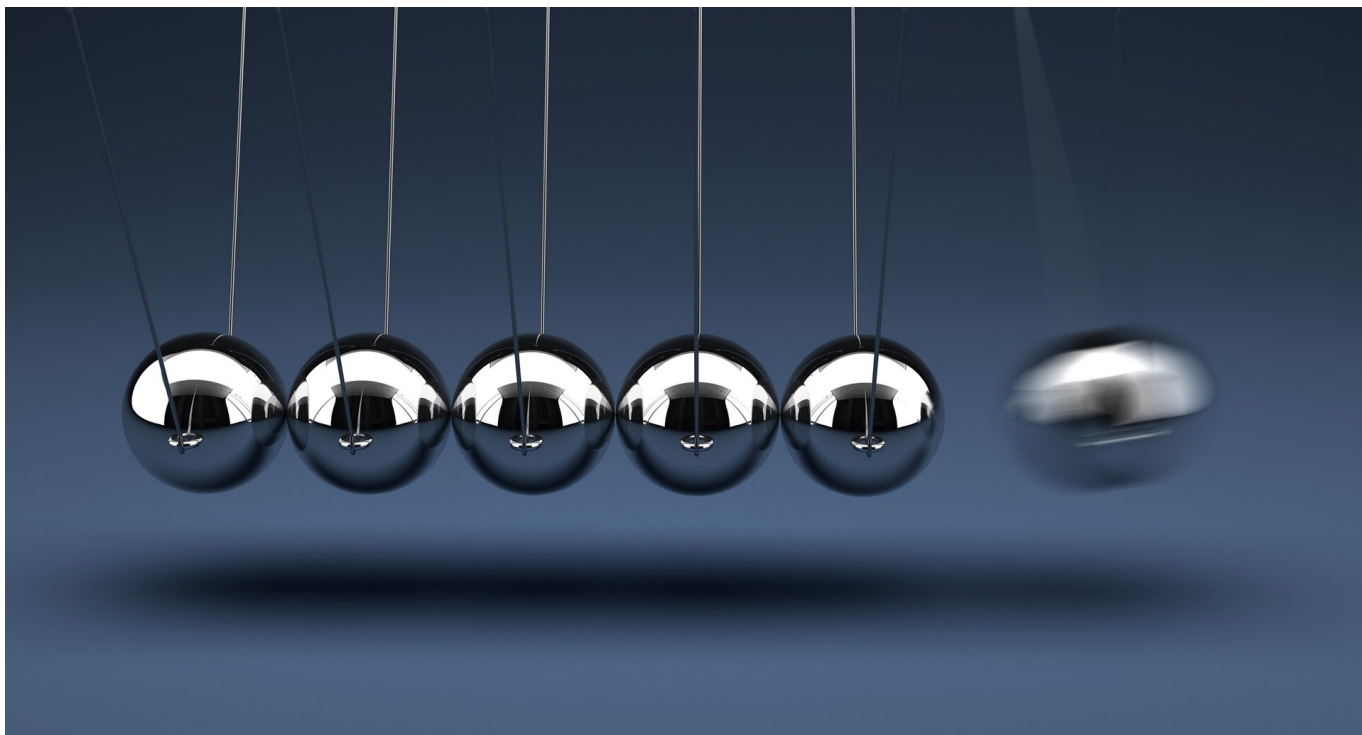
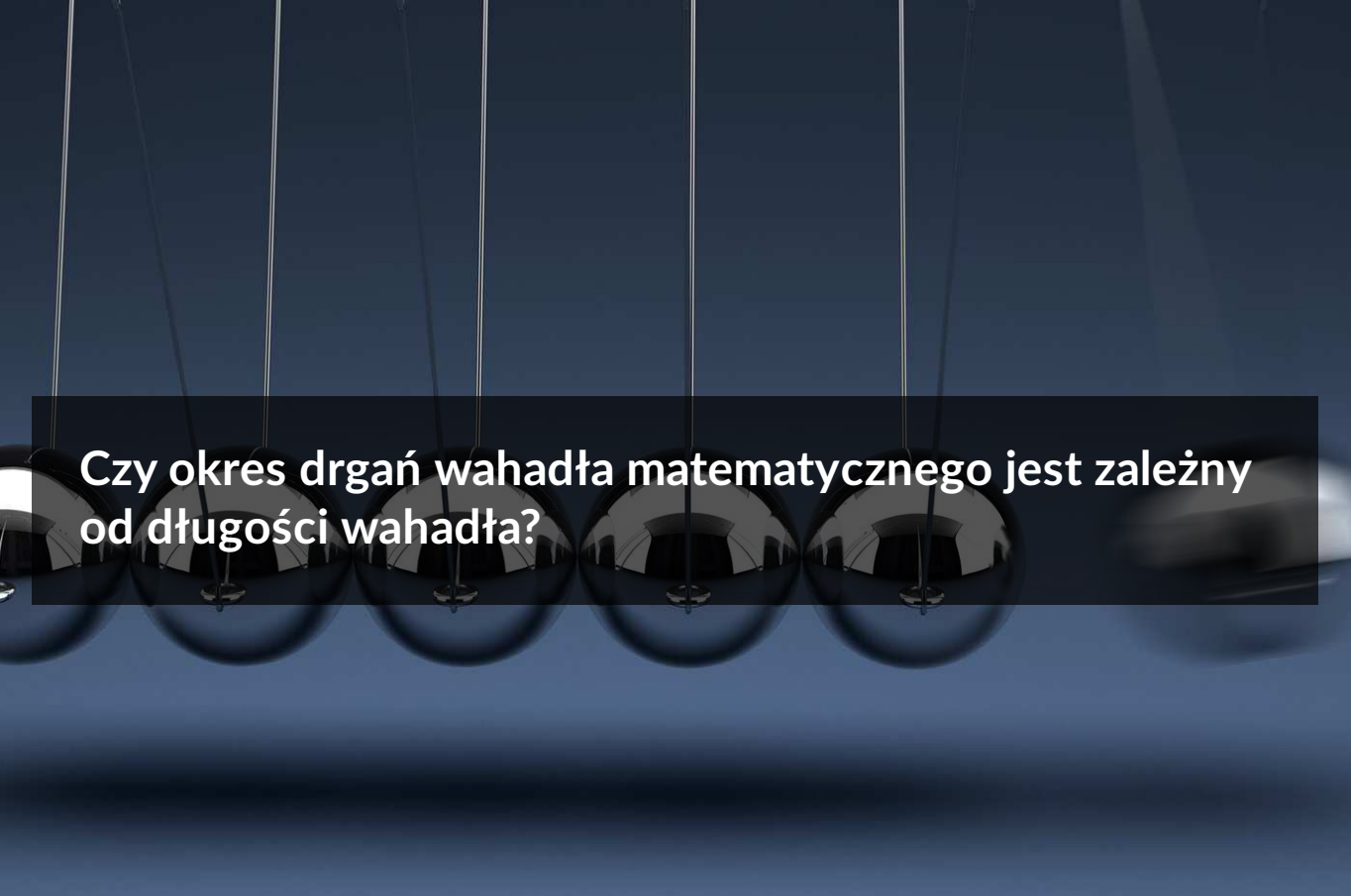




Czy okres drgań wahadła matematycznego jest zależny od długości wahadła?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Wirtualne laboratorium WL-I](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



**Czy okres drgań wahadła matematycznego jest zależny od długości wahadła?**

Źródło: dostępny w internecie: <https://www.istockphoto.com/pl/zdjęcie/kołyska-newtona-gm465044128-59504348> [dostęp 29.05.2022], iStockphoto, tylko do użytku edukacyjnego na [zpe.gov.pl](https://zpe.gov.pl).

