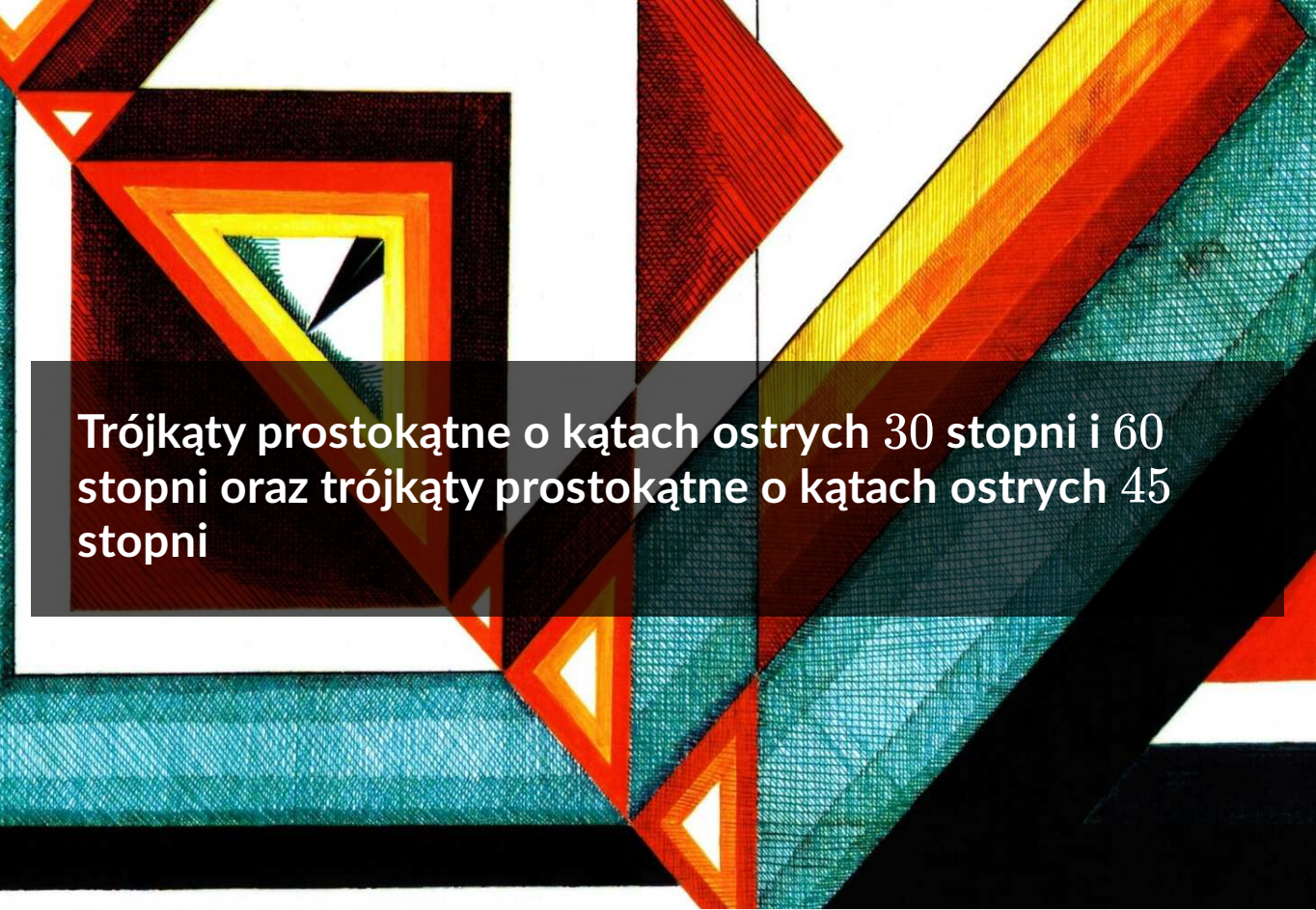




Trójkąty prostokątne o kątach ostrych **30** stopni i **60** stopni oraz trójkąty prostokątne o kątach ostrych **45** stopni

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Trójkąty prostokątne o kątach ostrych 30 stopni i 60 stopni oraz trójkąty prostokątne o kątach ostrych 45 stopni

