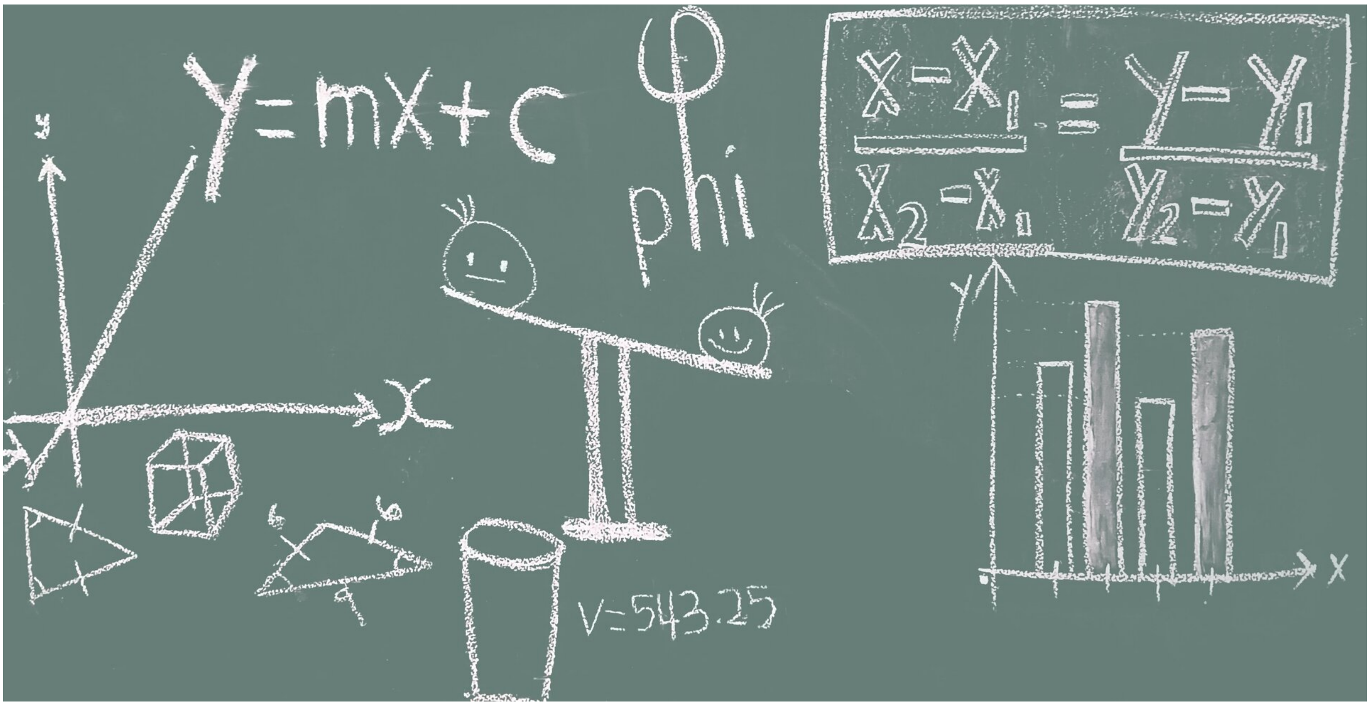


Zagadnienia optymalizacyjne z kontekstem realistycznym wykorzystujące własności funkcji kwadratowej

Zagadnienia optymalizacyjne z kontekstem realistycznym wykorzystujące własności funkcji kwadratowej

Źródło: Vicky Sim, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W rozwiązywaniu problemów praktycznych zawsze poszukujemy najlepszych rozwiązań. Okazuje się, że zagadnienie optymalizacji (znajdowania wartości najmniejszej lub największej) ma szerokie zastosowanie w życiu codziennym. Problem optymalizacji może dotyczyć zarówno znajdowania największego iloczynu liczb, przy założeniu, że znamy ich sumę, jak i znalezienia największej powierzchni ogródka, gdy znamy długość jego obwodu.

Twoje cele

- Użyjesz strategii, która będzie wynikała z treści zadania.
- Zbudujesz model matematyczny w sytuacjach z życia codziennego.
- Zinterpretujesz tekst matematyczny, a po rozwiązaniu zadania jego wynik.

Przeczytaj

Definicja: Optymalizacja

Optymalizacją nazywamy metodę najlepszego rozwiązania z punktu widzenia określonego kryterium. W matematyce jest to problem polegający na znalezieniu ekstremum funkcji, przy ustalonym warunku.