## Czy to nie ciekawe ?

Od czego może zależeć okres drgań wahadła? Jeśli zastanawiasz się nad tym po raz pierwszy, możesz pomyśleć o różnych wielkościach, np. o długości wahadła, masie ciężarka, amplitudzie drgań, wychyleniu początkowym, prędkości początkowej czy przyspieszeniu grawitacyjnym. Okazuje się, że okres drgań wahadła znacząco zależy tylko od dwóch spośród wymienionych wielkości. Czy zależy on od długości wahadła? Dowiesz się tego, czytając ten e-materiał.



Rys. a. Pierwszy zegar wahadłowy został zbudowany przez Christiaana Huygensa, który około roku 1657 zastosował w praktyce sformułowane przez Galileusza prawo ruchu wahadłowego (tj. niezależność okresu wahadła od masy obciążnika i amplitudy drgań). Warto wiedzieć, że we współczesnych zegarach wahadłowych, zamiast zwykłego wahadła mechanicznego, stosuje się zwykle elektromagnesy lub napędy sprężynowe.

Źródło: dostępny w internecie: <https://pixabay.com/pl/photos/zegar-wahad%C5%82owy-stary-wahad%C5%82o-2196266/> [dostęp 29.05.2022].

### Twoje cele

- wyjaśnisz, jaka jest zależność okresu drgań wahadła matematycznego od jego długości,
- przeprowadzisz eksperyment w wirtualnym laboratorium, na podstawie którego zweryfikujesz doświadczalnie teoretyczną zależność okresu drgań wahadła od jego długości,
- rozwiążesz szereg problemów rachunkowych, które pomogą Ci utrwalić wiadomości na temat wahadła matematycznego.

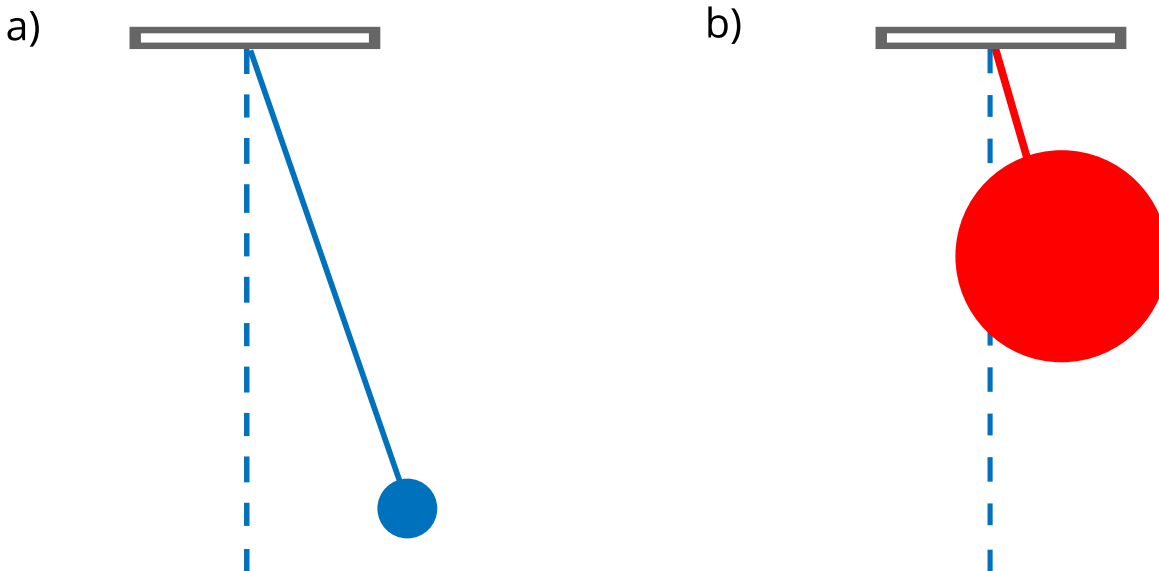
# Przeczytaj

---

## Warto przeczytać

**Wahadłem matematycznym** nazywamy zawieszone na nieważkiej nitce ciało, które ma niewielkie rozmiary w porównaniu z długością nitki - możemy je więc traktować jako punkt materialny. Sznurek mocujemy nieruchomo i pozwalamy wahadłu wykonywać ruch po łuku okręgu w pewnej ustalonej płaszczyźnie.

Zatem, jeśli zawiesimy małą kulkę o średnicy 2 cm na metrowej linie, to zbudujemy wahadło matematyczne (Rys. 1a.). Wahadłem matematycznym nie będzie natomiast kula o średnicy jednego metra zawieszona na pięciocentymetrowym haku (Rys. 1b.). W tym przypadku ciężko byłoby kogoś przekonać, że zastąpienie kuli punktem materialnym jest sensownym przybliżeniem.



Rys. 1. a) Kulka zawieszona na nitce może być traktowana, jak wahadło matematyczne, jeśli jej promień jest znacznie mniejszy od długości nici i odchylenie nici od pionu jest niewielkie. b) Kula, która jest zawieszona na nici o długości porównywalnej z jej promieniem, nie jest wahadłem matematycznym.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Dopóki amplituda drgań wahadła matematycznego jest dużo mniejsza od jego długości, **okres drgań** wahadła obliczamy ze wzoru

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdzie  $l$  jest długością wahadła, zaś  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim. Mówimy wtedy, że drgania wahadła mają charakter **izochroniczny**, tzn. okres drgań nie zależy od amplitudy drgań. Jest to jednak przybliżenie.

Teoria przewiduje, że im dłuższe jest wahadło, tym wolniej drga, tj. okres drgań jest większy. Postać zależności przedstawiona powyższym wzorem mówi, że aby zwiększyć okres drgań wahadła dwukrotnie, należałoby wydłużyć je czterokrotnie.

