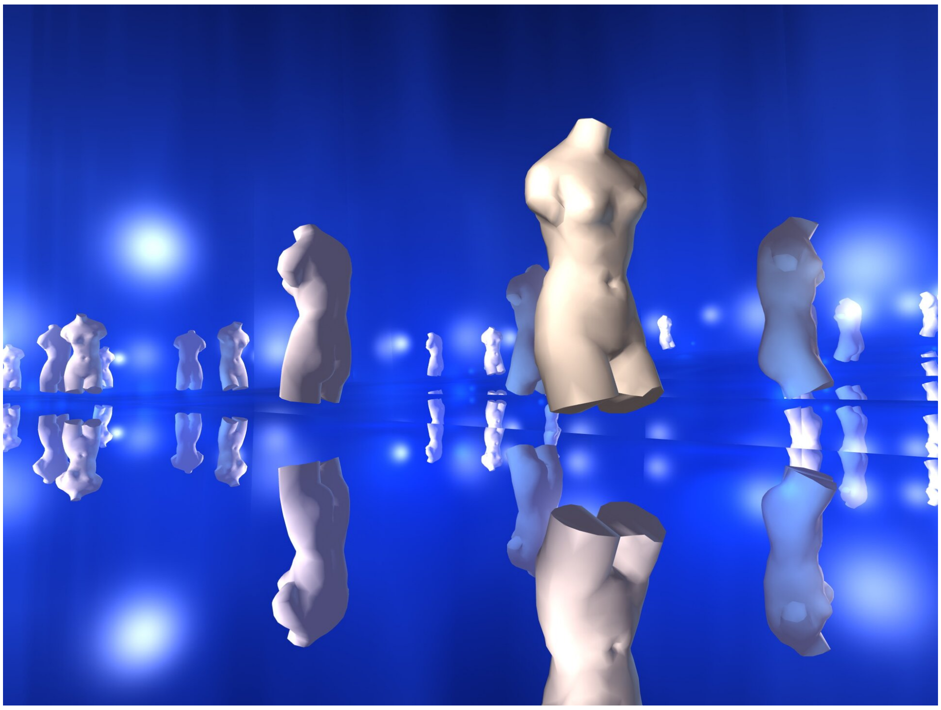
Wzór ogólny ciągu określonego rekurencyjnie

Wzór ogólny ciągu określonego rekurencyjnie

Źródło: Pete Linforth z Pixabay, domena publiczna.

Rzeczywistym modelem abstrakcyjnego pojęcia, jakim jest rekurencja, może być tzw. **lustro nieskończoności**. Lustro nieskończoności tworzą lusterka ustawione w ten sposób, że przedmiot odbity w jednym lusterku odbija się w następnym, itd. Tworzą się w ten sposób coraz mniejsze odbicia, dając złudzenie, że nikną one w nieskończoności. Efekt iluzji powoduje, że wydaje się iż utworzony został tunel o nieskończonej długości.



Wenus w lustrach

Źródło: Nevit Dilmen, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 3.0.

Odpowiednio pochylone lusterka powodują, że każde odbicie wydłuża drogę, jaką musi pokonać światło, zanim dotrze do widza. Seria powtarzających się obrazów tworzy nieskończoną figurę, zwaną Rogiem Gabriela. Róg Gabriela to przedziwna figura, która ma nieskończoną powierzchnię, ale skończoną objętość.

W tym materiale zastanowimy się, w jaki sposób na podstawie wzoru rekurencyjnego ciągu znaleźć jego wzór ogólny.

> **Twoje cele**
>
> - Odkryjesz zależność między kolejnymi wyrazami danego ciągu określonego rekurencyjnie.
> - Zapiszesz wzór ogólny ciągu określonego rekurencyjnie.
> - Określisz niektóre własności ciągu określonego rekurencyjnie.