Optymalizacja w przypadku funkcji kwadratowej składa się z następujących kroków:

- analiza treści zadania i wskazanie wielkości, którą będziemy optymalizować,
- zapisanie wzoru odpowiedniej funkcji kwadratowej,
- obliczenie współrzędnych wierzchołka funkcji kwadratowej.

Funkcja kwadratowa posiada dokładnie jedno ekstremum w punkcie, który jest wierzchołkiem wykresu funkcji kwadratowej. Oznacza to, że nie musimy szukać ekstremum lokalnego, możemy od razu przejść do wyznaczania ekstremum globalnego funkcji.

Przypomnijmy definicję maksimum oraz minimum globalnego funkcji.

Definicja: Maksimum, minimum globalne

Niech dana będzie funkcja rzeczywista $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Powiemy, że funkcja f osiąga **maksimum globalne** w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli dla dowolnego punktu $x \in X$ spełniona jest nierówność

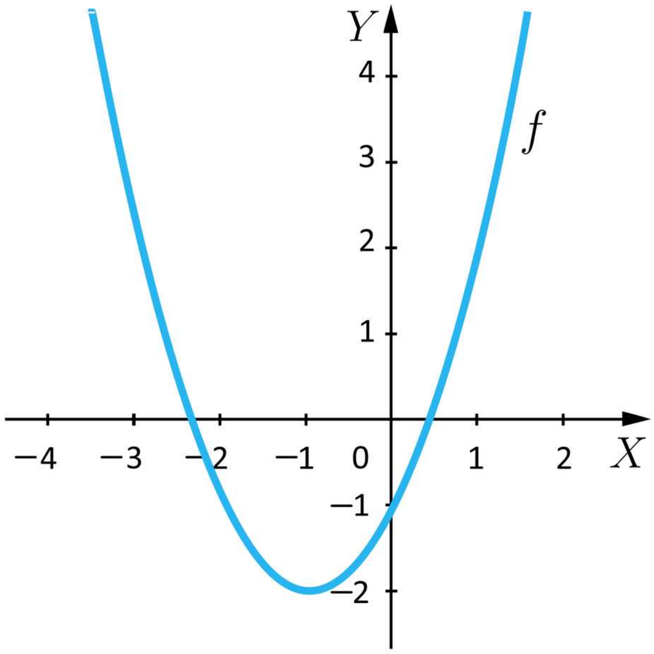
$$f(x_0) \geq f(x).$$

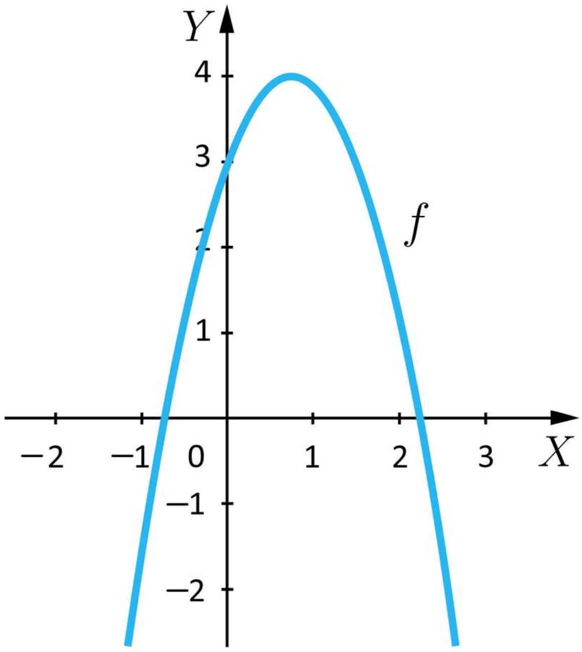
Analogicznie, powiemy, że funkcja f osiąga **minimum globalne** w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli dla dowolnego punktu $x \in X$ zachodzi nierówność

$$f(x_0) \leq f(x).$$

Liczbę $f(x_0)$ nazywamy wówczas (odpowiednio) **największą** lub **najmniejszą wartością** funkcji f w zbiorze X.

W przypadku funkcji kwadratowej jest jednak inaczej, co wynika z kształtu paraboli, będącej jej wykresem. Przeanalizujmy poniższe wykresy.





Każda parabola, będąca wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, ma dokładnie jeden wierzchołek. Druga współrzędna punktu, będącego wierzchołkiem tej paraboli odpowiada największej lub najmniejszej wartości przyjmowanej przez zadaną funkcję kwadratową.

