



Własności funkcji sinus

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Własności funkcji sinus

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Indyjski matematyk i astronom Aryabhata (476 – 550 n.e.) w swoim dziele *Aryabhata-Siddhanta* po raz pierwszy zdefiniował sinus w znanej formie związku między połową kąta i połową cięciwy. Arabscy matematycy używali go prawdopodobnie już w IX wieku. Isaac Newton w 1665 znalazł rozwinięcie funkcji sinus w szereg, a Leonhard Euler w 1734 rozwinięcie tej funkcji w iloczyn nieskończony. W trakcie lekcji omówimy podstawowe własności funkcji sinus w kontekście trójkąta prostokątnego.

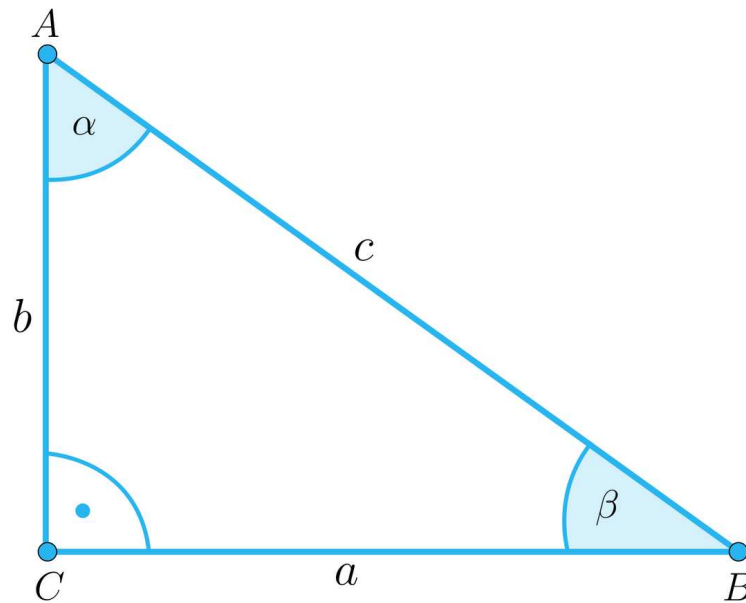
Twoje cele

- Przypomnisz sobie definicję funkcji sinus w trójkącie prostokątnym.
- Odkryjesz zależności występujące w trójkącie prostokątnym.
- Wykorzystasz własności funkcji sinus do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Definicja: Sinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej.



Do oznaczenia funkcji sinus używa się skrótu „**sin**”.

Stosując oznaczenia z rysunku, mamy, że przyprostokątną leżącą naprzeciwko kąta α jest bok o długości a oraz przyprostokątną leżącą naprzeciwko kąta β jest bok o długości b .

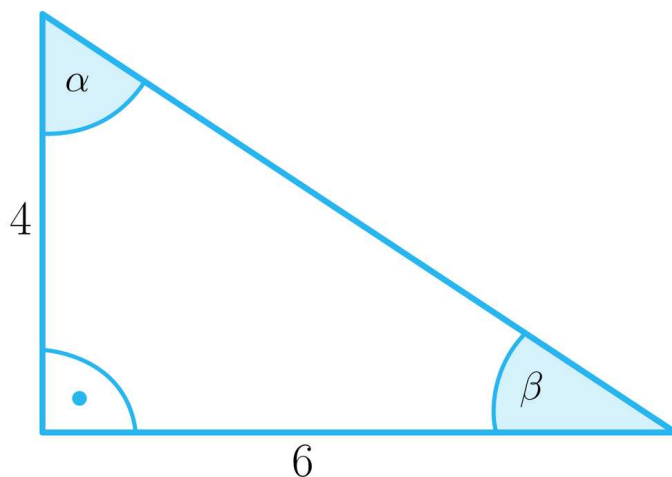
Zatem zgodnie z definicją mamy:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ oraz } \sin \beta = \frac{b}{c}.$$

Z przyjętych oznaczeń wynika, że $\beta = 90^\circ - \alpha$, więc $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$.

Przykład 1

Obliczymy wartości [sinusów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym](#) z rysunku.



Oznaczmy długość przeciwprostokątnej jako x .

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że $4^2 + 6^2 = x^2$.

Z równania otrzymujemy, że $x^2 = 52$, zatem $x = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ lub $x = -\sqrt{52} = -2\sqrt{13}$.

Ponieważ $x > 0$, więc $x = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Z definicji funkcji sinus otrzymujemy, że:

$$\sin \alpha = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\sin \beta = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Ważne!