Przeczytaj

Ciąg określamy zwykle podając wzór na n–ty wyraz tego ciągu. Można jednak określić ciąg w inny sposób – na przykład rekurencyjnie. Określając ciąg rekurencyjnie, podajemy najczęściej jego pierwszy wyraz (lub kilka początkowych wyrazów) oraz związek między dowolnym wyrazem ciągu, a wyrazem bezpośrednio go poprzedzającym.

Definicja: definicja rekurencyjna ciągu

Mówimy, że ciąg jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeżeli:

- określony jest pewien skończony zbiór wyrazów tego ciągu (zwykle jest to pierwszy wyraz ciągu lub kilka jego pierwszych wyrazów),
- pozostałe wyrazy ciągu są zdefiniowane za pomocą poprzednich wyrazów tego ciągu.

Ten sposób określania ciągu nie jest jednak zbyt wygodny, bo określenie na przykład wyrazu dziesiątego, wymaga znalezienia aż dziewięciu wyrazów go poprzedzających.

Dobrze jest więc umieć znaleźć wzór ogólny danego ciągu, określonego wzorem rekurencyjnym.

Przykład 1

Ciąg (a_n) określony jest dla $n \geq 1$ wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$.

Znajdziemy wzór na n–ty wyraz tego ciągu.

Wyznaczymy kilka początkowych wyrazów ciągu i ustalimy zależność między wartością wyrazu ciągu, a jego wskaźnikiem.

$a_1 = 4$

$a_2 = 4 + 2 = 6 = 2 \cdot 2 + 2$

$a_3 = 6 + 2 = 8 = 2 \cdot 3 + 2$

$a_4 = 8 + 2 = 10 = 2 \cdot 4 + 2$

$a_5 = 10 + 2 = 12 = 2 \cdot 5 + 2$

$a_6 = 12 + 2 = 14 = 2 \cdot 6 + 2$

Możemy sformułować hipotezę:

$a_n = 2 \cdot n + 2.$

Gdybyśmy chcieli formalnie udowodnić, że ustalony przez nas wzór jest prawdziwy, należałoby skorzystać na przykład z indukcji matematycznej, co jednak wykracza pozna proponowany tu materiał.

Przyjmujemy zatem, że szukany wzór ogólny to

$a_n = 2n + 2$, gdy $n \geq 1$.

Przykład 2

Ciąg (a_n) określony jest za pomocą wzoru rekurencyjnego $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 5 \cdot a_n, \ n \geq 1 \end{cases}$.

Podamy wzór na n–ty wyraz tego ciągu.

1 Sposób

Wyznaczamy kilka początkowych wyrazów ciągu i staramy się odkryć zależność między wyrazem a_n i n.

n	a_n
1	$a_1 = 1 = 5^0 = 5^{1-1}$
2	$a_2 = 5 \cdot 1 = 5 = 5^{2-1}$
3	$a_3 = 5 \cdot 5 = 25 = 5^{3-1}$
4	$a_4 = 5 \cdot 25 = 125 = 5^{4-1}$
5	$a_5 = 5 \cdot 125 = 625 = 5^{5-1}$
...	...
n	$a_n = 5^{n-1}$

Zauważmy, że poszczególne wyrazy ciągu można zapisać w postaci potęgi liczby 5. Zatem wzór ogólny ciągu to:

$a_n = 5^{n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$.

2 Sposób

Na podstawie wzoru rekurencyjnego zapisujemy zależności między wyrazami ciągu.

$a_2 = 5a_1$

$a_3 = 5a_2$

$a_4 = 5a_3$

$a_5 = 5a_4$

$a_6 = 5a_5$

...

$a_{n-1} = 5a_{n-2}$

$a_n = 5a_{n-1}$

Mnożymy stronami zapisane równości (jest ich $n-1$).

$a_2 a_3 a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} a_n = 5a_1 \cdot 5a_2 \cdot \ldots \cdot 5a_{n-2} \cdot 5a_{n-1}$

Każdy wyraz ciągu (a_n) jest różny od zera, zatem możemy obie strony otrzymanej równości podzielić przez $a_2 a_3 a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$.

Stąd

$a_n = 5^{n-1} \cdot a_1$.