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Podczas lekcji omówimy własności dwóch rodzajów trójkątów. Skupimy uwagę na trójkątach prostokątnych, które mają kąty ostre o miarach 30° i 60° lub oba kąty ostre mają miary 45° . Takie trójkąty są często określane mianem trójkątów charakterystycznych. Znajomość zależności, które występują pomiędzy długościami ich boków pozwala na rozwiązanie wielu problemów geometrycznych. Bazując na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Poznasz zależności pomiędzy długościami boków trójkątów charakterystycznych.
- Wykorzystasz poznane zależności między długościami boków w trójkątach charakterystycznych do rozwiązywania zadań dotyczących obwodów i pól trójkątów.
- Ocenisz swoją wiedzę, wykonując polecenia i rozwiązując ćwiczenia interaktywne.

Przeczytaj

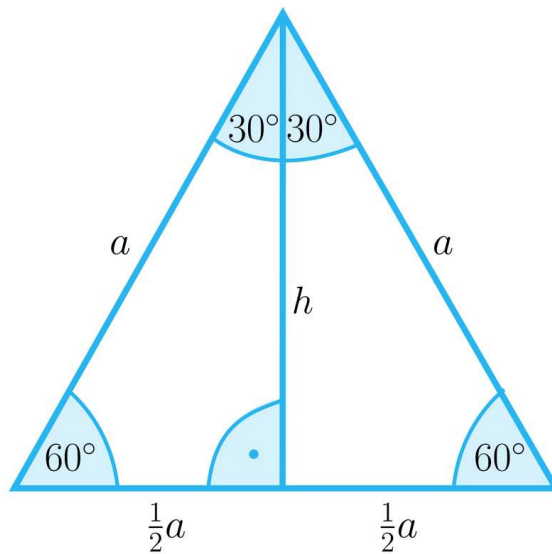
W geometrii płaskiej bardzo często wykorzystuje się własności trójkątów prostokątnych, o kątach wewnętrznych:

- $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$,
- $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

Istnieje charakterystyczna relacja między długościami boków w każdym z tych trójkątów, w zależności od tego, jakie są miary kątów wewnętrznych trójkąta.

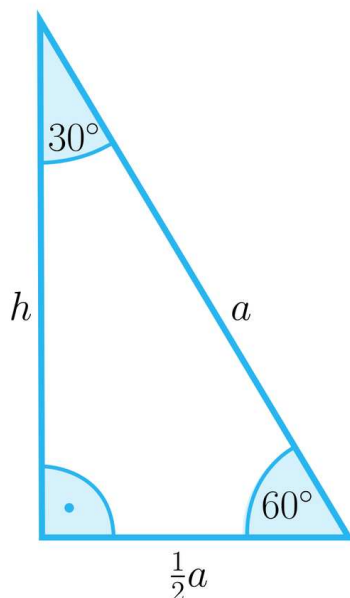
Trójkąt o kątach wewnętrznych $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

Zauważmy, że taki trójkąt możemy otrzymać poprzez poprowadzenie wysokości o długości h w trójkącie równobocznym o boku długości a .



Długość wysokości możemy uzależnić od długości boku trójkąta równobocznego.

W tym celu użyjemy twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta o bokach długości h , $\frac{1}{2}a$, a .



Otrzymujemy zatem:

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2$$

$$h^2 + \frac{1}{4}a^2 = a^2$$

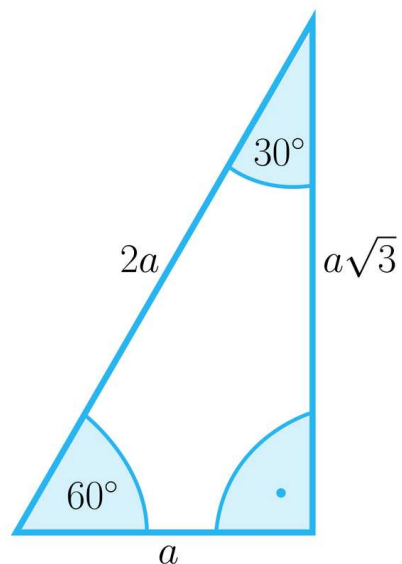
$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

W związku z tym, trójkąt o kątach wewnętrznych 30° , 60° , 90° ma boki odpowiednio o długościach $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\frac{1}{2}a$, a .

