



## Przykłady funkcji odwrotnych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Schemat interaktywny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Słowo **kod** pochodzi od łacińskiego wyrazu *codex*. Według słownika oznacza system umownych znaków (skrótów, symboli) używanych do przekazywania informacji według pewnych reguł. **QR code** (Quick Response code) jest znakiem już bardzo przez nas rozpoznawalnym. Pojawia się nawet na pomnikach, odsyłając nas do stron internetowych, na których możemy znaleźć opis wydarzeń historycznych np. o działalności Armii Krajowej i jej żołnierzach.

ABCDEFGHIJKLMN**OP**QRSTUVWXYZ01234  
56789ABCDEFGHIJKLMN**OP**QRSTUVWXYZ  
0123456789ABCDEFGHIJKLMN**OP**QRSTU  
VWXYZ0123456789ABCDEFGHIJKLMN**OP**  
RSTUVWXYZ0123456789ABCDEFGHIJKLM  
NOPQRSTUVWXYZ0123456789ABCDEFGHI  
IJKLMN**OP**QRSTUVWXYZ0123456789ABC  
DEFGHIJKLMN**OP**QRSTUVWXYZ01234567



Aby zapoznać się z tymi informacjami, potrzebna jest funkcja odkodowująca, „odwracająca zakodowanie”. Jest to jeden z przykładów funkcji odwrotnej.

### Twoje cele

- Zastosujesz pewne reguły do zakodowania i odkodowania słowa.
- Ustalisz, czy złożenie dwóch danych funkcji daje identyczność.
- Określisz, czy dana funkcja jest inwolucją.

# Przeczytaj

---

Funkcja to relacja, która każdemu elementowi z dziedziny przyporządkowuje dokładnie jeden element przeciwdziedziny. Dziedzina i przeciwdziedzina są określone po zdefiniowaniu przyporządkowania. Mówiąc nieformalnie – funkcja to „przepis” na przekształcenie elementu dziedziny. Rozważmy następujący przykład.

## Przykład 1

Poniższa tabela opisuje funkcję odwzorowującą zbiór liter w zbiór liczb:

Litera	Liczba
<i>A</i>	0
<i>B</i>	1
<i>C</i>	2
<i>D</i>	3
<i>E</i>	4
<i>F</i>	5
<i>G</i>	6
<i>H</i>	7
<i>I</i>	8
<i>J</i>	9
<i>K</i>	10
<i>L</i>	11
<i>M</i>	12
<i>N</i>	13
<i>O</i>	14
<i>P</i>	15
<i>Q</i>	16
<i>R</i>	17
<i>S</i>	18
<i>T</i>	19
<i>U</i>	20

Litera	Liczba
W	21
X	22
Y	23
Z	24

Przy pomocy tej tabeli zakodujemy słowo „funkcja”.

### Rozwiązanie

Mamy 25 liter i 25 liczb. Słowo „F, U, N, K, C, J, A” w tym przyporządkowaniu będzie miało zapis: „5, 20, 13, 10, 2, 9, 0”.

Oczywiście kodowanie ma sens tylko wtedy, jeśli mamy gwarancję, że wtajemniczona osoba, która otrzyma zaszyfrowaną wiadomość, będzie w stanie ją jednoznacznie odczytać.

Powyższy szyfr spełnia ten warunek. Korzystając z podanego układu liczb: „5, 20, 13, 10, 2, 9, 0” bez trudu sprawdzimy, że chodzi właśnie o słowo „funkcja”. W tej sytuacji w naturalny sposób stosujemy funkcję odwrotną – działa ona ze zbioru liczb w zbiór liter i po prostu argumentowi z dolnego wiersza przyporządkowuje wartość z górnego.

Mając tę intuicję przypomnijmy pojęcia związane z funkcją odwrotną:

### Funkcja „na”

Funkcja jest „na” cały zbiór  $Y$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $y \in Y$  istnieje takie  $x \in X$ , że  $f(x) = y$ .