O tym, czy jest to minimum, czy maksimum decyduje wartość współczynnika a przy wyrażeniu x^2.

> **Ważne!**
>
> Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- dla $a > 0$ osiąga wartość najmniejszą w wierzchołku paraboli, będącej wykresem funkcji f,
- dla $a < 0$ osiąga wartość największą w wierzchołku paraboli, będącej wykresem funkcji f.

Przykład 1

Arek i Marek grają w grę, która polega na wyznaczeniu największego iloczynu dwóch liczb, gdy dana jest suma tych liczb. W grze wygrywa się, gdy jeden z graczy wymieni takie liczby, których suma jest równa 10, a iloczyn tych liczb jest największy. Wyznaczymy te liczby.

Rozwiązanie:

Niech x i y będą szukanymi liczbami.

Układamy warunek, który przedstawia zależność z zadania: $x + y = 10$.

Z tego warunku otrzymujemy, że: $y = 10 - x$.

Zapisujemy wzór funkcji kwadratowej, która określa iloczyn liczb x i y, ale w zależności od zmiennej x.

$f(x) = x \cdot y = x \cdot (10 - x) = -x^2 + 10x$.

Otrzymujemy funkcję kwadratową, której wykres jest parabolą z ramionami skierowanymi do dołu.

Zatem funkcja f przyjmuje wartość największą w wierzchołku paraboli, będącej jej wykresem.

Wyznaczamy współrzędną p wierzchołka paraboli.

Otrzymujemy $p = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5$, czyli $x = 5$.

Dla $x = 5$ mamy $y = 10 - 5 = 5$.

Iloczyn tych liczb jest największy, gdy $x = 5$ i $y = 5$.

Zatem jeden z graczy wygra grę, gdy poda obie liczby równe 5.

Dodatkowo możemy obliczyć wartość tego iloczynu. W tym celu wystarczy znaleźć wielkość q.

$q = f(p) = f(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 = -25 + 50 = 25$

Przykład 2

Mamy 200 metrów siatki ogrodzeniowej. Jaką maksymalną, prostokątną powierzchnię możemy ogrodzić?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x – długość oraz y – szerokość działki.

Z warunku w zadaniu wiemy, że obwód działki wynosi 200 metrów.

Otrzymujemy równanie: $2x + 2y = 200$.

Po uproszczeniu mamy, że $x + y = 100$, więc $y = 100 - x$.

Z treści zadania wiemy, że $x > 0$, więc $y \in (0, 100)$.

Określamy odpowiednią funkcję następująco:
$f(x) = x \cdot y = x \cdot (100 - x) = -x^2 + 100x$.

Otrzymaliśmy funkcję kwadratową, której wykres jest parabolą z ramionami skierowanymi do dołu.

Zatem funkcja f przyjmuje wartość największą w wierzchołku.

Wyznaczamy współrzędną p wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f.

Otrzymujemy, że $p = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2 \cdot (-1)} = 50$, czyli $x = 50$.

Dla $x = 50$ mamy $y = 50$.

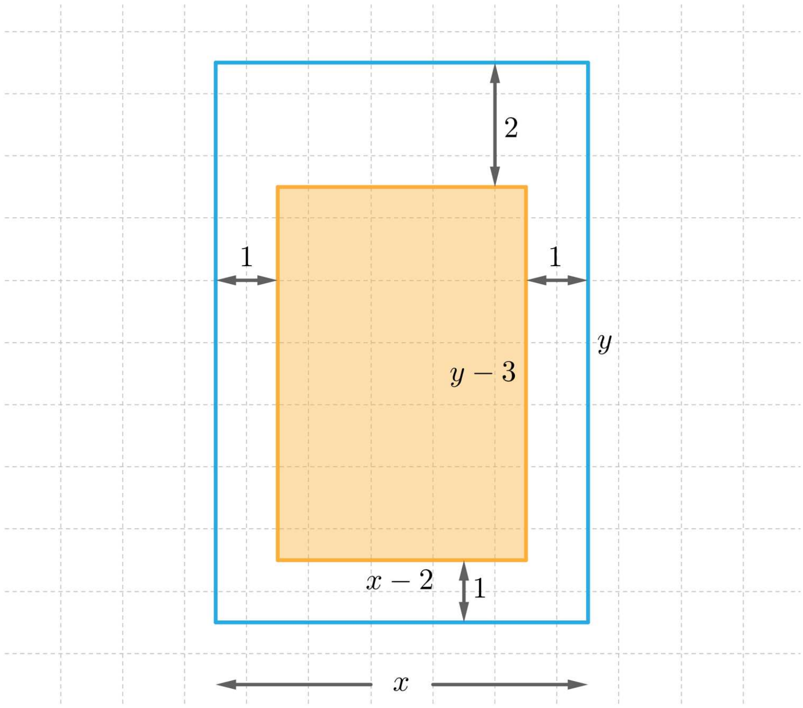
Aby działka miała największe pole powierzchni, powinna być kwadratem o boku 50.