Spróbujmy wykonać wykres przewidywanej zależności okresu od długości wahadła,  $T(l)$ . Jeśli opisujemy wahadło znajdujące się na powierzchni Ziemi, wtedy  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Wstawiając to do wyrażenia na  $T(l)$  otrzymujemy

$$T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 2 \cdot 3,14\sqrt{\frac{l}{9,81 \text{ m/s}^2}},$$

więc

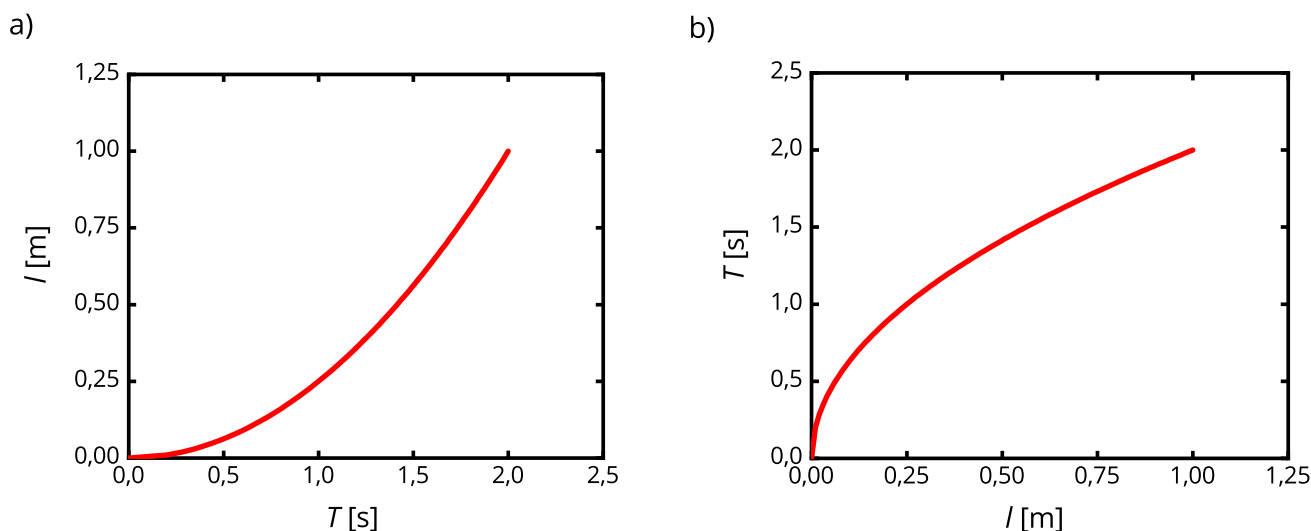
$$T(l) \approx 2,005\sqrt{\frac{l}{1 \text{ m}}} \text{ s.}$$

Sens dzielenia pod pierwiastkiem jest taki, że w wyniku daje *wartość* długości w metrach, ale bez jednostki. Podobnie należy rozumieć sekundę po prawej stronie wzoru.

Czy potrafisz narysować wykres takiej funkcji? Jeśli tak, to wspaniale! Jeśli nie, zawsze możesz wykonać tabelkę jej wartości w arkuszu kalkulacyjnym. My natomiast zrobimy to inaczej. Podnosząc ostatnie wyrażenie obustronnie do kwadratu, otrzymamy

$$l \approx (0,25 \text{ m/s}^2)T^2.$$

Wykres  $l(T)$  to prawe ramię paraboli, ponieważ  $T > 0$  (Rys. 2a.). Zauważmy teraz, że zamieniając osie tego wykresu w taki sposób, jak pokazano na Rys. 2b., dostajemy wykres zależności  $T(l)$ , czyli ten, o który nam chodziło.



Rys. 2. Zależność okresu drgań wahadła od jego długości (opis w tekście).

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Wiemy już więc, jaka jest przewidywana teoretycznie zależność okresu wahadła matematycznego od jego długości. Nie pozostaje nam nic innego, jak zweryfikować tę zależność doświadczalnie! W tym celu można wykonać następujący eksperyment: na wydruku lub papierze milimetrowym przygotowujemy teoretycznie przewidywany wykres zależności okresu  $T$  od długości  $l$  – podobnie, jak było to pokazane powyżej. Następnie przywiązujemy nitkę do ciężarka i montujemy wykonane w ten sposób wahadło na statywie. Mierzmy długość wahadła, czyli odległość od punktu zaczepienia nici na statywie do środka masy ciężarka. Później wprawiamy wahadło w drgania o możliwie małej amplitudzie i mierzymy okres jego ruchu przy pomocy stopera. Powtarzamy tę procedurę dla kilku długości wahadła. W ten sposób uzyskujemy punkty pomiarowe, które umieszczamy na przygotowanym wcześniej wykresie. Im więcej tych punktów tym bardziej wiarygodne będą nasze wnioski.

Aby ściśle zweryfikować zgodność przewidywania teoretycznego z doświadczeniem, należy umieścić na wykresie punkty pomiarowe wraz z odcinkami niepewności pomiarowych (zob. e-materiał pt. *Jak prawidłowo konstruować wykresy?*). Jeśli krzywa teoretyczna przebiega obok punktów pomiarowych, ale przechodzi przez wszystkie odcinki niepewności, wówczas mamy pewność, że wyniki pomiarów potwierdzają zależność teoretyczną.

## Słowniczek

### izochronizm

(ang.: *isochronism*) – właściwość układu drgającego polegająca na niezależności okresu drgań od amplitudy.

## okres drgań

(ang.: *period of oscillation*) – czas trwania jednego pełnego drgania.

## wahadło matematyczne

(ang.: *simple pendulum*) – wahadło, które składa się z nieważkiej i nierozciągliwej linki, na której wisi ciężarek będący masą punktową.

# Wirtualne laboratorium WL-I

---

## Czy okres drgań wahadła matematycznego jest zależny od długości wahadła?

Wykonaj pomiary, dzięki którym zweryfikujesz wzór

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1)$$

opisujący czas  $T$  jednego drgania wahadła matematycznego w zależności od jego długości  $l$ . W powyższym wzorze stała  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  to wartość przyspieszenia ziemskiego.

### Analiza wyników rzeczywistego doświadczenia

Zanim rozpoczniesz pracę w laboratorium wirtualnym, proponujemy Ci obejrzenie filmu nagranego podczas pomiarów w pracowni. Nauczyciel fizyki mierzy czas trwania jednego okresu drgań dla różnych długości wahadła. Pomiary są wykonywane przy pomocy specjalnie przygotowanego zestawu pomiarowego. Pozwala on regulować długość wahadła. Zawiera także odpowiednik fotokomórki, która reaguje na kolejne przejścia nici przez położenie równowagi. Pomiar  $T$  jest automatycznie uruchamiany, a następnie zatrzymywany. Dzięki temu niepewność pomiaru okresu,  $u(T)$ , jest rzędu milisekundy i może być pominięta przy graficznej analizie wyników. Jak się przekonasz, w Wirtualnym laboratorium jest inaczej.

Zauważ, że nauczyciel podaje długość **nici**,  $l_n$ , na której zawieszony jest ciężarek. Aby uzyskać długość wahadła  $l$ , do  $l_n$  należy dodać promień  $r$  kulki, pełniącej rolę ciężarka. Średnica kulki została zmierzona suwmiarką poza kadrem. Uzyskano wynik 5,06 cm, a rozdzielczość suwmiarki to 0,01 cm.





Film dostępny pod adresem </preview/resource/R180JzskmhGhY>

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Zapoznaj się z audiodeskrypcją filmu.

