frac{10}{q}$ ($q \neq 0$, bo ciąg jest rosnący).

Wiemy też, że suma wyrazów ciągu jest równa 62.

$$a + aq + aq^2 = 62$$

Podstawiamy do zapisanego równania w miejsce a wyznaczoną liczbę i rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

$$\frac{10}{q} + \frac{10}{q} \cdot q + \frac{10}{q} \cdot q^2 = 62$$

$$\frac{10}{q} + 10 + 10q = 62 / \cdot q$$

$$10 + 10q + 10q^2 = 62q / : 2$$

$$5q^2 - 26q + 5 = 0$$

$$\Delta = 676 - 100 = 576 > 0$$

$$q_1 = \frac{26-24}{10} = \frac{1}{5} < 1 - \text{nie spełnia warunków zadania, bo ciąg ma być rosnący.}$$

$$q_2 = \frac{26+24}{10} = 5 > 1 - \text{spełnia warunki zadania.}$$

Wyznaczamy kolejne wyrazy ciągu.

$$a = \frac{10}{5} = 2$$

$$b = 2 \cdot 5 = 10$$

$$c = 10 \cdot 5 = 50$$

Odpowiedź: szukane liczby to 2, 10, 50.

Ważne!

Logarytmy pomocne są przy szukaniu liczby cyfr dużych liczb. Przy czym najczęściej korzysta się z reguły: liczba cyfr liczby n wyraża się wzorem $S(n) = [\log n] + 1$.

Przykład 6

Obliczymy ile cyfr w rozwinięciu dziesiętnym ma liczba 2^{20} .

Logarytmujemy liczbę 2^{20} .

$$\log 2^{20} = 20 \log 2$$

Odczytujemy z tablic logarytmicznych przybliżoną wartość $\log 2$.

$$\log 2 \approx 0,3010$$

$$\text{Zatem } \log 2^{20} \approx 20 \cdot 0,3010 = 6,02.$$

Wstawiamy znaną wartość do wzoru na liczbę cyfr.

$$S(2^{20}) = [\log 2^{20}] + 1 = [6,02] + 1 = 6 + 1 = 7$$

Odpowiedź: liczba 2^{20} w rozwinięciu dziesiętnym ma 7 cyfr.

W ostatnim przykładzie pokażemy, jak można wykorzystać zależności algebraiczne, wynikające z nierówności między średnimi do dowodzenia nierówności logarytmicznych.

Przykład 7

Wykażemy, że $\log_6 7 + \log_7 6 > \log_7 8 + \log_8 7$.

Zapisana nierówność jest równoważna nierówności $\log_6 7 + \log_7 6 - \log_7 8 - \log_8 7 > 0$.

Oznaczmy: $\log_7 6 = x$, $\log_7 8 = y$.

Zauważmy przy tym że $x < y$.

Lewa strona zapisanej wyżej nierówności przyjmuje wtedy postać

$$L = \left(\frac{1}{x} + x\right) - \left(\frac{1}{y} + y\right) = \frac{1}{x} + x - \frac{1}{y} - y$$

$$L = \frac{y-x}{xy} + (x-y) = \frac{(y-x)(1-xy)}{xy}$$

Z nierówności $0 < x < y$ wynika, że aby lewa strona dowodzonej nierówności była dodatnia, musi być spełniony warunek $1 - xy > 0$. Aby to wykazać, korzystamy z zależności między średnią geometryczną, a arytmetyczną.

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Ponieważ $\log_7 6 < 1$, $\log_7 8 < 1$, stąd

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} < 1, \text{ czyli } xy < 1, \text{ więc } 1 - xy > 0.$$

Wynika stąd, że $L > 0$, czyli $\log_6 7 + \log_7 6 - \log_7 8 - \log_8 7 > 0$, co kończy dowód.

Słownik

Twierdzenie o logarytmie potęg

jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $p \in \mathbb{R}$ to $\log_{a^k} b^p = \frac{p}{k} \log_a b$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Znajdziesz w niej powtórzenie wszystkich poznanych do tej pory wzorów ułatwiających obliczenia logarytmiczne.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D18hP9uDk>

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

Wykaż, że jeśli $a \in (0, 1)$, $b > 0$ to $\log_a \left(\frac{2ab}{a+b} \right) \geq \log_a(ab)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Przyjmując, że $\log 3 = 0,4771$ określ ile cyfr ma w rozwinięciu dziesiętnym liczba 3^{100} .

☐ 46

☐ 100

☐ 47

☐ 48

Ćwiczenie 2



Wiadomo, że $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1, x > 0$ i $\log_a x = A, \log_b x = B, \log_c x = C$. Wtedy:

☐ $\log_{abc} x = \frac{ABC}{A-B-C}$

☐ $\log_{abc} x = \frac{ABC}{AB+AC+BC}$

☐ $\log_{abc} x = \frac{A+B+C}{ABC}$

☐ $\log_{abc} x = \frac{A-B-C}{A+B+C}$

Ćwiczenie 3



Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie wyrazy.

Jeżeli dodatnia podstawa logarytmu jest od 1, to większej liczbie logarytmowanej odpowiada mniejsza wartość logarytmu.