Przykład 3

Strona książki ma kształt prostokąta o obwodzie równym 72 cm. Obliczymy, jakie wymiary powinna mieć strona tej książki, aby zapewnić maksymalną powierzchnię druku, przy założeniu, że marginesy boczne i dolne mają szerokość 1 cm, a margines górny 2 cm.

Rozwiązanie:

Niech x i y będą wymiarami strony w kształcie prostokąta $(x > 0, y > 0)$. Wykonajmy rysunek pomocniczy do zadania:



Ponieważ obwód tego prostokąta jest równy 72 cm, zatem:

$2x + 2y = 72$

Wobec tego $y = 36 - x$ oraz $x \in (0, 36)$.

Niech f będzie funkcją, która opisuje pole powierzchni strony do druku. Wówczas:

$f(x) = (x-2) \cdot (y-3) = (x-2)(33-x)$

Otrzymujemy wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola z ramionami skierowanymi do dołu. Zauważmy, że miejscami zerowymi paraboli, będącej wykresem funkcji f są liczby 2 oraz 33. Funkcja przyjmuje wartość największą w wierzchołku paraboli, będącej jej wykresem. Pierwsza współrzędna p wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f wynosi:

$p = \frac{2+33}{2} = 17,5$

Wobec tego $x = 17,5$ cm oraz $y = (36 - 17,5)$ cm $= 18,5$ cm.

W celu zapewnienia maksymalnej powierzchni druku strona książki powinna mieć wymiary $17,5$ cm na $18,5$ cm.

Przykład 4

Obrazek ma kształt równoległoboku, w którym suma długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok wynosi 8. Wyznaczymy długość tego boku i wysokości tak, aby pole tego obrazka było największe.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia: a - długość boku równoległoboku, h - długość wysokości opuszczonej na ten bok.

Z warunków zadania mamy, że $a + h = 8$, więc $h = 8 - a$.

Ponieważ $a > 0$, zatem $h \in (0, 8)$.

Pole równoległoboku obliczamy ze wzoru $P = ah$.

Funkcję pola w zależności od a zapisujemy następująco:
$f(a) = ah = a \cdot (8 - a) = -a^2 + 8a$.

Wykres tej funkcji jest parabolą z ramionami skierowanymi do dołu, zatem funkcja przyjmuje wartość największą w wierzchołku paraboli, będącej jej wykresem.

Obliczamy wartość $p = \frac{-8}{-2} = 4$, więc $a = 4$ i $h = 4$.

Przykład 5

Tygodniowy popyt na pewien towar wyraża się wzorem $p(x) = 2000 - 20x$, gdzie x oznacza cenę towaru. Wyznacz cenę, dla której dochód jest maksymalny. Obliczymy ten dochód.

Rozwiązanie:

Z warunków w zadaniu mamy, że $x > 0$ oraz $2000 - 20x > 0$, więc $x \in (0, 100)$.

Funkcję dochodu możemy zapisać jako
$f(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (2000 - 20x) = -20x^2 + 2000x$.

Ponieważ otrzymaliśmy funkcję kwadratową, której wykres jest parabolą z ramionami skierowanymi do dołu, zatem wartość największa przyjmowana jest w wierzchołku tej paraboli.

Wyznaczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f:

$\mathrm{p} = \frac{-2000}{2 \cdot (-20)} = \frac{-2000}{-40} = 50$.

Otrzymujemy więc, że dla $x = 50$ dochód jest maksymalny i wynosi:

$f(50) = -20 \cdot 50^2 + 2000 \cdot 50 = -50000 + 100000 = 50000$.