---

## Polecenie 1

- Oglądając film, sporządź tabelkę wyników przeprowadzonych w nim pomiarów. Zaokrąglaj odpowiednio wynik pomiaru średnicy kulki. Wyniki pomiaru okresu drgań zaokrąglaj do czterech cyfr znaczących.

| $l_n$ [m] | $l$ [m] | $T$ [s] |
|-----------|---------|---------|
| 0,470     |         |         |
| 0,525     |         |         |
| 0,575     |         |         |
| 0,645     |         |         |
| 0,730     |         |         |
| 0,820     |         |         |
| 0,875     |         |         |

- Uzasadnij, że dla uzyskania długości wahadła  $l$  należy do  $l_n$  dodać 2, 5 cm, a nie 2, 503 cm.
- Przygotuj, na podstawie tabeli, wykres zależności okresu drgań od długości wahadła zgodny z wyrażeniem (1). Wykorzystaj do tego arkusz kalkulacyjny. Ustal dziedzinę długości od zera do co najmniej jednego metra. W ten sposób obejmiesz wszystkie pomiary z filmu.
- Oglądając film, sporządź tabelkę wyników prowadzonych w nim pomiarów.
- Wykorzystaj te pomiary i nanieś ich wyniki na przygotowany wykres.
- Podaj argumenty przemawiające za tym, iż:
  - okres drgań  $T$  wahadła zależy od jego długości  $l$ ;
  - zależność  $T(l)$  jest rosnąca;
  - wyniki pomiarów są zgodne z wyrażeniem (1).

## **Polecenie 2**

Skorzystaj z wirtualnego laboratorium, by sprawdzić, w jaki sposób czas trwania pojedynczego okresu wahadła matematycznego zależy od jego długości. Postępuj zgodnie z instrukcją dołączoną do laboratorium.

Zacznij od przeprowadzenia analizy graficznej, proponowanej Doświadczeniu 1.

Następnie rozważ zwiększenie liczby pomiarów i przeprowadź analizę numeryczną wyników, opisaną w Doświadczeniu 2.

## Doświadczenie 1

### Graficzna analiza wyników

#### Problem badawczy

---

Celem eksperymentu jest zebranie danych i na ich podstawie graficzne zbadanie zależności kwadratu okresu drgań  $T^2$  wahadła matematycznego od jego długości  $l$ .

#### Hipoteza

---

Zależność  $T^2(l)$  ma postać funkcji liniowej.

#### Co będzie potrzebne

---

Wykorzystaj wyposażenie Wirtualnego laboratorium.

## Ćwiczenie 1

Porównaj wyposażenie laboratorium wirtualnego z wyposażeniem stanowiska pomiarowego laboratorium pokazanego w filmie.

Uzupełnij notatkę o podobieństwach i różnicach w wyposażeniu tych laboratoriów.

### 1. Kątomierz:

występuje w obu laboratoriach i ma jednakową rozdzielczość ☐

nie występuje w laboratorium, a w laboratorium wirtualnym jest nieużywany ☐

nie występuje w laboratorium wirtualnym, a w laboratorium jest nieużywany ☐

nie występuje w żadnym z laboratoriów ☐ .

### 2. Elektroniczny stoper ma rozdzielczość:

jednakową w obu laboratoriach ☐

wyższą w laboratorium ☐

wyższą w laboratorium wirtualnym ☐ .

### 3. Udział człowieka i jego wpływ na niepewność pomiaru (chodzi o tzw. czynnik ludzki)

a) w nastawieniu długości wahadła jest:

porównywalny w obu laboratoriach ☐

istotniejszy w laboratorium ☐

istotniejszy w laboratorium wirtualnym ☐ .

b) w pomiarze okresu drgań jest:

porównywalny w obu laboratoriach ☐

istotniejszy w laboratorium ☐

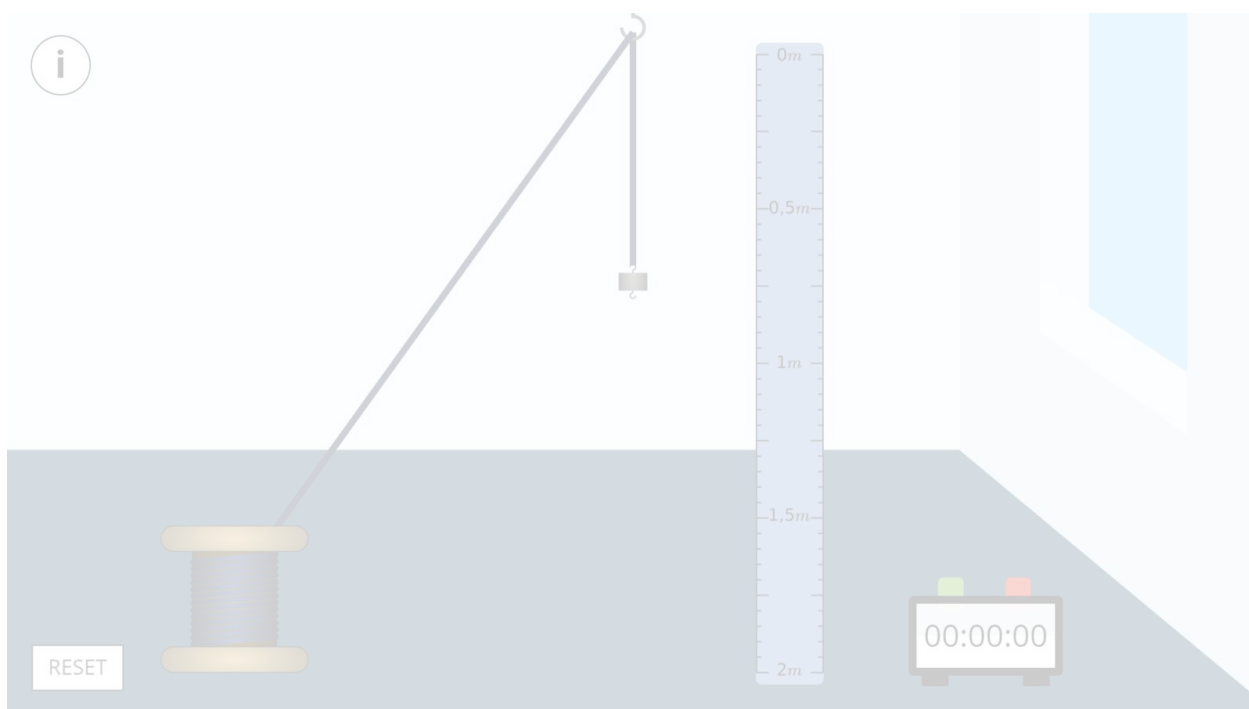
istotniejszy w laboratorium wirtualnym ☐ .

Omów pokrótce wpływ stwierdzonych różnic w wyposażeniu na rozstrzygnięcie hipotezy. Zapisz swoją wypowiedź w Dzienniku pomiarów.

Postępuj zgodnie z instrukcją zaproponowaną w Laboratorium.