Jeśli dodatnia podstawa logarytmu jest od 1, to większej liczbie logarytmowanej odpowiada większa wartość logarytmu.

Logarytm potęgi jest równy wykładnika potęgi przez logarytm podstawy potęgi.

Logarytm przy danej podstawie iloczynu liczb dodatnich jest równy logarytmów tych liczb przy tej samej podstawie.

ilorazowi

sumie

równa

mniejsza

większa

różnicy

iloczynowi

Ćwiczenie 4



Dane jest równanie $2 \log_3(x + 4) - \log_3(2x - 1) - \log_3(x - 4) = 2$.
Zaznacz zdania prawdziwe.

☐

Równanie to można zapisać w postaci równoważnej jako $\log_3\left(\frac{x-4}{2x-1}\right) = \log_3[9(x-4)]$.

☐

Rozwiązanie danego równania prowadzi do rozwiązania równania $17x^2 - 89x + 20 = 0$.

☐

Dziedziną tego równania jest zbiór $(4, \infty)$.

☐

Rozwiązania równania to: $x = 5$, $x = \frac{4}{14}$.

Ćwiczenie 5



Połącz równanie z jego rozwiązaniem.

$$\log_9 \left[\log \left(\frac{1}{x} \right) \right] = 0,5$$

$$x = 0,001$$

$$\log_2(4 + 2x) = \log_2(3 + x)$$

$$x = 8$$

$$\log_8(6 - 3x) = 1$$

$$x = -1$$

$$\log_{x-1}(x^2 - x - 7) = 2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Ćwiczenie 6



Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie liczby całkowite.

Dziedziną funkcji $f(x) = \log_7 \left(\frac{2x-6}{x^2+4} \right)$ jest zbiór wszystkich takich liczb x , które spełniają warunek $x > \boxed{}$.

Równanie $-x^2 + 4x = 4 \log_5 k$ z parametrem k , ma dwa różne pierwiastki, gdy k jest liczbą dodatnią i $k < \boxed{}$.

Jeśli $A = \log_{10^3} 100^6$ to $A = \boxed{}$.

Liczby $a = \log_2 48 - \log_2 3$, $b = 2 \log_2 x$, $c = 24 \log_2 \sqrt{2}$ tworzą ciąg arytmetyczny (a, b, c) , zatem $x = \boxed{}$

Ćwiczenie 7



Wykaż, że $\log^2 13 - \log 16 > 0$.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że jeżeli $x > 0, y > 0$, $23xy = x^2 + y^2$ to $\log_{11} \left(\frac{x+y}{5} \right) = 0,5(\log_{11} x + \log_{11} y)$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie logarytmów

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne

Uczeń:

- powtarza i rozwija umiejętności związane z wykorzystaniem logarytmów,
- stosuje poznane wzory logarytmiczne w obliczeniach,
- przeprowadza rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność tych rozumowań,

- buduje model matematyczny problemu, uwzględniając konieczne założenia i zastrzeżenia.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- technika porównań binarnych,
- koszyk pomysłów.

Formy zajęć:

- praca w parach,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer,
- kartki, mazaki,
- koszyk.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

Uczniowie metodą koszyka pomysłów przygotowują kartki, na których zapisują związane z logarytmami poznane twierdzenia, wzory, przykłady rozwiązanych zadań, definicje, itp. Kartki wrzucają do kosza, z którego będzie można je pobierać, szukając inspiracji do rozwiązania zadań.

Uczniowie na tym etapie powtarzania wiadomości mogą korzystać z zeszytów, komputera, książek. Powinna to być praca indywidualna – każdy uczeń przygotowuje w ten sposób co najmniej 5 karteczek.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie pracują w parach. Ich zadaniem jest samodzielne rozwiązanie przykładów przedstawionych w sekcji Przeczytaj. Zatem uczniowie czytają dane polecenie, próbują rozwiązać problem. W razie wątpliwości mogą zajrzeć do kosza pomysłów i odnaleźć potrzebne twierdzenie lub rozwiązanie zadania podobnego typu. Swoje rozwiązania porównują z tymi, zawartymi w sekcji Przeczytaj.

Techniką porównań binarnych sporządzają do każdego zadania tabelę porównawczą, w której zapisują plusy lub minusy danego sposobu rozwiązania.

Po zakończonej pracy uczniowie prezentują swoje tabele, jak również przedstawiają oryginalne rozwiązania, czy pomysły.

Dyskusja – czy można wypracować ramowy szablon rozwiązywania zadań z logarytmami.

Faza podsumowująca:

Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.

Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę par.

Karteczki znajdujące się w „koszu pomysłów” warto zachować, gdyż mogą być w przydatne na następnych zajęciach poświęconych logarytmom.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest zapoznanie się z animacją i, korzystając z podanych tam wzorów, rozwiązanie zadań interaktywnych zawartych w sekcji Ćwiczenia sprawdzające.

Materiały pomocnicze:

[Działania na logarytmach](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja omawia wzory przydatne w przekształceniach logarytmicznych, może być zatem pomocna na kolejnych zajęciach poświęconych zastosowaniom logarytmów np. w fizyce i chemii.