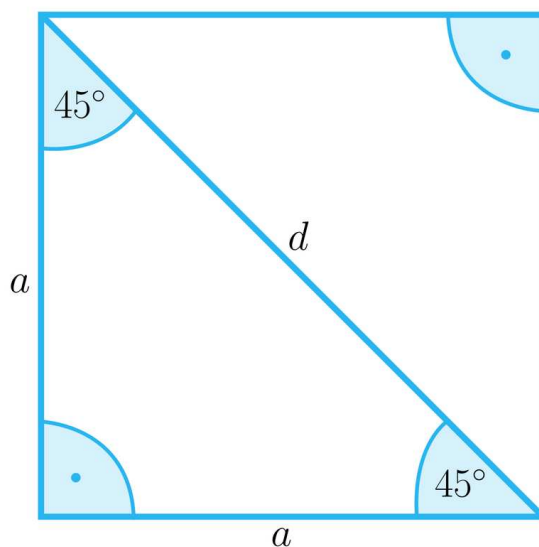
Trójkąt podobny do tego trójkąta w skali 2 ma boki odpowiednio równe: $a\sqrt{3}$, a oraz $2a$.

Zatem dla **trójkąta o kątach wewnętrznych** 30° , 60° , 90° zachodzą zależności między długościami jego boków takie, jak na poniższym rysunku.



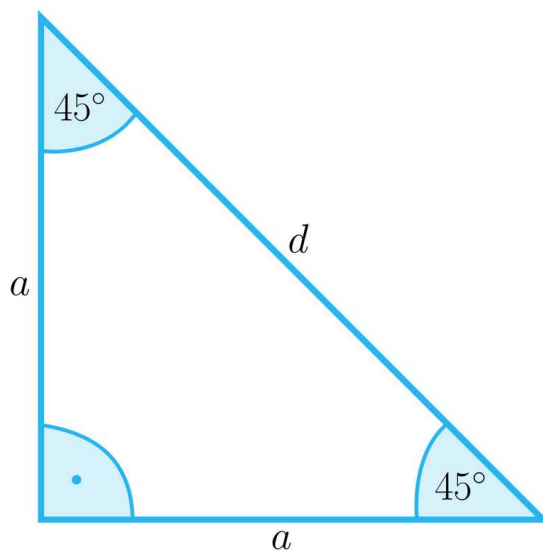
Trójkąt o kątach wewnętrznych 45° , 45° , 90°

Zauważmy, że taki rodzaj trójkąta możemy otrzymać poprzez narysowanie przekątnej długości d w kwadracie o boku długości a .



Długość przekątnej możemy uzależnić od długości boku kwadratu.

W tym celu użyjemy twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta o bokach długości a , a oraz d .



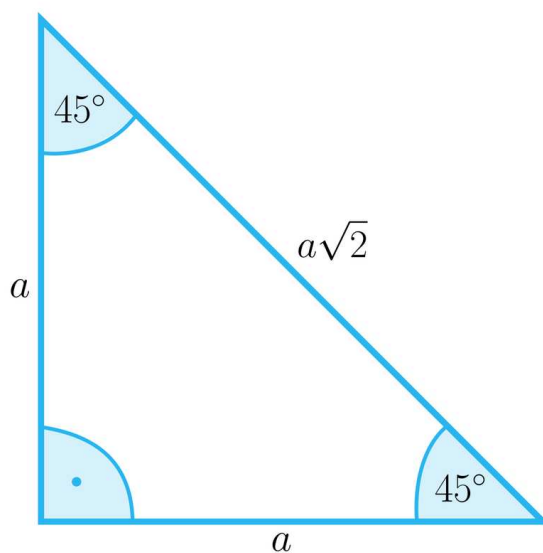
Zatem mamy:

$$a^2 + a^2 = d^2$$

$$d^2 = 2a^2$$

$$d = a\sqrt{2}$$

Dla trójkąta o kątach wewnętrznych 45° , 45° , 90° zachodzą zależności między długościami jego boków takie, jak na poniższym rysunku.