### Polecenie 3

- Wybierz wartość  $n$  - liczby pełnych okresów drgań wahadła, po których zatrzymasz stoper i odczytasz czas  $t$ .
- Przeprowadź pomiar okresu drgań  $T$  dla co najmniej siedmiu różnych długości wahadła  $l$ , możliwie równomiernie rozłożonych w przedziale dostępnym w Wirtualnym laboratorium.
- Wyniki wpisz do Tabeli pomiarów.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DUMO7M5lk>

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

# Wpływ długości wahadła matematycznego

## na okres drgań - analiza graficzna

### Dziennik pomiarów

Data: DD-MM-RRRF

$n =$    $; T = \frac{t}{n}$

Tabela wyników

| Lp. | $l$ | $u(l)$ | $t$ | $u(t)$ | $T$ | $u(T)$ | $T^2$             | $u(T^2)$          |
|-----|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-------------------|-------------------|
|     | [m] | [m]    | [s] | [s]    | [s] | [s]    | [s <sup>2</sup> ] | [s <sup>2</sup> ] |
|     |     |        |     |        |     |        |                   |                   |
|     |     |        |     |        |     |        |                   |                   |
|     |     |        |     |        |     |        |                   |                   |
|     |     |        |     |        |     |        |                   |                   |
|     |     |        |     |        |     |        |                   |                   |
|     |     |        |     |        |     |        |                   |                   |
|     |     |        |     |        |     |        |                   |                   |
|     |     |        |     |        |     |        |                   |                   |
|     |     |        |     |        |     |        |                   |                   |

Analiza wykresu, rozstrzygnięcie hipotezy, konkluzje

Podsumowanie

## Polecenie 4

### a) Niepewność $u(l)$

Zastosuj podane w instrukcji Wirtualnego laboratorium postępowanie prowadzące do wyznaczenia niepewności pomiaru długości wahadła  $u(l)$ . Wyniki wpisz w odpowiednią kolumnę Tabeli.

### b) Niepewność $u(T)$

Przeanalizuj zaproponowaną w instrukcji propozycję określenia niepewności standardowej  $u(t)$  pomiaru czasu trwania  $n$  okresów drgań wahadła. Jeśli zgadzasz się z przedstawioną tam oceną, uzupełnij kolumny  $u(t)$  oraz  $u(T)$  w Tabeli zgodnie z tą propozycją.

W przeciwnym razie oszacuj tę niepewność zgodnie z własną wiedzą i doświadczeniem, a odpowiednie kolumny uzupełnij zgodnie z dokonaną oceną. Swoje rozumowanie przedstaw w Dzienniku pomiarów.

### c) Kwadrat okresu drgań i jego niepewność $u(T^2)$

Kwadrat okresu  $T^2$  jest wielkością mierzoną pośrednio. Jest to kwadrat wielkości mierzonej bezpośrednio - okresu drgań  $T$ . Niepewności pomiaru wszystkich okresów  $u(T)$  są jednakowe.

Wyznacz niepewność pomiaru  $u(T^2)$  dla każdego okresu zgodnie z zasadami opisanymi w e-materiale „*Niepewność wielkości mierzonej pośrednio*”. Zwróć uwagę na sekcję „Dla zainteresowanych” na końcu części „Przeczytaj”. W punkcie drugim podano gotowe wyrażenie, które możesz bezpośrednio zastosować:

$$u(T^2) = 2T \cdot u(T)$$

Wpisz do Tabeli wartości  $T^2$  oraz  $u(T^2)$ .

### d) Punkty pomiarowe na wykresie $T^2(l)$



Sporządź wykres zależności  $T^2(l)$  i w tych samych współrzędnych umieść punkty pomiarowe.

Rozważ celowość naniesienia, dla każdego punktu, odcinków niepewności pomiaru długości wahadła oraz, niezależnie, odcinków niepewności pomiaru kwadratu okresu. Zapisz swoją decyzję wraz z krótkim uzasadnieniem w Dzienniku pomiarów.

#### **e) Prosta najlepiej dopasowana**

Na sporządzony wykres nanieś linię prostą, którą uznajesz za najlepiej pasującą do punktów pomiarowych. W razie potrzeby przypomnij sobie tę problematykę, przedstawioną w e-materiałach „*Jak dopasować prostą do wyników pomiarów?*” i „*W jakim celu dopasowuje się prostą do wyników pomiarów i jakie informacje można w ten sposób uzyskać?*”.

#### **f) Analiza i wnioski**

Na podstawie analizy przebiegu wykresu rozstrzygnij hipotezę badawczą. Swoją argumentację zapisz w Dzienniku pomiarów.

## Doświadczenie 2

### Dla zainteresowanych

#### Numeryczna analiza wyników

#### Problem badawczy

---

Celem eksperymentu jest pomiar okresu drgań wahadła matematycznego  $T$  dla różnych jego długości  $l$  i poddanie analizie wartości ilorazów  $\frac{T^2}{l}$ .

#### Hipoteza

---

Wartości ilorazów  $\frac{T^2}{l}$  są na tyle zbliżone, że można je uznać za jednakowe.

#### Co będzie potrzebne

---

Wykorzystaj wyposażenie Wirtualnego laboratorium.

#### Instrukcja

---

Możesz wykorzystać wyniki pomiarów przeprowadzonych w Doświadczeniu 1.

Przydatne byłoby jednak uzyskanie większej liczby wyników - rzędu 20-30. Możesz przeprowadzić dodatkowe pomiary we własnym zakresie. Lepszym pomysłem będzie zmotywowanie grupy koleżanek lub kolegów do wspólnego opracowania pomiarów, wykonanych oddzielnie przez każdego członka grupy. W tym ostatnim przypadku:

- Niech każdy uczestnik zmierzy kilkakrotnie okres drgań wahadła w całym zakresie dostępnych długości; zestawy długości przydzielonych poszczególnym uczestnikom powinny się nieco różnić.
- Wybierzcie jednakową dla wszystkich wartość  $n$  - liczby pełnych okresów drgań wahadła, po których mierzący zatrzymuje stoper i odczytuje czas  $t$ . Wymóg ten nie jest jednak bezwzględny.
- Zastosujcie wszyscy podane w instrukcji Wirtualnego Laboratorium postępowanie prowadzące do wyznaczenia niepewności pomiaru długości wahadła  $u(l)$ .
- Przedyskutujcie problem ustalania niepewności pomiaru okresu  $u(T)$  i przyjmijcie jednakowe zasady postępowania.

### Polecenie 5

1. Każdy oblicza, dla każdego swojego pomiaru, wartość wielkości  $g$  będącej ilorazem kwadratu okresu drgań i długości wahadła:

$$q = \frac{T^2}{l} \ .$$

2. Dla każdej wartości należy obliczyć niepewność  $u(q)$ , uwzględniając, że  $q$  jest wielkością mierzoną pośrednio. Pomocne może być przypomnienie sobie e-materiału „*Niepewność wielkości mierzonej pośrednio*”. Podczas obliczeń zwróćcie uwagę, czy udziały obu zmiennych,  $l$  i  $T$ , w niepewności  $u(q)$ , są porównywalne, czy też któraś z nich ma udział dominujący. Tę informację wykorzystacie w Podsumowaniu.
3. Każdy uczestnik przygotowuje i wpisuje własny zbiór danych do wspólnej Tabeli wyników.