### Funkcja różnowartościowa

Funkcja jest różnowartościowa, jeśli dla dowolnych dwóch argumentów  $x_1, x_2 \in X$  z faktu, że  $x_1 \neq x_2$  wynika, że  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

### Bijekcja

Funkcja jest bijekcją, jeśli jest różnowartościowa i „na”.

### Funkcja odwrotna

Niech funkcja  $f: X \rightarrow Y$  będzie [bijekcją](#).

Funkcję  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  nazywamy funkcją odwrotną do funkcji  $f$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f^{-1}(y) = x$  dla każdego  $x \in X$  i  $y \in Y$ .

Wyznamy funkcje odwrotne do kilku znanych nam funkcji.

### Przykład 2

Wyznamy funkcję odwrotną do funkcji  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = x^2$ .

### Rozwiązanie

Funkcja  $f$  dla wskazanej dziedziny jest różnowartościowa i „na”, ponieważ przyjmuje jako swoje wartości wszystkie elementy przeciwdziedziny. Zatem istnieje funkcja odwrotna. Wyznamy zmienną  $x$  z równania:  $y = x^2$ . Oczywiście  $x = \sqrt{y}$ , więc  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ .

Sprawdźmy:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \text{ dla } x \in (0, \infty), f^{-1} \circ f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty).$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

### Przykład 3

Wyznamy funkcję odwrotną do funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ .

### Rozwiązanie

Aby dane przyporządkowanie było funkcją, która jest różnowartościowa i „na” w swej dziedzinie, musimy rozważać tylko sytuacje, gdy  $a > 0$ , ponieważ dla np.  $a = -2$  i  $x = \frac{1}{2}$  mielibyśmy  $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{-2}$ , a przecież nie istnieje taka liczba rzeczywista, która pomnożona przez samą siebie da nam liczbę ujemną.

Dla  $a = 1$  funkcja  $f(x) = 1^x$  jest funkcją stałą. Dla takiej funkcji nie istnieje funkcja odwrotna, gdyż nie jest ona różnowartościowa.

Jeśli  $a > 0$  i  $a \neq 1$ , to funkcja jest rosnąca, a więc różnowartościowa i  $ZW = (0, \infty)$ , czyli jest „na”.

Istnieje funkcja odwrotna do niej i jest to funkcja logarytmiczna:

$$f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ gdzie } a > 0 \text{ i } a \neq 1.$$

Sprawdźmy:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \log_a(a^x) = x \cdot 1 = x, f^{-1} \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = a^{\log_a x} = x, f \circ f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

### Przykład 4

Sprawdźmy, czy funkcja  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  jest odwrotna względem siebie.

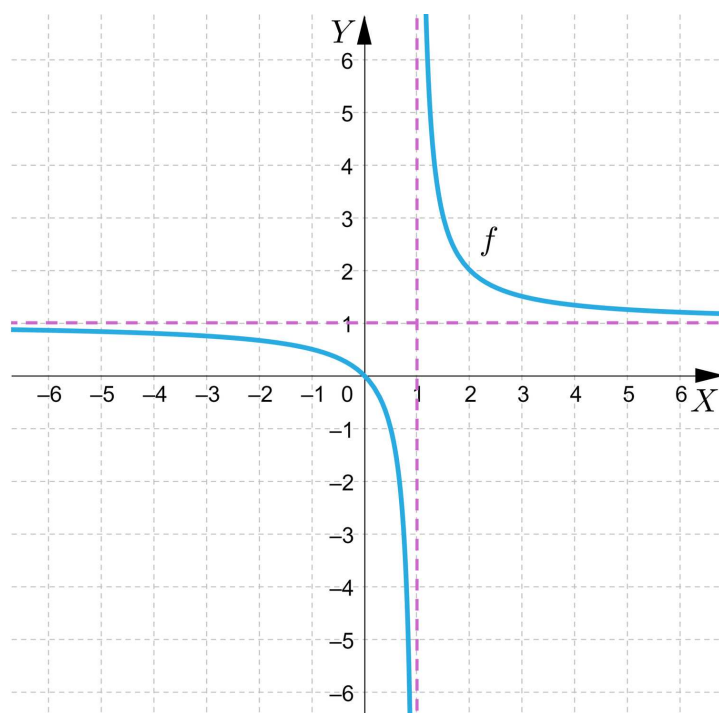
### Rozwiązanie

Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Jest to funkcja homograficzna, której wykresem jest hiperbola.