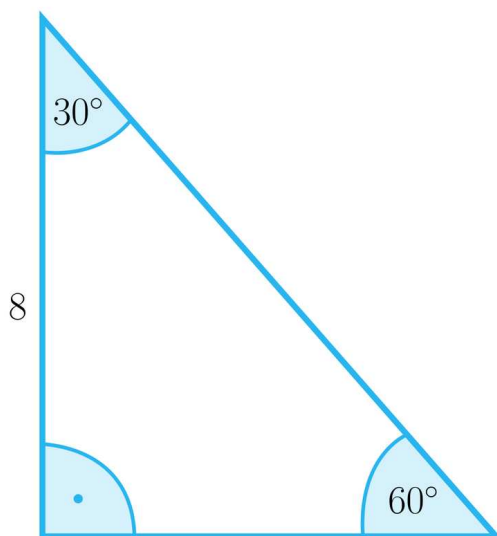


Rozważany trójkąt jest prostokątny równoramienny.

Przykład 1

Obliczymy obwody trójkątów o wymiarach, jak na poniższych rysunkach.

Rysunek I:



Rozwiązanie:

Jeżeli a jest długością boku trójkąta, przy którym leżą kąty o miarach 90° i 60° , to do wyznaczenia wartości a rozwiążemy równanie:

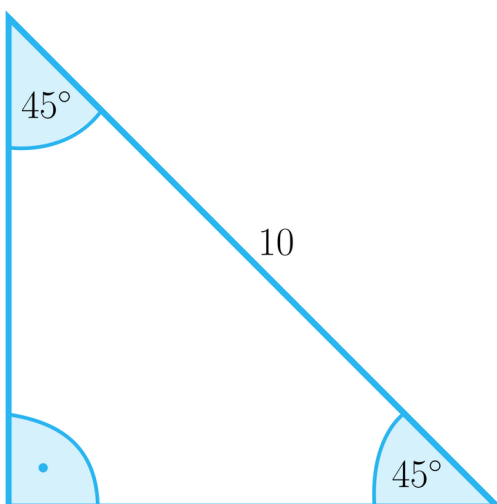
$$a\sqrt{3} = 8, \text{ zatem } a = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{W związku z tym } 2a = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

Zatem obwód L tego trójkąta wynosi:

$$L = 8 + \frac{8\sqrt{3}}{3} + \frac{16\sqrt{3}}{3} = 8 + 8\sqrt{3}.$$

Rysunek II:



Rozwiązanie:

Jeżeli a jest długością boku trójkąta, przy którym leżą kąty o miarach 90° i 45° , to do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$$a\sqrt{2} = 10, \text{ czyli } a = 5\sqrt{2}.$$

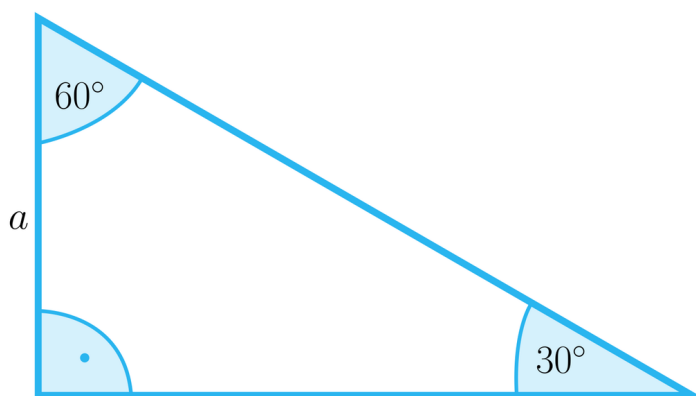
Zatem obwód L tego trójkąta wynosi:

$$L = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 10 = 10\sqrt{2} + 10.$$

Przykład 2

Wyznamy długości boków trójkątów z poniższych rysunków.

Rysunek I – obwód trójkąta wynosi 6.