# Wpływ długości wahadła matematycznego

## na okres drgań - analiza numeryczna

# Dziennik pomiarów

Data: DD-MM-RRRR

## Tabela wyników

|     |     |        |     |        |                                            |                                            |                                            |
|-----|-----|--------|-----|--------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Łp. | $l$ | $u(l)$ | $T$ | $u(T)$ | $q$                                        | $u(q)$                                     | $ q - q_{\text{sr}} $                      |
|     | [m] | [m]    | [s] | [s]    | $\left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}}\right]$ | $\left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}}\right]$ | $\left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}}\right]$ |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|

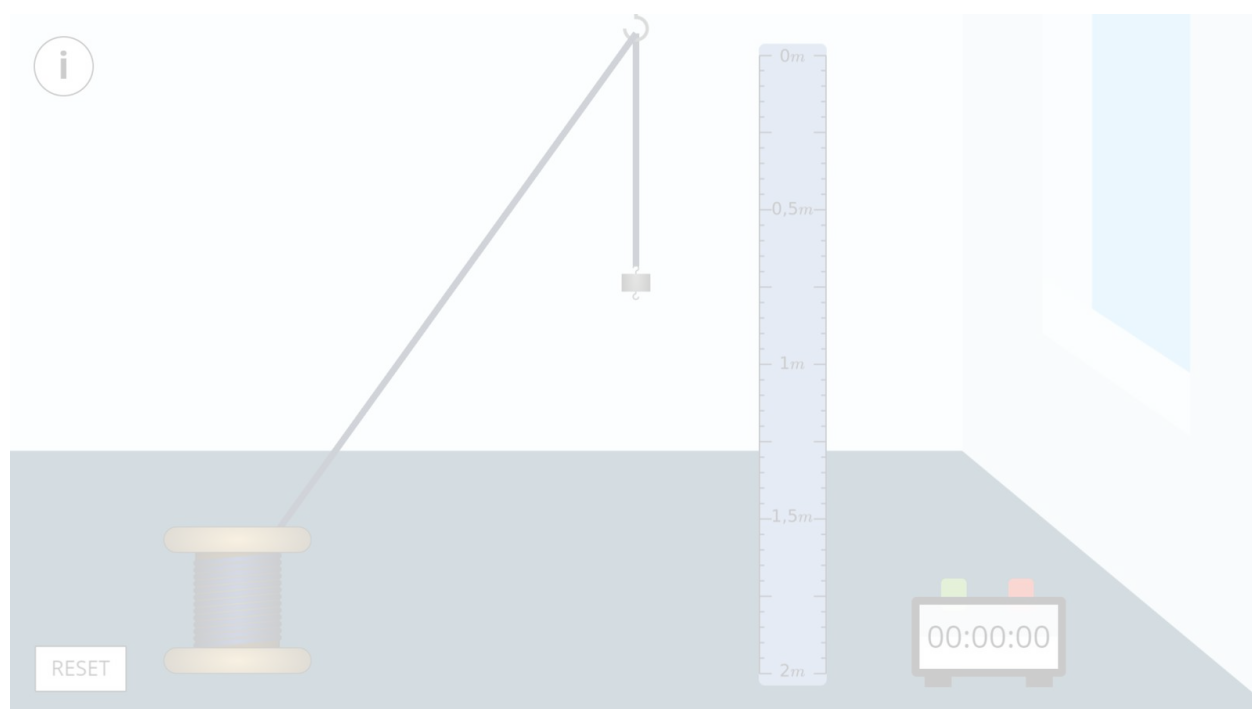
Łączna liczba pomiarów:  $N =$

Średnia ważona ilorazów  $\frac{T^2}{l}$ :  $q_{\text{sr}} =$

---

**Analiza tabeli, ocena wiarygodności hipotezy, konkluzje**

**Alternatywne wyposażenie Wirtualnego laboratorium**



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DUMO7M5Ik>

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

**Podsumowanie**

---

## Polecenie 6

1. Obliczcie  $q_{\text{sr}}$  - średnią *ważoną* wartości ilorazów  $q$ .

### Ważne!

- **Co to jest średnia ważona?** Jest to procedura uśredniania, która pozwala uwzględnić, że zmierzone wartości  $q$  wpływają na wartość średnią w różnym stopniu. W przypadku, z którym macie do czynienia, nie należy obliczać średniej arytmetycznej wyników, lecz właśnie ich średnią ważoną.
- **Jaki jest tego powód?** Poszczególne wartości  $q$  nie są jednakowo wiarygodne ze względu na różne niepewności ich pomiaru. Te wartości, których niepewność jest mniejsza są bardziej wiarygodne od tych o niepewności większej.
- **Jak uzyskać takie zróżnicowanie wpływu na średnią?** Przyjrzyjmy się znanemu wyrażeniu na średnią arytmetyczną i rozbudujmy nieco jego zapis.

$$q_{\text{sr}} = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_N}{N} = \frac{1 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 + \dots + 1 \cdot q_N}{1 + 1 + \dots + 1}.$$

Symbolem  $N$  oznaczamy łączną liczbę pomiarów wykonanych przez uczestników. To wyrażenie oznaczałoby, że każdemu wynikowi przypisujemy jednakowy wpływ na wartość średnią, czyli jednakowe *wagi*

$w_1 = w_2 = \dots = w_N = 1$ . Jeżeli chcemy, by wagi były różne, wystarczy użyć do obliczeń współczynników różnych od 1, ale nieujemnych:

$$q_{\text{sr}} = \frac{w_1 \cdot q_1 + w_2 \cdot q_2 + \dots + w_N \cdot q_N}{w_1 + w_2 + \dots + w_N}.$$

- **Jak wyrazić wagi dla poszczególnych pomiarów?** Typowe postępowanie polega na przypisaniu poszczególnym uśrednianym wartościom  $q_1, q_2, \dots, q_N$  wag  $w_i = \frac{1}{u(q_i)}$ , tj. odwrotnie proporcjonalnych do niepewności pomiaru danej wartości.
- **Jaka jest ostateczna postać wyrażenia?** Średnia ważona  $q_{\text{sr}}$  jest dana wyrażeniem

$$q_{\acute{s}r} = \frac{\frac{1}{u(q_1)} \cdot q_1 + \frac{1}{u(q_2)} \cdot q_2 + \dots + \frac{1}{u(q_N)} \cdot q_N}{1 + 1 + \dots + 1}.$$

Tak obliczoną wartość wpiszcie do Tabeli wyników.

2. Dla każdej wartości  $q_i$  obliczcie jej odchylenie  $|q_i - q_{\acute{s}r}|$  od wartości  $q_{\acute{s}r}$  i wpiszcie do ostatniej kolumny Tabeli.
3. Porównajcie to odchylenie z niepewnością pomiaru tej wartości. Podzielcie wyniki na trzy kategorie o roboczych nazwach:
  - wyniki „bliskie” średniej, gdy  $|q_i - q_{\acute{s}r}| < u(q_i)$ ;
  - wyniki „niezbyt odległe” od średniej, gdy  $u(q_i) < |q_i - q_{\acute{s}r}| < 2u(q_i)$ ;
  - wyniki „dalekie” od średniej, gdy  $|q_i - q_{\acute{s}r}| > 2u(q_i)$ .
4. Na podstawie liczebności tych kategorii oceńcie, w sposób jakościowy, na ile wiarygodna jest postawiona hipoteza. Zapiszcie swoje rozumowanie i wnioski w Dzienniku pomiarów, w przygotowanym polu. Zapiszcie tam także ewentualne zdania odrębne, wraz z ich krótkim uzasadnieniem.