Ponieważ $a_1 = 1$, więc ostatecznie

$a_n = 5^{n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$.

Badanie własności ciągu określonego rekurencyjnie jest dość trudne, zatem warto najpierw znaleźć wzór ogólny tego ciągu, a dopiero następnie określać jego własności.

Przykład 3

Zbadamy monotoniczność ciągu (a_n) określonego za pomocą wzoru rekurencyjnego
$\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_{n+1} = a_n + 2, \ n \geq 1 \end{cases}$.

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu i staramy się odkryć zależność między wyrazem a_n i n.

n	a_n
1	$a_1 = 9 = 9 + (1-1) \cdot 2$
2	$a_2 = 9 + 2 = 11 = 9 + 2 = 9 + (2-1) \cdot 2$
3	$a_3 = 11 + 2 = 13 = 9 + 4 = 9 + (3-1) \cdot 2$
4	$a_4 = 13 + 2 = 15 = 9 + 6 = 9 + (4-1) \cdot 2$
5	$a_5 = 15 + 2 = 17 = 9 + 8 = 9 + (5-1) \cdot 2$
...	...
n	$a_n = 9 + (n-1) \cdot 2$

Znaleziony wzór ogólny ciągu zapiszemy w prostszej postaci.

$a_n = 9 + (n-1) \cdot 2$

$a_n = 2n + 7$

Określamy monotoniczność ciągu.

$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) + 7 - 2n - 7$

$a_{n+1} - a_n = 2n + 2 - 2n = 2 > 0$

Różnica między kolejnymi wyrazami ciągu jest dodatnia – ciąg jest rosnący.

Przykład 4

Ustalimy, ile wyrazów ciągu (a_n) określonego za pomocą wzoru rekurencyjnego $\begin{cases} a_1 = 15 \\ a_{n+1} = a_n + 2n - 9, \ n \geq 1 \end{cases}$ jest ujemnych.

Postępując podobnie, jak w poprzednich przykładach, znajdziemy najpierw wzór ogólny ciągu.

Tym razem zauważenie analogicznych zależności między kolejnymi wyrazami ciągu jest trudne.

$a_1 = 15 = 1^2 - 10 \cdot 1 + 24$

$a_2 = 15 + 2 \cdot 1 - 9 = 8 = 2^2 - 10 \cdot 2 + 24$

$a_3 = 8 + 2 \cdot 2 - 9 = 3 = 3^2 - 10 \cdot 3 + 24$

$a_4 = 3 + 2 \cdot 3 - 9 = 0 = 4^2 - 10 \cdot 4 + 24$

$a_5 = 0 + 2 \cdot 4 - 9 = -1 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 24$

$a_6 = -1 + 2 \cdot 5 - 9 = 0 = 6^2 - 10 \cdot 6 + 24$

Na podstawie zapisanych wyżej zależności formułujemy wzór ogólny ciągu.

$a_n = n^2 - 10n + 24$

Sprawdzimy, czy dla a_{n+1} otrzymamy taki wzór, jak zapisany we wzorze rekurencyjnym.

$a_{n+1} = (n+1)^2 - 10(n+1) + 24$

$a_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - 10n - 10 + 24$

$a_{n+1} = \left(n^2 - 10n + 24\right) + 2n - 9$

$a_{n+1} = a_n + 2n - 9$ i $a_1 = 1 - 10 + 24 = 15$.

Sprawdziliśmy, że otrzymany wzór ogólny jest poprawny.

Określimy teraz, ile wyrazów ciągu jest ujemnych. Rozwiążemy w tym celu nierówność kwadratową

$n^2 - 10n + 24 < 0$

$\Delta = 100 - 96 = 4$

$n_1 = \frac{10-2}{2} = 4$

$n_2 = \frac{10+2}{2} = 6$

Zatem $n \in (4, 6)$

Ponieważ n jest liczbą naturalną, więc $n = 5$.

Wynika z tego, że tylko jeden wyraz ciągu jest ujemny. Jest to piąty wyraz ciągu:

$a_5 = -1 < 0$.