Przekształćmy wzór tej funkcji:  $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ .

Ze wzoru można odczytać, że wykres tej funkcji powstaje z wykresu funkcji  $f_1(x) = \frac{1}{x}$  w przesunięciu o wektor  $[1, 1]$ .



Zbiorem wartości funkcji  $f$  jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Funkcja  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$  jest bijekcją, ponieważ jest różnowartościowa i „na”.

Zatem istnieje funkcja odwrotna do niej.

Załóżmy, że jest to ta sama funkcja  $f$ .

Sprawdźmy:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = \frac{x}{1} = x.$$

Zatem funkcja  $f$  jest funkcją odwrotną do samej siebie.

Funkcje, które są odwrotne do samej siebie nazywamy **inwolucjami**.

Wróćmy do kodowania, od którego zaczęliśmy rozważania w tym materiale. Następne przykłady potraktujmy jako zabawę.

Oczywiście kod przedstawiony w Przykładzie 1 jest bardzo prosty. Możemy skomplikować go używając działania zwanego „dodawaniem modulo 25”.

$$(a + b) \bmod 25 = \begin{cases} a + b, & a + b < 25 \\ a + b - 25, & a + b \geq 25 \end{cases}$$

Wyberzemy dowolną liczbę  $p$  ze zbioru  $A = \{0, 1, \dots, 24\}$ , niech to będzie

np. 17.

Zapiszemy ciąg liczb „5, 20, 13, 10, 2, 9, 0” stosując wzajemnie jednoznaczną funkcję liczbową:

$$f: A \rightarrow A$$

$$f(5) = (5 + 17) \bmod 25 = 22$$

$$f(20) = (20 + 17) \bmod 25 = 12$$

$$f(13) = (13 + 17) \bmod 25 = 5$$

$$f(2) = (2 + 17) \bmod 25 = 19$$

$$f(9) = (9 + 17) \bmod 25 = 1$$

$$f(0) = (0 + 17) \bmod 25 = 17$$

Nasza funkcja zakodowała ciąg „5, 20, 13, 10, 2, 9, 0” w ciąg „22, 12, 5, 19, 1, 17”. Osoba trzecia, nieznająca funkcji kodującej, miałaby duże problemy z odkodowaniem tego zapisu

Funkcja dekodująca – odwrotna do kodującej – ma w naszym przykładzie postać:

$$f^{-1}(x) = (x - 17) \bmod 25 = \begin{cases} x - 17, & x \geq 17 \\ x - 17 + 25, & x < 17 \end{cases}$$

To kodowanie można przedstawić również przy pomocy tabeli:

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$y$	17	18	19	20	21	22	23	24	0	1	2	3	
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

### Przykład 5

Korzystając z [kodowania liter](#) i funkcji odkodowującej

$$f^{-1}(x) = (x - 24) \bmod 25 = \begin{cases} x - 24, & x \geq 24 \\ x - 24 + 25, & x < 24 \end{cases}$$

odczytamy napis: „3, 12, 7, 5, 11, 24”.

## Rozwiązanie

$$f^{-1}(3) = (3 - 24 + 25) \bmod 25 = 4$$

$$f^{-1}(12) = (12 - 24 + 25) \bmod 25 = 13$$

$$f^{-1}(7) = (7 - 24 + 25) \bmod 25 = 8$$

$$f^{-1}(5) = (5 - 24 + 25) \bmod 25 = 6$$

$$f^{-1}(11) = (11 - 24 + 25) \bmod 25 = 12$$

$$f^{-1}(24) = (24 - 24) \bmod 25 = 0$$

Posługując się [tabelką](#) odkodujemy napis: „E, N, I, G, M, A”.