Dla dowolnego kąta ostrego α zachodzi zależność:

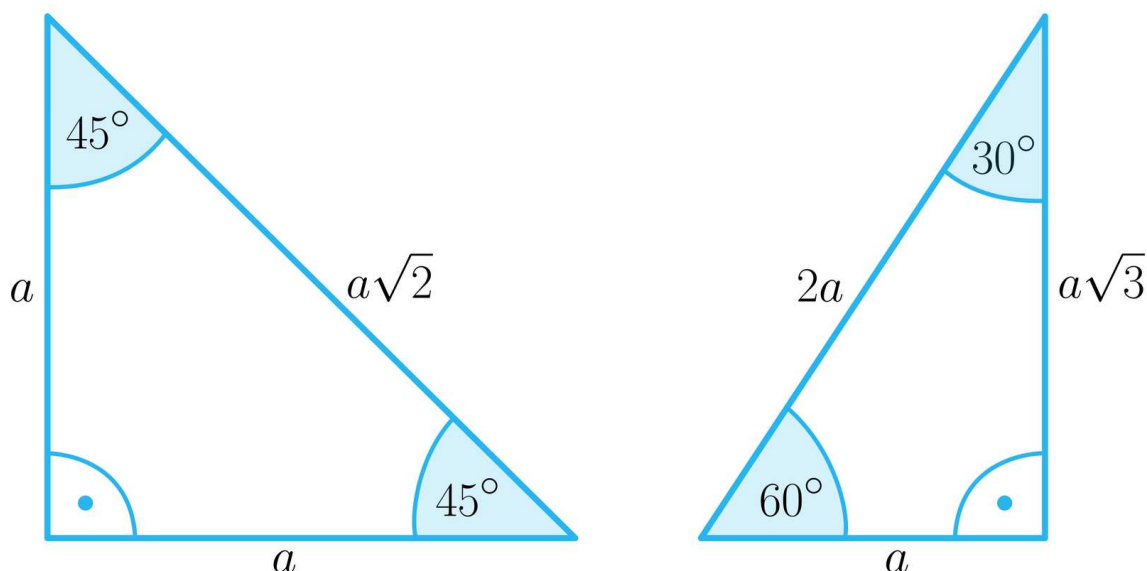
$$0 < \sin \alpha < 1$$

Wyjaśnienie tej nierówności można zapisać w dwóch krokach:

1. nierówność $\sin \alpha > 0$ wynika wprost z definicji funkcji sinus w trójkącie prostokątnym,
2. ponieważ w dowolnym trójkącie prostokątnym długość przyprostokątnej jest zawsze mniejsza od długości przeciwprostokątnej, zatem:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} < \frac{c}{c} = 1.$$

Wyznamy wartości sinusów niektórych kątów ostrych. Wykorzystamy do tego trójkąty charakterystyczne.



Korzystając z definicji funkcji sinus, otrzymujemy, że:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Przykład 2

Wyznamy wartość wyrażenia $\frac{2 \sin 30^\circ - \sin 60^\circ}{3 \sin 45^\circ}$.

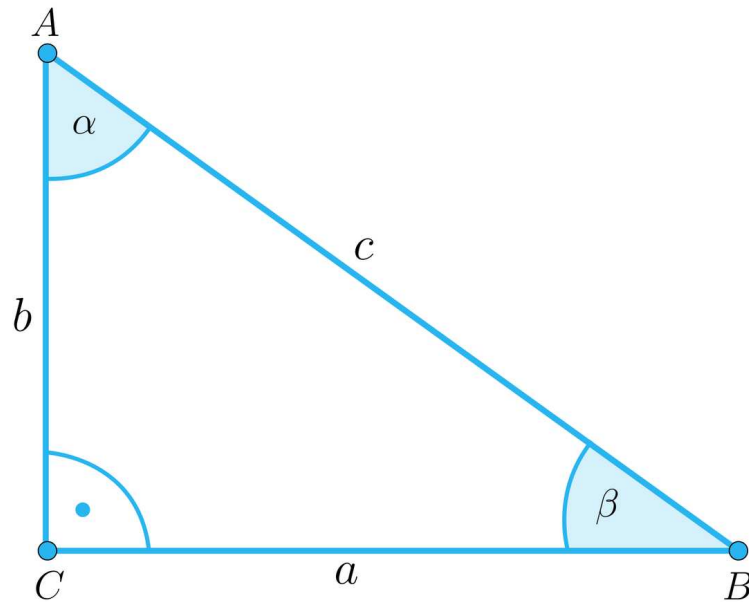
Po podstawieniu mamy:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin 30^\circ - \sin 60^\circ}{3 \sin 45^\circ} &= \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}. \end{aligned}$$

Przykład 3

Wiadomo, że suma sinusów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym wynosi $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Obliczymy iloczyn sinusów tych kątów.

Wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Z rysunku mamy, że $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ oraz $\sin \beta = \frac{b}{c}$.