Słownik

optymalizacja

metoda najlepszego rozwiązania przy uwzględnieniu zadanego warunku

ekstremum funkcji

maksymalna lub minimalna wartość funkcji

Animacja

Polecenie 1

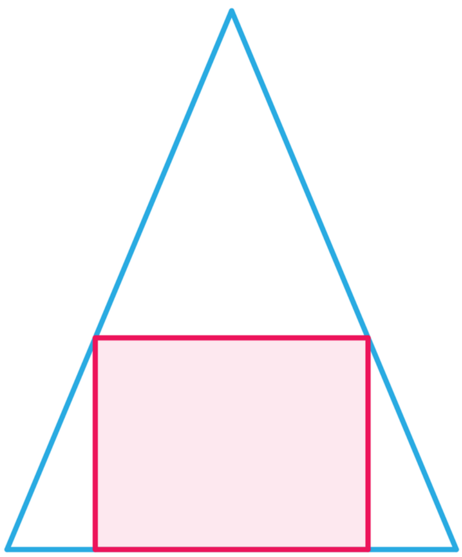
Obejrzyj animację przedstawiającą zagadnienie optymalizacyjne wykorzystujące własności funkcji kwadratowej.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D13Ezyoxy

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego zagadnień optymalizacyjnych z kontekstem realistycznym wykorzystujące własności funkcji kwadratowej.

Polecenie 2

Z kawałka materiału w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie długości $5\ \mathrm{m}$ oraz wysokości opuszczonej na tą podstawę równej $6\ \mathrm{m}$ chcemy wyciąć prostokątny fragment, jak na poniższym rysunku.



Oblicz, jakie wymiary powinien mieć ten prostokąt.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

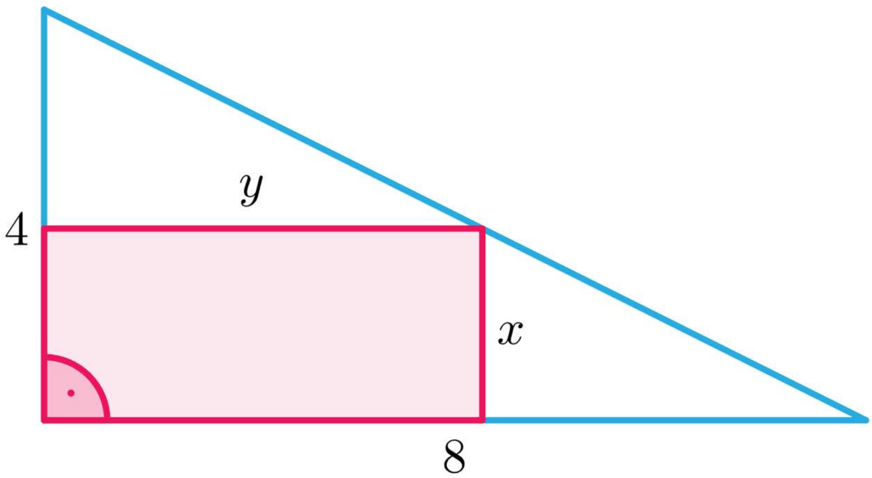
Ćwiczenie 1

Mamy 120 metrów siatki ogrodzeniowej. Chcemy ogrodzić prostokątną działkę o jak największym polu. Wyznacz długość działki x oraz szerokość działki y. Zaznacz poprawną odpowiedź.

- $x = 50$ i $y = 70$
- $x = 30$ i $y = 30$
- $x = 80$ i $y = 40$

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono projekt rozmieszczenia prostokątnego trawnika (zacieniowany obszar) na działce w kształcie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości $4 \mathrm{~m}$ i $8 \mathrm{~m}$.



Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie wyrażenia w puste pola.

Jeżeli x jest szerokością prostokąta, a y jego długością, to trawnik ma największą powierzchnię, gdy:

- ______
- dziedziną funkcji pola powierzchni zmiennej x jest ______,
- funkcja f pola powierzchni prostokąta wyraża się wzorem ______,
- trawnik ma wymiary ______.

$x \in (0,4)$ | $x = 2 \mathrm{~m}, y = 4 \mathrm{~m}$ | $x \in (0,8)$ | $x = 4 \mathrm{~m}, y = 8 \mathrm{~m}$ | $y = 8 - 2x$ | $f(x) = -2x^2 + 18x$ | $y = 2x - 8$ | $f(x) = 2x^2 - 18x$

Ćwiczenie 3

Jaś buduje szkielet prostopadłościanu o podstawie kwadratowej z drutu o różnych długościach. Połącz w pary długość drutu i wzór funkcji, która opisuje pole powierzchni prostopadłościanu w zależności od długości krawędzi x podstawy prostopadłościanu z wartością największej objętości takiego prostopadłościanu.