**Rozwiązanie:**

Jeżeli a jest długością boku trójkąta, przy którym leżą kąty o miarach 90° i 60° , to do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$$a + a\sqrt{3} + 2a = 6, \text{ a dalej:}$$

$$3a + a\sqrt{3} = 6.$$

Równanie możemy zapisać w postaci:

$$a(3 + \sqrt{3}) = 6.$$

Zatem:

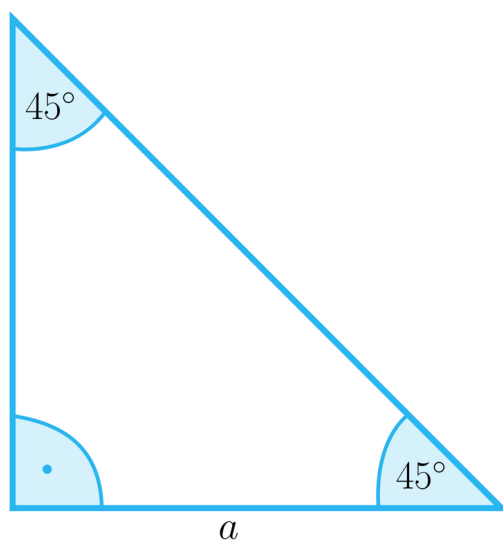
$$a = \frac{6}{3 + \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot (3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3})} = \frac{6 \cdot (3 - \sqrt{3})}{6} = 3 - \sqrt{3},$$

$$2a = 2(3 - \sqrt{3}) = 6 - 2\sqrt{3},$$

$$a\sqrt{3} = (3 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3.$$

Długości boków tego trójkąta wynoszą odpowiednio: $3 - \sqrt{3}$, $3\sqrt{3} - 3$ oraz $6 - 2\sqrt{3}$.

Rysunek II – obwód trójkąta wynosi 4.



Rozwiązanie:

Jeżeli a jest długością boku trójkąta, przy którym leżą kąty o miarach 90° i 45° , to do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$$a + a + a\sqrt{2} = 4, \text{ a dalej:}$$

$$2a + a\sqrt{2} = 4.$$

Równanie możemy zapisać w postaci:

$$a(2 + \sqrt{2}) = 4,$$

$$a = \frac{4}{2 + \sqrt{2}}.$$

Zatem:

$$a = \frac{4}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2})} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2},$$

$$a\sqrt{2} = (4 - 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 4.$$

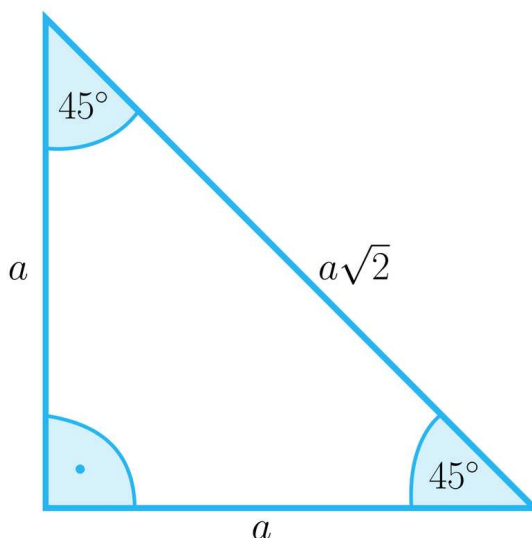
Długości boków tego trójkąta wynoszą odpowiednio: $4 - 2\sqrt{2}$, $4 - 2\sqrt{2}$ oraz $4\sqrt{2} - 4$.

Przykład 3

Wiadomo, że obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego jest równy $6\sqrt{2} + 6$. Wyznamy pole tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia tak, jak na rysunku:



Z równania na obwód trójkąta obliczamy wartość a :

$$2a + a\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 6.$$

Równanie możemy zapisać w postaci:

$$a \cdot (2 + \sqrt{2}) = 6\sqrt{2} + 6,$$

$$a \cdot (2 + \sqrt{2}) = 3\sqrt{2} \cdot (2 + \sqrt{2}).$$

Zatem:

$$a = 3\sqrt{2}.$$

W związku z tym pole P tego trójkąta jest równe:

$$P = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = 9.$$

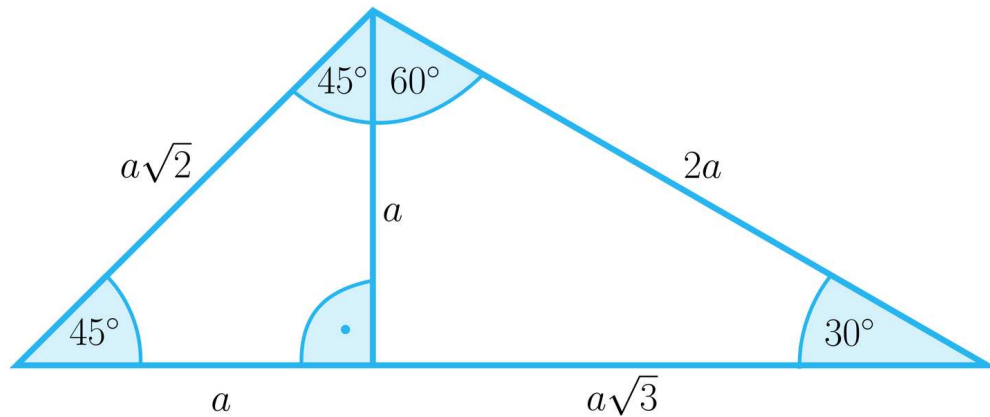
Zależności między bokami w trójkątach charakterystycznych możemy wykorzystać do rozwiązywania różnych problemów matematycznych.

Przykład 4

Wyznamy obwód trójkąta, jeżeli kąty przy jego podstawie mają miary 45° i 30° , a jego pole wynosi $2 + 2\sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy do zadania. Jeżeli narysujemy wysokość tego trójkąta, to otrzymujemy dwa trójkąty charakterystyczne, jak na poniższym rysunku:



Jeżeli pole tego trójkąta wynosi $2 + 2\sqrt{3}$, to do wyznaczenia wartości a rozwiążemy równanie:

$$\frac{(a + a\sqrt{3}) \cdot a}{2} = 2 + 2\sqrt{3}$$

Równanie przekształcamy do postaci

$$a^2 + a^2\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3}$$

Zatem:

$$a^2 \cdot (1 + \sqrt{3}) = 4 \cdot (1 + \sqrt{3})$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2 \text{ lub } a = -2$$

Ponieważ $a > 0$, zatem $a = 2$.

Boki trójkąta mają długości:

$$a + a\sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{3},$$

$$a\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$2a = 2 \cdot 2 = 4.$$

Zatem obwód L tego trójkąta wynosi:

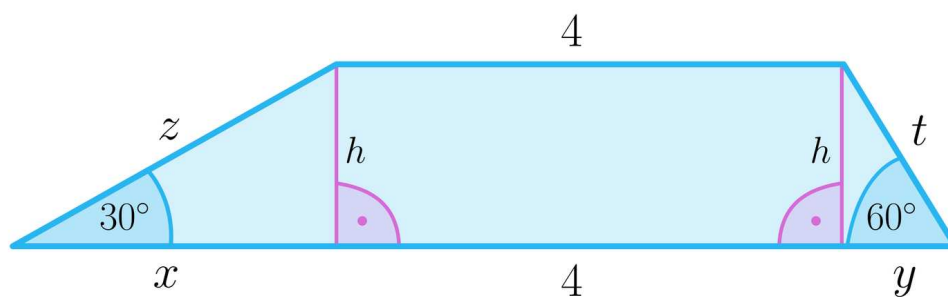
$$L = 2 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 4 = 6 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}.$$

Przykład 5

W trapezie kąty ostre przy podstawie mają miary 60° i 30° . Obliczmy długości ramion tego trapezu, jeżeli krótsza podstawa trapezu ma długość 4, a suma długości podstaw jest równa sumie długości ramion tego trapezu.

Rozwiązanie:

Narysujmy trapez i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Korzystając z zależności pomiędzy bokami w trójkącie o kątach 30° , 60° , 90° mamy:

$$x = h\sqrt{3}$$

$$z = 2h$$

$$y = \frac{h\sqrt{3}}{3}$$

$$t = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$$

Ponieważ suma długości podstaw tego trapezu jest równa sumie długości jego ramion, zatem do wyznaczenia wartości h rozwiązujemy równanie:

$$z + t = x + y + 8$$

$$2h + \frac{2h\sqrt{3}}{3} = h\sqrt{3} + \frac{h\sqrt{3}}{3} + 8$$

$$6h + 2h\sqrt{3} = 3h\sqrt{3} + h\sqrt{3} + 24$$

$$6h - 2h\sqrt{3} = 24$$

$$h(6 - 2\sqrt{3}) = 24$$

$$h = \frac{24}{6-2\sqrt{3}} = \frac{24 \cdot (6+2\sqrt{3})}{(6-2\sqrt{3}) \cdot (6+2\sqrt{3})} = 6 + 2\sqrt{3}$$