Wiadomo, że $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Stosując oznaczenia z rysunku, otrzymujemy równanie:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Podnosząc obie strony równania do kwadratu, mamy, że:

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

Po przekształceniu równanie jest postaci:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{c^2} = \frac{12}{9}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $a^2 + b^2 = c^2$, więc $\frac{c^2 + 2ab}{c^2} = \frac{12}{9}$.

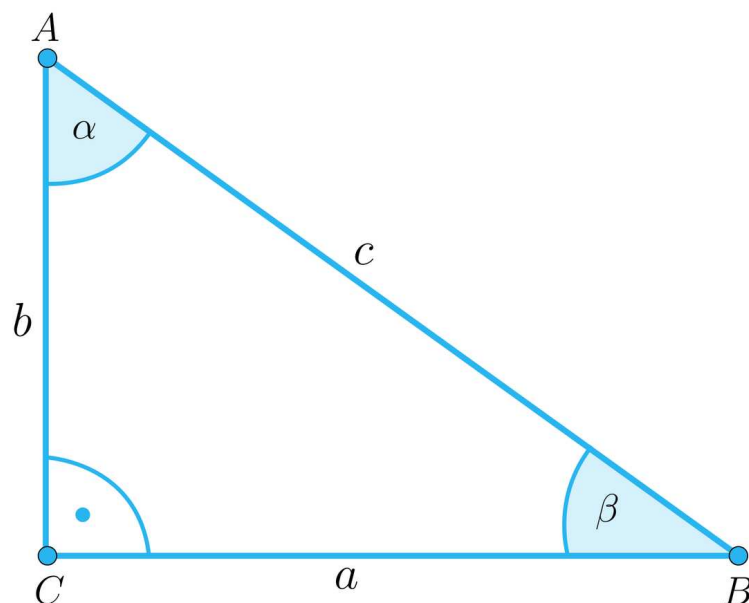
Równanie możemy zapisać w postaci $1 + \frac{2ab}{c^2} = \frac{12}{9}$.

Zatem $\frac{ab}{c^2} = \frac{2}{3}$, więc $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{2}{3}$.

Po podstawieniu, zgodnie z wcześniejszymi oznaczeniami, otrzymujemy, że $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{2}{3}$.

Przykład 4

Wyznamy długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej długości 10, jeżeli wiadomo, że sinus jednego kąta ostrego jest dwa razy większy od sinusa drugiego kąta ostrego.



Z warunków zadania wynika, że $\sin \alpha = 2 \sin \beta$ oraz $c = 10$.

Z trójkąta prostokątnego z rysunku mamy, że $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ oraz $\sin \beta = \frac{b}{c}$.

Po podstawieniu do zależności $\sin \alpha = 2 \sin \beta$ mamy, że:

$$\frac{a}{c} = 2 \cdot \frac{b}{c}, \text{ czyli } a = 2b.$$

Z twierdzenia Pitagorasa mamy, że

$$c^2 = b^2 + (2b)^2, \text{ więc } c = \sqrt{5}b.$$

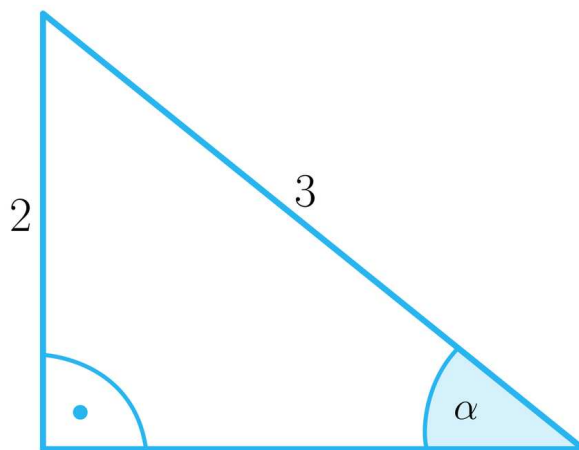
Otrzymujemy równanie $10 = \sqrt{5}b$, zatem $b = 2\sqrt{5}$.

Zatem przyprostokątne mają długości $a = 4\sqrt{5}$ oraz $b = 2\sqrt{5}$.