Przykład 5

Wykażemy, że żaden wyraz ciągu (b_n) określonego wzorem $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = 3b_n - 2, \ n \geq 1 \end{cases}$ nie jest równy 0.

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu, aby znaleźć wzór ogólny ciągu.

$b_1 = 2$

$b_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4 = 3 + 1 = 3^1 + 1$

$b_3 = 3 \cdot 4 - 2 = 10 = 3^2 + 1$

$b_4 = 3 \cdot 10 - 2 = 28 = 3^3 + 1$

$b_5 = 3 \cdot 28 - 2 = 82 = 3^4 + 1$

Formułujemy wzór ogólny ciągu.

$b_n = 3^{n-1} + 1$ dla $n \geq 1$.

Szukamy wyrazów ciągu, które są równe 0.

$3^{n-1} + 1 = 0$

$\frac{1}{3} \cdot 3^n = -1$

$3^n = -3$

Dla każdej liczby naturalnej n liczba 3^n jest dodatnia. Zatem zapisane równanie jest sprzeczne. Czyli dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $b_n > 0$. Wykazaliśmy więc, że każdy wyraz ciągu (b_n) jest różny od 0, co należało wykazać.

Słownik

definicja rekurencyjna ciągu

mówimy, że ciąg jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeżeli:

- określony jest pewien skończony zbiór wyrazów tego ciągu (zwykle jest to pierwszy wyraz ciągu lub kilka jego pierwszych wyrazów),
- pozostałe wyrazy ciągu są zdefiniowane za pomocą poprzednich wyrazów tego ciągu

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją pokazującą sposoby poszukiwania wzoru ogólnego ciągu określonego wzorem rekurencyjnym. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać proponowane tam zadania, a następnie porównaj z rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DvKsV2wTU

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wyznaczania wzoru na wyraz ciągu określonego rekurencyjnie.

Polecenie 2

Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) określonego wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1 \end{cases}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n \end{cases}$.

Ćwiczenie 7

Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -a_n \end{cases}$ jest naprzemienny.

Ćwiczenie 8

Oblicz, który wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 8n \end{cases}$ jest równy 625

.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór ogólny ciągu określonego rekurencyjnie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa II lub III

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach

$$\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_n = a_n + \frac{1}{2} \cdot a_n(1 - a_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odkrywa zależności między kolejnymi wyrazami danego ciągu określonego rekurencyjnie;
- zapisuje wzór ogólny ciągu określonego rekurencyjnie ;

- podaje niektóre własności ciągu określonego rekurencyjnie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- milcząca tablica;
- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie wspólnie tworzą mapę myśli zbierającą informacje na temat ciągów, powtarzając w ten sposób potrzebne wiadomości.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z animacją i częścią teoretyczną zapisaną w sekcji Przeczytaj.
2. Następnie uczniowie rozwiązują przykłady z sekcji Przeczytaj metodą milcząca tablica - nauczyciel zapisuje na tablicy rekurencyjny wzór ciągu (taki, jak w kolejnych przykładach w Przeczytaj), a chętny uczeń na tablicy prezentuje swój pomysł na znalezienie wzoru ogólnego tego ciągu.
3. Pozostali uczniowie mogą korygować prezentowane na tablicy rozwiązanie – nauczyciel jest obserwatorem i nie może podpowiadać uczniom.
4. W ten sposób uczniowie prawdopodobnie znajdą kilka możliwych rozwiązań jednego problemu, co będzie zaczynkiem do dyskusji podsumowującej tę część lekcji.
5. Dyskusja – dlaczego ciąg liczbowy warto opisywać różnymi sposobami.

Faza podsumowująca:

1. W ramach podsumowania wyznaczony wcześniej uczeń przedstawia krótką prezentację pokazującą znaczenie ciągów liczbowych zdefiniowanych rekurencyjnie

dla rozwoju teorii liczb.
2. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

- Rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana na zajęciach wprowadzających określenie rekurencyjne ciągu geometrycznego lub arytmetycznego.