długość drutu $48\ \text{cm}$ i $f(x) = -6x^2 + 48x$	$\frac{512}{27}\ \text{cm}^3$
długość drutu $32\ \text{cm}$ i $f(x) = -6x^2 + 32x$	$64\ \text{cm}^3$
długość drutu $50\ \text{cm}$ i $f(x) = -6x^2 + 50x$	$\frac{8000}{27}\ \text{cm}^3$
długość drutu $80\ \text{cm}$ i $f(x) = -6x^2 + 80x$	$\frac{15625}{216}\ \text{cm}^3$

Ćwiczenie 4

Uporządkuj w odpowiedniej kolejności rozwiązanie zadania: suma dwóch różnych boków rabatki kwiatowej w kształcie prostokąta o wymiarach x i y wynosi 6. Wyznacz wymiary tej rabatki, jeżeli iloczyn liczb x i y ma być największy. Złap element i przesuń go w górę lub w dół.

- $y = 6 - x$
- $p = \frac{-6}{-2} = 3$
- $f(x) = x \cdot (6 - x) = -x^2 + 6x$
- $x + y = 6$
- $x \in (0, 6)\ \wedge\ y > 0$
- $x = 3$ i $y = 3$

Ćwiczenie 5

Jakie wymiary ma basen w kształcie prostokąta o obwodzie długości 20 m, który ma najkrótszą przekątną? Długość basenu wynosi x, a szerokość y. Zaznacz poprawną odpowiedź.

- $x = 15 \text{ m}$ i $y = 5 \text{ m}$
- $x = 10 \text{ m}$ i $y = 10 \text{ m}$
- $x = 5 \text{ m}$ i $y = 5 \text{ m}$

Ćwiczenie 6

Sklep sprowadza z hurtowni drukarki płacąc 120 zł za sztukę, a sprzedaje po 180 zł za sztukę i sprzedaje ich średnio 40 miesięcznie. Jeżeli sprzedawca obniży cenę drukarki o złotówkę, wówczas sprzedaż miesięczna wzrasta o jedną sztukę. Jaką cenę drukarki powinien ustalić sprzedawca, aby jego zysk był największy? Uzupełnij poniższe rozwiązanie, wpisując poprawne odpowiedzi w puste pola.

Rozwiązanie:

Zysk na jednej drukarce: 180 zł - 120 zł = ______ zł,

x - o tyle obniżono cenę drukarki, gdzie $x > 0$,

zysk na drukarce po obniżce: ______ ______ ______ zł,

tyle drukarek sprzedaje sklep po obniżce o x zł: ______ ______ ______.

Przychód sklepu opisuje funkcja f określona wzorem:

$f(x) = ($ ______ ______ ______ $)($ ______ ______ ______ $) = -x^2 + 20x + 2400.$

Wartość największa funkcji f jest osiągana w wierzchołku paraboli, będącej jej wykresem:

$p =$ ______.

Odpowiedź: Aby zysk był największy, to cenę drukarki należy obniżyć o ______ zł.

Wówczas jej cena wyniesie ______ zł.

Ćwiczenie 7

Serwetka ma kształt trójkąta, w którym suma długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok wynosi 8. Wyznacz długość boku oraz długość wysokości, tak aby pole serwetki było największe, wiedząc że a - długość boku trójkąta, h - długość wysokości opuszczonej na ten bok Zaznacz poprawną odpowiedź.

- $a = 2$ i $h = 6$
- $a = 6$ i $h = 2$
- $a = 4$ i $h = 4$

Ćwiczenie 8

Gra liczbowa polega na tym, że uczestnicy muszą podać takie dwie liczby, aby suma ich kwadratów była najmniejsza przy założeniu, że dana jest suma tych liczb. Załóżmy, że suma tych liczb wynosi 12. Wyznacz takie liczby, aby wygrać w grze.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zagadnienia optymalizacyjne z kontekstem realistycznym wykorzystujące własności funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:
11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje strategię rozwiązywania zagadnienia optymalizacyjnego,
- buduje model matematyczny w sytuacjach z życia codziennego,
- właściwie interpretuje tekst matematyczny i ocenia wynik zadania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Zagadnienia optymalizacyjne z kontekstem realistycznym wykorzystujące własności funkcji kwadratowej" oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj". Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja". Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się", a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum klasy krok po kroku.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Wartość najmniejsza oraz wartość największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

Wskazówki metodyczne:

- „Animację” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w zakresie rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych z kontekstem realistycznym, wykorzystujących własności funkcji kwadratowej.
- Animację można wykorzystać na zajęciach poświęconych określaniu ekstremum funkcji.