Zatem ramiona trapezu mają długości:

$$z = 2 \cdot (6 + 2\sqrt{3}) = 12 + 4\sqrt{3}$$

$$t = \frac{2 \cdot (6+2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{12\sqrt{3}+12}{3} = 4\sqrt{3} + 4$$

Słownik

trójkąty charakterystyczne

trójkąt prostokątny o kątach wewnętrznych 30° , 60° , 90° lub trójkąt prostokątny o kątach wewnętrznych 45° , 45° , 90°

Infografika

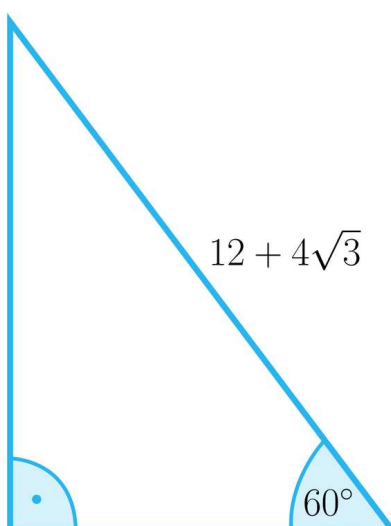
Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Niech a będzie długością boku trójkąta, przy którym leżą odpowiednio kąty 90° i 60° (rys.1) oraz 90° i 45° (rys. 2).

Polecenie 2

Wyznacz obwód i pole trójkąta przedstawionego na poniższym rysunku.



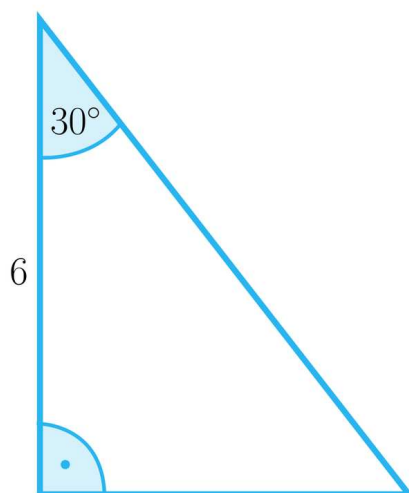
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź.



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Obwód trójkąta przedstawionego na rysunku wynosi:

☐ $9 + 3\sqrt{3}.$

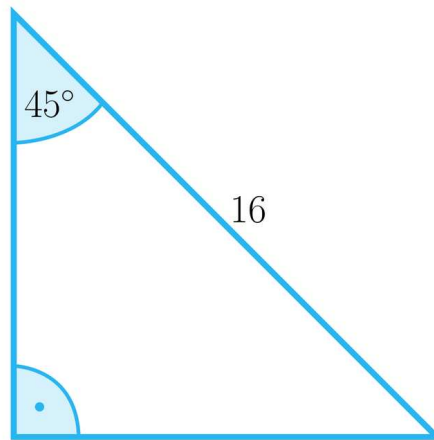
☐ $6 + 6\sqrt{3}.$

☐ $18 + 3\sqrt{3}.$

Ćwiczenie 2



Zapoznaj się z rysunkiem i rozwiąż zadanie.



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość 8.

☐ Obwód trójkąta z rysunku wynosi $16 \cdot (1 + \sqrt{2})$.

☐ Pole tego trójkąta wynosi 84.

☐ Suma długości przyprostokątnych trójkąta wynosi $8\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 3



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem.

Trójkąt o kątach wewnętrznych 30° , 60° , 90° :

jest połową trójkąta równobocznego, a jego jeden bok jest równy długości boku trójkąta równobocznego

Trójkąt o kątach wewnętrznych 45° , 45° , 90° :

jest połową kwadratu, a jego jeden bok ma taką samą długość jak przekątna kwadratu

jest trójkątem prostokątnym równoramiennym

jest trójkątem prostokątnym różnobocznym

ma przyprostokątne takiej samej długości

ma przyprostokątną równą połowie długości jego przeciwprostokątnej

Ćwiczenie 4



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Przyprostokątne trójkąta o kątach wewnętrznych 45° , 45° , 90° mają długości 6.

Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość .

Obwód tego trójkąta wynosi .