Przykład 5

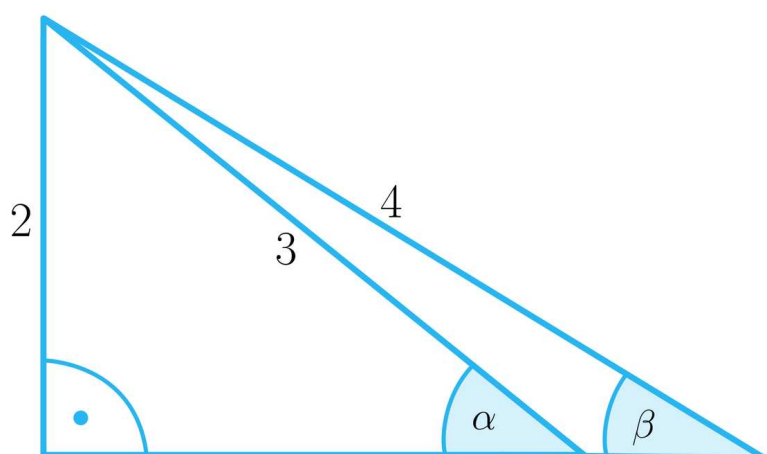
Wykażemy, że jeżeli kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, to $\alpha > 30^\circ$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia, jak na rysunku:



Z rysunku możemy odczytać, że $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Następnie przedłużmy przyprostokątną leżącą przy kącie prostym tak, aby przeciwprostokątna była długości 4 i oznaczmy otrzymany kąt jako β .



Z rysunku mamy, że $\sin \beta = \frac{2}{4}$, co oznacza że $\beta = 30^\circ$.

Ponieważ $\alpha > \beta$, więc $\alpha > 30^\circ$.

Ważne!

Funkcja sinus jest funkcją rosnącą dla $\alpha \in (0, 90^\circ)$.

Słownik

sinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie wykonaj polecenie.

Polecenie 2

Wiadomo, że iloczyn sinusów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym wynosi $\frac{1}{5}$. Wyznacz sumę sinusów tych kątów.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Jeżeli $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}$ i α jest kątem ostrym, to:

☐ $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}.$

☐ $\sin \alpha = \frac{2}{5}.$

☐ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}.$

Ćwiczenie 2



Poniżej przedstawiono wyrażenia oraz odpowiadające im wartości. Połącz je w pary.

$\sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$

$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

$\sin 30^\circ + \sin 45^\circ$

$\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$

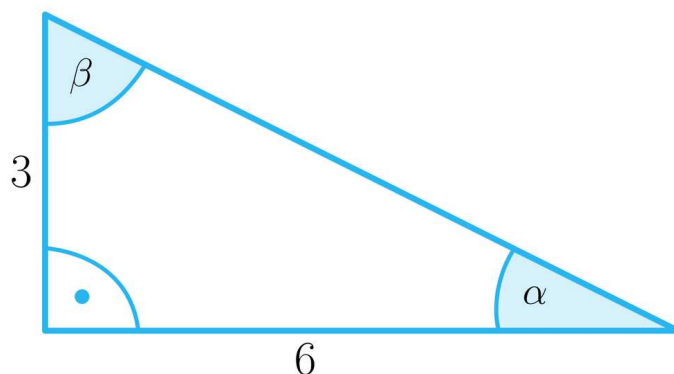
$\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\sin 45^\circ + \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}$

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$

Ćwiczenie 3

Wybierz poprawne wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych z rysunku.



Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

☐ $\sin(90^\circ - \beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

☐ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

☐ $\sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

☐ $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Ćwiczenie 4



Uporządkuj wartości funkcji sinus kątów ostrych α , β , γ , δ tak, aby miary tych kątów były ułożone rosnąco. Złap element i przesun go w górę lub w dół.

$\sin \beta = \frac{4}{9}$ ⬆️⬇️

$\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ⬆️⬇️

$\sin \gamma = \frac{1}{2}$ ⬆️⬇️

$\sin \delta = \frac{1}{3}$ ⬆️⬇️

Ćwiczenie 5



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Jeżeli wartość sinusa jednego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym jest trzy razy większa od wartości sinusa drugiego kąta ostrego w tym trójkącie, a przeciwprostokątna ma długość 20, to dłuższa przyprostokątna ma długość , a obwód wynosi .

Ćwiczenie 6



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.

Jeżeli w pewnym trójkącie prostokątnym iloczyn sinusów kątów ostrych wynosi $\frac{1}{6}$, to kwadrat sumy wartości tych sinusów jest równy:

☐ $\frac{1}{36}$

☐ $\frac{4}{3}$

☐ $\frac{7}{6}$

Ćwiczenie 7



Uzupełnij tekst wpisując w lukę odpowiednią liczbą.

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 1 i $2\sqrt{3}$ lub w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych i $2\sqrt{3}$ sinus mniejszego kąta ostrego wynosi $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że suma kwadratów sinusów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym wynosi 1.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności funkcji sinus

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje definicję funkcji sinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- oblicza wartości funkcji sinus dla kątów ostrych w trójkącie prostokątnym;
- odkrywa zależności pomiędzy sinusami kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- z użyciem e-podręcznika;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w Samouczku i ćwiczenia interaktywne;

- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 – „Obejrzyj infografikę, a następnie wykonaj polecenie.” z sekcji „Infografika”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Sinus kąta ostrego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Własności funkcji sinus”.