## Ćwiczenie 2

Nie ulega wątpliwości, że potwierdzenie hipotezy jest tym bardziej wiarygodne, im mniejsza niepewność pomiaru  $u(q)$ . Porównajcie udziały w tej niepewności,  $u_l(q)$  oraz  $u_T(q)$ , pochodzące od każdej z bezpośrednio mierzonych wielkości. Zaproponujcie i opiszcie, w przygotowanym do tego polu Dziennika pomiarów, alternatywne wyposażenie Wirtualnego laboratorium, które pozwoliłoby zmniejszyć przyczynę do niepewności od tej zmiennej, dla której jest on dominujący.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Jaki byłby okres drgań wahadła na Księżycu w porównaniu do okresu na Ziemi?

☐ Byłby mniejszy.

☐ Byłby większy.

## Ćwiczenie 2



Zaznacz odpowiednie słowa tak, aby tekst był poprawny.

Okres drgań wahadła matematycznego zależy od długości wahadła. Im większa jest długość wahadła, tym  /  okres. Jeśli skrócimy wahadło

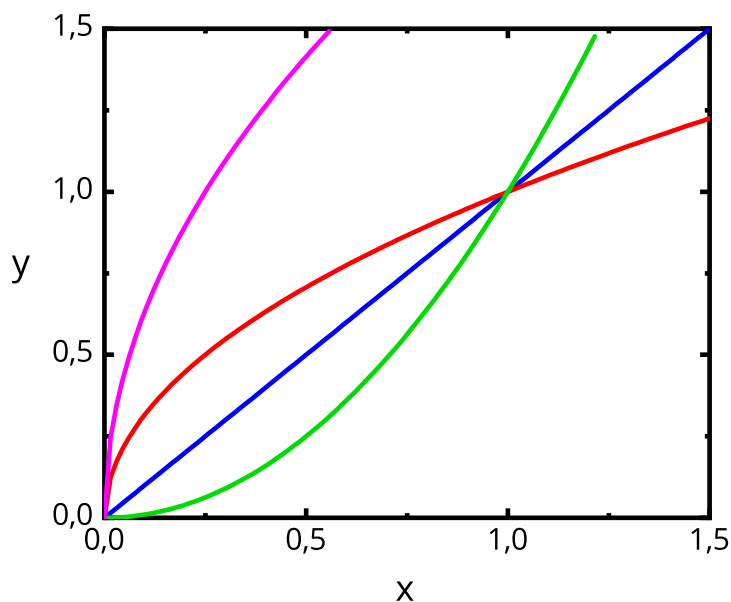
/  , okres  /

/  .

### Ćwiczenie 3



Poniższy rysunek przedstawia wykresy czterech funkcji :  $y = \sqrt{x}$  ,  $y = 2\sqrt{x}$  ,  $y = x$  ,  $y = x^2$ . Połącz w pary kolory wykresów z odpowiednimi funkcjami.



Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

wykres czerwony

$$y = x^2$$

wykres różowy

$$y = \sqrt{x}$$

wykres niebieski

$$y = x$$

wykres zielony

$$y = 2\sqrt{x}$$



## Ćwiczenie 4



*Wahadło sekundowe* to wahadło, którego okres wynosi 1 s. Zaznacz, które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe, a które nie.

W zadanym punkcie na powierzchni Ziemi wahadło sekundowe może mieć tylko jedną, ściśle określoną długość. ☐ P / ☐ F

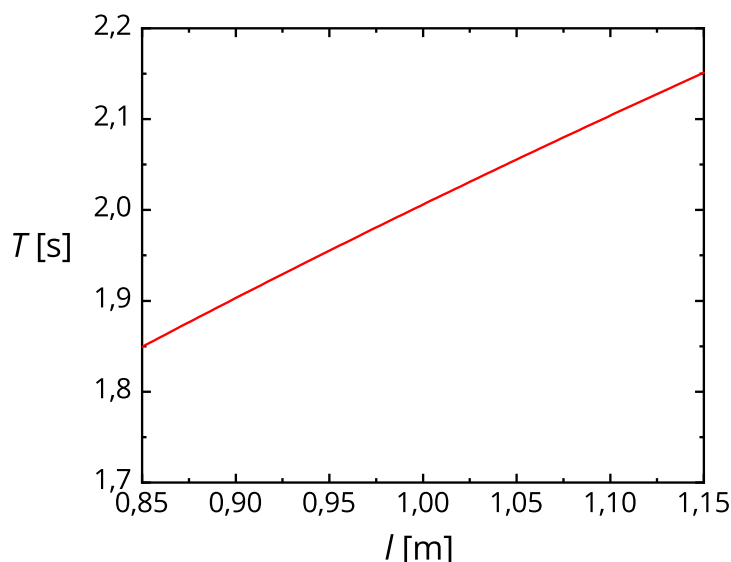
Na powierzchni Marsa przyspieszenie grawitacyjne jest około 3 razy mniejsze niż na powierzchni Ziemi. Z tego powodu na Marsie wahadło sekundowe musi być około 3 razy krótsze niż na Ziemi. ☐ P / ☐ F

Zawieszamy wahadło sekundowe w windzie. Kiedy winda porusza się do góry hamując, okres drgań tego wahadła jest większy niż 1 s. ☐ P / ☐ F

## Ćwiczenie 5



Poniższy rysunek przedstawia fragment wykresu zależności  $T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , okresu  $T$  drgań wahadła matematycznego od jego długości  $l$ .



Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Przy pomocy stopera uczniowie zmierzili okres drgań ciężarka zawieszonego na linkach o trzech różnych długościach. W tym celu zmierzili czas trwania 10 drgań, a wynik podzielili przez 10. Czas reakcji człowieka wynosi ok. 0,2 s. Oznacza to, że uczeń mógł zarówno włączyć, jak i wyłączyć stoper o 0,2 s za wcześnie lub za późno. Graniczna niepewność pomiarowa długości wahadła została przez uczniów oszacowana na 2 cm.

Poniższa tabela przedstawia wyniki pomiarów. Nanieś je na powyższy wykres (możesz go wydrukować). Nie zapomnij o odcinkach niepewności. Odpowiedz na pytanie: Czy wykonane przez uczniów pomiary potwierdzają wzór na okres wahadła matematycznego? Podaj uzasadnienie swojego poglądu.

| nr pomiaru | długość wahadła, $l$ [cm] | okres wahadła, $T$ [s] |
|------------|---------------------------|------------------------|
| 1          | 90                        | 1,90                   |
| 2          | 100                       | 2,02                   |
| 3          | 110                       | 2,08                   |

### Ćwiczenie 6



Oblicz, jak długie musi być wahadło matematyczne umieszczone na powierzchni Ziemi, żeby jego okres wynosił 5 s. Wynik podaj z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.

Odpowiedź:  m.

### Ćwiczenie 7



W pewnym przedziale czasu wahadło A wykonuje 7 drgań. W tym samym czasie wahadło B wykonuje 5 drgań. Oblicz stosunek długości wahadła A do wahadła B. Wynik podaj z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.

Odpowiedź: Stosunek długości wahadeł wynosi ok. .

### Ćwiczenie 8



Na powierzchni Ziemi okres pewnego wahadła matematycznego wynosi 2 s. Oblicz, jaki byłby okres tego wahadła na powierzchni Marsa. Przyspieszenie grawitacyjne na Marsie wynosi około  $3,73 \text{ m/s}^2$ . Wynik podaj z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

Odpowiedź:  s.