## Przykład 6

Niech  $p = 19 \in A = \{0, 1, \dots, 24\}$ . Posługując się [kodowaniem liter](#) zaszyfrujemy słowo „KRYPTOGRAFIA”.

## Rozwiązanie

Zapis „KRYPTOGRAFIA” po zastosowaniu przyporządkowania z [tabelki](#) to:

„10, 17, 23, 15, 19, 14, 17, 0, 5, 8, 0”. Stosując funkcję kodującą dla  $p = 19$  otrzymujemy:

$$f(10) = (10 + 19) \bmod 25 = 4$$

$$f(17) = (17 + 19) \bmod 25 = 11$$

$$f(23) = (23 + 19) \bmod 25 = 17$$

$$f(15) = (15 + 19) \bmod 25 = 9$$

$$f(19) = (19 + 19) \bmod 25 = 13$$

$$f(14) = (14 + 19) \bmod 25 = 8$$

$$f(17) = (17 + 19) \bmod 25 = 11$$

$$f(0) = (0 + 19) \bmod 25 = 19$$

$$f(5) = (5 + 19) \bmod 25 = 24$$

$$f(8) = (8 + 19) \bmod 25 = 2$$

$$f(0) = (0 + 19) \bmod 25 = 19$$

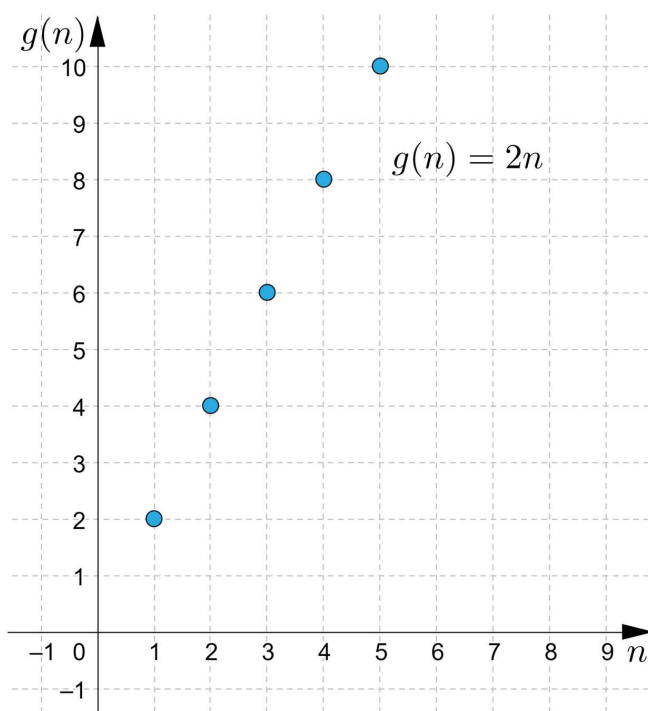
Zapis: „10, 17, 23, 15, 19, 14, 17, 0, 5, 8, 0” uzyskany po zakodowaniu to:  
„4, 11, 17, 9, 13, 8, 11, 19, 24, 2, 19”.

## Problem 1

Wybierz liczbę  $p$  należącą do zbioru  $A = \{0, 1, \dots, 24\}$ . Zakoduj dowolne słowo i poproś kolegę o rozkodowanie Twojego hasła nie znając liczby  $p$ .

## Ciekawostka

Dana jest funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Jest to funkcja liniowa, różnowartościowa i „na”. Łatwo znaleźć funkcję odwrotną:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ . Rozważmy funkcję określoną tym samym wzorem, ale na okrojonej do liczb naturalnych  $\mathbb{N}_+$  (bez zera) dziedzinie. Wówczas zbiorem wartości funkcji  $g(n) = 2n$  jest zbiór  $g(\mathbb{N}) = P$ , gdzie  $P$  oznacza zbiór liczb parzystych dodatnich.