Pole tego trójkąta jest równe .

Ćwiczenie 5



Wiadomo, że trójkąt prostokątny ma kąty ostre 30° i 60° . Oznaczmy dłuższą przyprostokątną tego trójkąta jako $a\sqrt{3}$. Połącz w pary długość dłuższej przyprostokątnej z odpowiadającą jej wartością pola tego trójkąta.

$$a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$P = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$a\sqrt{3} = 4$$

$$P = 2\sqrt{3}$$

$$a\sqrt{3} = 3$$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$a\sqrt{3} = 1$$

$$P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ćwiczenie 6



W trapezie równoramiennym kąt ostry przy podstawie ma miarę 30° , a podstawy tego trapezu mają długości 4 i 10. Zatem pole tego trapezu wynosi:

☐ $21\sqrt{3}$.

☐ $24 + 18\sqrt{3}$.

☐ $7\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 7

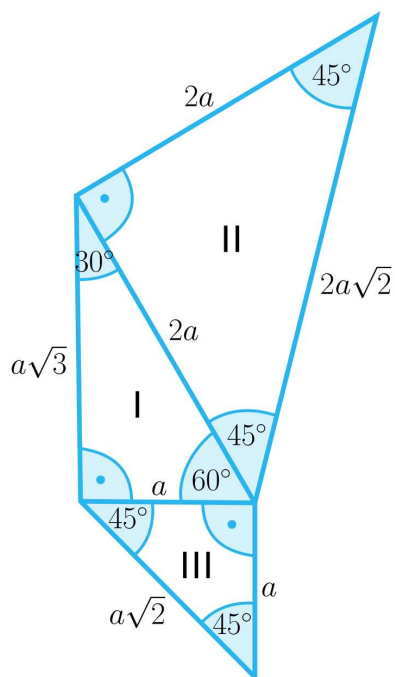


Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego o przeciwprostokątnej długości $2\sqrt{6}$.

Ćwiczenie 8



Wiadomo, że pole trójkąta prostokątnego oznaczonego rzymskim I jest o 2 mniejsze od pola trójkąta prostokątnego oznaczonego rzymskim II. Wyznacz pole trójkąta prostokątnego oznaczonego rzymskim III.



Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Trójkąty prostokątne o kątach ostrych 30 stopni i 60 stopni oraz trójkąty prostokątne o kątach ostrych 45 stopni

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje długości boków trójkątów charakterystycznych za pomocą zależności,
- wykorzystuje poznane zależności między długościami boków w trójkątach charakterystycznych do rozwiązywania zadań dotyczących obwodów i pól trójkątów,
- ocenia swoją wiedzę, wykonując polecenia i rozwiązując ćwiczenia interaktywne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- objaśnienie nowej wiedzy;
- z użyciem e-podręcznika;

- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego;
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.
2. Uczniowie w parach przygotowują pytania, na które odpowiedzą w trakcie lekcji. Zgłaszają swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu, jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.
3. Uczniowie wspólnie z nauczycielem formułują cele oraz kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w 4-osobowych grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania przed całą klasą. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości. W trakcie pracy uczniowie mogą wspomagać się materiałem z e-podręcznika.
2. Uczniowie zapoznają się z poleceniami z sekcji „Infografika”. Po zaznajomieniu się z treściami nauczyciel komentuje, i w razie potrzeby wyjaśnia, najważniejsze etapy realizacji polecenia. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych poleceń, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Wybrani uczniowie rozwiązują ćwiczenia numer 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność zadań, dopowiada istotne informacje.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.

5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązywania ćwiczeń w temacie: „Trójkąty prostokątne o kątach ostrych 30 stopni i 60 stopni oraz trójkąty prostokątne o kątach ostrych 45 stopni”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Trójkąty prostokątne o kątach ostrych 30 stopni i 60 stopni oraz trójkąty prostokątne o kątach ostrych 45 stopni”).

Materiały pomocnicze:

- [Trójkąty o kątach 30,60, 90 stopni.](#)
- [Trójkąty o kątach 45,45, 90 stopni.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał z sekcji „Infografika” można wykorzystać jako powtórzenie do omówionego tematu.
- W trakcie lekcji należy kłaść nacisk na pracę grupową uczniów oraz aktywne poznawanie wiedzy.