### Ćwiczenie 9



Udowodnij, że w granicy, gdy długość wahadła matematycznego dąży do zera, częstotliwość jego drgań dąży do nieskończoności. Czy otrzymany wynik jest realistyczny? Jeśli nie, to dlaczego? A może jakieś założenie, które przyjmujemy, przestaje być poprawne?

# Dla nauczyciela

---

|                         |                                                                          |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Imię i nazwisko autora: | Krzysztof Lorek                                                          |
| Przedmiot:              | Fizyka                                                                   |
| Temat zajęć:            | Czy okres drgań wahadła matematycznego jest zależny od długości wahadła? |
| Grupa docelowa:         | III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony               |

|                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Podstawa programowa:</b></p>               | <p><b>Cele kształcenia – wymagania ogólne</b></p> <p>III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji lub doświadczeń oraz wnioskowanie na podstawie ich wyników.</p> <p><b>Zakres rozszerzony</b></p> <p><b>Treści nauczania – wymagania szczegółowe</b></p> <p>I. Wymagania przekrojowe. Uczeń:</p> <p>10) przeprowadza wybrane obserwacje, pomiary i doświadczenia korzystając z ich opisów; planuje i modyfikuje ich przebieg; formułuje hipotezę i prezentuje kroki niezbędne do jej weryfikacji;</p> <p>11) opisuje przebieg doświadczenia lub pokazu; wyróżnia kluczowe kroki i sposób postępowania oraz wskazuje rolę użytych przyrządów i uwzględnia ich rozdzielczość;</p> <p>15) posługuje się pojęciem niepewności pomiaru wielkości prostych i złożonych; zapisuje wynik pomiaru wraz z jego jednostką oraz z uwzględnieniem informacji o niepewności; uwzględnia niepewności przy sporządzaniu wykresów;</p> <p>16) przeprowadza obliczenia i zapisuje wynik zgodnie z zasadami zaokrąglania oraz zachowaniem liczby cyfr znaczących wynikającej z dokładności pomiaru lub z danych</p> <p>V. Drgania. Uczeń:</p> <p>5) stosuje do obliczeń zależność okresu małych drgań wahadła matematycznego i ciężarka na sprężynie od ich parametrów;</p> <p>8) doświadczalnie: b) bada zależność okresu drgań od długości wahadła.</p> |
| <p><b>Kształtowane kompetencje kluczowe:</b></p> | <p><b>Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,</li> <li>• kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,</li> <li>• kompetencje cyfrowe,</li> <li>• kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Cele operacyjne:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <p>Uczeń:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. wyjaśnia zależność okresu drgań wahadła matematycznego od jego długości,</li> <li>2. przeprowadza doświadczenie, na podstawie którego doświadczalnie weryfikuje przewidywaną teoretycznie zależność okresu drgań wahadła od jego długości,</li> <li>3. analizuje wyniki wykonanych pomiarów, stosując metody prezentacji graficznej,</li> <li>4. stosuje elementarny rachunek niepewności pomiarowych i uwzględnia niepewności przy sporządzaniu wykresów,</li> <li>5. rozwiązuje problemy rachunkowe dotyczące wahadła matematycznego.</li> </ol> |
| <b>Strategie i metody nauczania:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | strategia eksperymentalno-obserwacyjna                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Formy zajęć:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | wykład, doświadczenie w wirtualnym laboratorium, doświadczenie                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Środki dydaktyczne:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | WL_I, ciężarki szkolne (np. 50g), sznurek , nożyczki, statywy, stopery lub telefony komórkowe ze stoperami, centymetry lub miarki zwijane, papier milimetrowy,                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Materiały pomocnicze:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | „Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki”, T. Dryński; e-materiały pt.: <i>Jak prawidłowo konstruować wykresy?</i> , <i>Niepewność całkowita</i> .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <b>PRZEBIEG LEKCJI</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Faza wprowadzająca:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Na wcześniejszej lekcji nauczyciel prosi uczniów, by w ramach pracy domowej zapoznali się wirtualnym laboratorium dołączonym do tego e-materiału oraz przypomnieli sobie wiadomości nt. niepewności pomiarowych, potrzebne do wykonania tego eksperymentu w klasie.</li> <li>• Przed rozpoczęciem lekcji należy wydrukować dla każdego ucznia wykres zależności okresu wahadła matematycznego od jego długości. Najlepiej by było, gdyby wykres był wydrukowany na papierze milimetrowym.</li> <li>• Nauczyciel rozpoczyna lekcję od krótkiego przypomnienia, czym jest wahadło matematyczne i jak oblicza się okres jego drgań.</li> </ul> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Faza realizacyjna:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

- Nauczyciel zwraca uwagę na fakt, że w granicy niewielkich odchyień wahadła matematycznego od pionu jego okres zależy tylko od długości wahadła. Zapisuje tę zależność na tablicy i prosi chętnego ucznia, by narysował na tablicy wykres  $T(l)$ . Jeśli uczniowie nie radzą sobie z tym zadaniem, nauczyciel ukierunkowuje ich, posługując się metodą konstrukcji tego wykresu, która została przedstawiona w części „Warto przeczytać” tego e-materiału.
- Nauczyciel dzieli klasę na grupy 4-osobowe. Każda grupa otrzymuje statyw, ciężarek, sznurek, miarkę i stoper (zamiast stopera można polecić uczniom, żeby korzystali ze stoperów w swoich telefonach komórkowych). Oprócz tego każdy uczeń otrzymuje wydrukowany wykres  $T(l)$ . Każda grupa ma za zadanie skonstruować wahadło i zmierzyć stoperem okres wahadła dla trzech długości sznurka, znajdujących się w obrębie wydrukowanego wykresu. Długości sznurka mają być mierzone miarkami. Następnie każdy uczeń ma za zadanie nanieść punkty pomiarowe na swój wykres, wraz z odcinkami niepewności. Nauczyciel komentuje i zapisuje na tablicy, jakie niepewności pomiarowe przyjąć, oraz jak zmierzyć okres wahadła.
- Uczniowie wykonują eksperyment, a nauczyciel w razie potrzeby pomaga w pracy doświadczalnej lub nanoszeniu punktów pomiarowych na wykres.

#### **Faza podsumowująca:**

- Nauczyciel przedstawia całej klasie pracę ucznia, na której najlepiej widać, że wykres przechodzi przez odcinki niepewności wszystkich punktów pomiarowych. Praca powinna wyglądać podobnie do rysunku zamieszczonego w rozwiązaniu ćwiczenia 4 z dołączonego do e-materiału zestawu zadań.
- Uczniowie komentują wyniki przeprowadzonych pomiarów. Nauczyciel kierunkuje dyskusję w taki sposób, by uczniowie samodzielnie odpowiedzieli na pytanie, czy udało im się zweryfikować znany wzór  $T(l)$ , a jeśli nie, to dlaczego.

#### **Praca domowa:**

Zadania 5, 6 i 7 z zestawu ćwiczeń.

**Wskazówki  
metodyczne  
opisujące różne  
zastosowania  
danego  
multimedium:**

Doświadczenie w wirtualnym laboratorium uczniowie mogą wykonać samodzielnie w domu, jako przygotowanie do lekcji.