Pojęciem, które nas wszystkich bardzo intryguje jest nieskończoność. Filozofowie rozróżniają nieskończoność potencjalną i nieskończoność aktualną. Zbiór liczb naturalnych jest przykładem tej drugiej. Bardzo ciekawe jest określenie równoliczności. Mówimy, że dwa zbiory są równoliczne, gdy istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna przekształcająca jeden zbiór na drugi. Studenci pierwszego roku matematyki są zazwyczaj bardzo zaskoczeni, gdy dowiadują się, że zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb parzystych. Taką funkcją jest właśnie funkcja  $g$ . Kiedy dwa zbiory są skończone, użycie sformułowania „tyle samo elementów” jest dla nas bardzo jasne. Jednak w przypadku zbiorów nieskończonych nie jest to już tak intuicyjne

i właściwe. Wydaje się przecież, że liczb naturalnych jest dwa razy więcej niż liczb parzystych.

Funkcja  $g: \mathbb{N} \rightarrow P$  jest rosnąca, a więc różnowartościowa. Jest „na”. Istnieje zatem funkcja do niej odwrotna  $g^{-1}: P \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ .

## Słownik

### funkcja „na”

funkcja jest „na” cały zbiór  $Y$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $y \in Y$  istnieje takie  $x \in X$ , że  $f(x) = y$

### funkcja różnowartościowa

funkcja jest różnowartościowa jeśli dla dowolnych dwóch argumentów  $x_1, x_2 \in X$  z faktu, że  $x_1 \neq x_2$  wynika, że  $f(x_1) \neq f(x_2)$

### bijekcja

funkcja jest bijekcją jeśli jest różnowartościowa i „na”

### funkcja odwrotna

niech funkcja  $f: X \rightarrow Y$  będzie bijekcją; funkcję  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  nazywamy funkcją odwrotną do funkcji  $f$  jeśli wtedy i tylko wtedy, gdy  $f^{-1}(y) = x$  dla każdego  $x \in X$  i  $y \in Y$

### inwolucja

funkcja, która ma funkcję odwrotną równą jej samej

# Schemat interaktywny

## Polecenie 1

Zapoznaj się ze schematem interaktywnym, a następnie wykonaj polecenia.

Rozważmy funkcję  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , gdzie  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Wyznamy dziedzinę funkcji  $f$ , na której jest ona różnowartościowa oraz podamy wzór funkcji odwrotnej. Podaj współczynniki:

$a = -2$   $b = 8$   $c = -1$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyNDHikIx>

## Polecenie 2

Wskaż wszystkie funkcje, które są inwolucjami.

$f(x) = x$

$f(x) = 10^x$

$f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

$f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

$f(x) = \frac{2+x}{x-1}$

$f(x) = x - 4$

$f(x) = x^3 + 2$

$f(x) = -x + 3$

$f(x) = \log x$

$f(x) = x + 4$

$f(x) = \frac{2+x}{1-x}$

### Polecenie 3

Wskaż pary funkcji odwrotnych i różnych względem siebie.

$$f(x) = -x + 3$$

$$f(x) = x + 4$$

$$f(x) = x$$

$$f(x) = x - 4$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x-2}$$

$$f(x) = \log x$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{2+x}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{2+x}{1-x}$$

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$f(x) = 10^x$$

### Polecenie 4

Zbuduj algorytm wyznaczający dziedzinę funkcji  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , gdzie  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , na której jest ona różnowartościowa oraz wzór funkcji odwrotnej.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Ciąg „13, 0, 5, 0, 17, 14, 6, 4” po odkodowaniu funkcją odkodowującą dla  $p = 21$  i odczytaniu liter z [tabelki kodującej](#) to:

ROZYCKI

REJEWSKI

ZYGALSKI

## Ćwiczenie 2



Korzystając z [tabelki](#) odszyfruj słowo „ZYGALSKI”.

Przeciagnij poprawną odpowiedź.

Słowo "ZYGALSKI" dla  $p = 14$ , to

"12, 16, 3, 0, 23, 7, 19, 2"

"13, 12, 20, 14, 0, 7, 24, 22"

"2, 24, 5, 17, 14, 20, 3, 9"

"20, 12, 7, 9, 14, 24, 8, 0"

### Ćwiczenie 3



Połącz w pary zdanie oraz funkcję, za pomocą której można je udowodnić.

Na przykład parą jest: "Zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb nieparzystych." i  $f(x) = 2x + 1$ .

Zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb podzielnych przez trzy.

$$f(x) = \frac{1}{3}x$$

Zbiór liczb podzielnych przez trzy jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Zbiór liczb całkowitych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

$$f(x) = 3x$$

Zbiór liczb nieparzystych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

Zbiór liczb parzystych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

### Ćwiczenie 4



Podaj przykład funkcji, która przekształca w sposób wzajemnie jednoznaczny zbiór  $\mathbb{R}$  na  $(0, \infty)$  oraz odwrotnie, przykład funkcji różnowartościowej  $(1 - 1)$  przekształcającej zbiór  $(0, \infty)$  na zbiór  $\mathbb{R}$ . Co można powiedzieć o tych zbiorach?

### Ćwiczenie 5



Niech  $f(x) = 2x + 4$  a  $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$ . Znajdź złożenia:  $g \circ f$  oraz  $f \circ g$ .

### Ćwiczenie 6



Dane są funkcje:  $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ ,  $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$  oraz  $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ . Zbadaj, czy  $g \circ f = id_{\mathbb{R}}$  oraz  $f \circ g = id_{(-1;1)}$ .

## Ćwiczenie 7



Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x + 77$ . Wykaż, że funkcja jest inwolucją.

## Ćwiczenie 8



Sprawdzić, czy funkcja  $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ , gdzie  $a^2 + bc \neq 0$ , jest inwolucją.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Beata Kuna

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Przykłady funkcji odwrotnych

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) posługuje się złożeniami funkcji.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- stosuje pewne reguły do zakodowania i odkodowania słowa
- sprawdza, czy złożenie dwóch danych funkcji daje identyczność
- sprawdza, czy dana funkcja jest inwolucją

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm
- konektywizm

## **Metody i techniki nauczania:**

- rozmowa nauczająca
- dyskusja
- metoda tekstu przewodniego

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel prowadzi wykład informacyjny na temat kodowania. Pyta uczniów, czy spotkali się z kodowaniem, czy znają zasady działania Enigmy oraz czy wiedzą, kto złamał szyfr Enigmy.
2. Następnie nauczyciel określa cele i kryteria sukcesu.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują Przykłady 1, 2 i 3.
2. Uczniowie w parach, na podstawie pierwszych trzech przykładów, układają własny sposób szyfrowania z kluczem. Każdy z nich wybiera liczbę  $p$  należącą do zbioru  $A = \{0, 1, \dots, 24\}$ . Uczniowie kodują wybrane przez siebie słowo i proszą kolegę o odszyfrowanie. Najpierw bez podania liczby  $p$ . Jeśli uczniowie mają problemy, to z podaniem liczby  $p$ .
3. Uczniowie wyznaczają funkcje odwrotne do podanych w przykładach 4 i 5.
4. Nauczyciel mówi o równoliczności zbiorów ale zaznacza, że to zagadnienie jest tylko ciekawostką.
5. Nauczyciel, aby podsumować lekcję przechodzi do Poleceń związanych ze Schematem interaktywnym.

### **Faza podsumowująca:**

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem Przykładów, które pojawiły się na lekcji.

**Praca domowa:**

Uczniowie wykonują ćwiczenia 1-5 z sekcji „Sprawdź się”. Dla wszystkich chętnych uczniów dodatkowo ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

[Proporcjonalność odwrotna](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Polecenia związane ze schematem interaktywnym można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału w temacie „Przykłady funkcji odwrotnych” lub przygotowania do matury.

„Schemat interaktywny” można również wykorzystać w realizacji lekcji „Wyznaczanie funkcji odwrotnej do danej funkcji”.