



Rozwiązanie algebraiczne nierówności typu $|x - a| < b$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązanie algebraiczne nierówności typu $|x - a| < b$

Źródło: Andrew Buchanan, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Potrafisz już rozwiązywać nierówność typu $|x - a| < b$ oraz $|x - a| \leq b$, korzystając z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej oraz odczytać rozwiązanie z wykresu funkcji.

W tym materiale dowiesz się jak algebraicznie rozwiązywać takie nierówności.

Twoje cele

- Udoskonalisz umiejętności korzystania z własności wartości bezwzględnej liczby, pozwalającej zapisywać nierówność bez użycia symbolu modułu.
- Utrwalisz definicję algebraiczną wartości bezwzględnej liczby a i nauczysz się wykorzystywać ją do rozwiązywania nierówności.
- Nauczysz się rozwiązywać nierówności typu $|x - a| < b$ oraz $|x - a| \leq b$ sposobem algebraicznym.

Przeczytaj

Najprościej jest rozwiązywać nierówności postaci $|x - a| \leq b$, korzystając z własności, którą już stosowaliśmy:

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$$

oraz

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$$

Zapoznaj się z przykładami.

Przykład 1

Rozwiąż nierówność $|x - 3| \leq 8$.

Zapisujemy nierówność bez symbolu modułu, korzystając wprost z powyższej własności:

$$3 - 8 \leq x \leq 3 + 8$$

$$-5 \leq x \leq 11$$

Podajemy zbiór rozwiązań:

$$x \in \langle -5, 11 \rangle$$

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $|4x - 5| < 1$.

Wykorzystując tę własność możemy nierówność zapisać również w taki sposób:

$$-1 < 4x - 5 < 1$$

A następnie rozwiązać odpowiednią [nierówność liniową podwójną](#):

$$-1 < 4x - 5 < 1 \quad | +5$$

$$4 < 4x < 6 \quad | :4$$

$$1 < x < \frac{6}{4}$$

$$1 < x < 1\frac{1}{2}$$

Podajemy zbiór rozwiązań:

$$x \in (1, 1\frac{1}{2})$$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $|6 \cdot (x - 2) + 4| \leq 10$.

Tym razem najpierw doprowadzimy wyrażenie pod modułem do najprostszej postaci.

$$|6x - 12 + 4| \leq 10$$

$$|6x - 8| \leq 10$$

Stosujemy własność:

$$-10 \leq 6x - 8 \leq 10$$

Rozwiązujemy nierówność podwójną:

$$-10 \leq 6x - 8 \leq 10 \quad | +8$$

$$-2 \leq 6x \leq 18 \quad | :6$$

$$-\frac{2}{6} \leq x \leq 3$$

Podajemy zbiór rozwiązań:

$$x \in \langle -\frac{1}{3}, 3 \rangle$$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $|2x + 3| - 4 < 5$.

Zapisujemy nierówność równoważnie:

$$|2x + 3| < 5 + 4$$

Opuszczamy symbol modułu i rozwiązujemy nierówność podwójną:

$$-9 < 2x + 3 < 9 \quad | -3$$

$$-12 < 2x < 6 \quad | :2$$

$$-6 < x < 3$$

Podajemy zbiór rozwiązań:

$$x \in (-6, 3)$$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność $|x - 2| < 7$.

Zastosuj definicję algebraiczną wartości bezwzględnej liczby.

Przypomnijmy tę definicję:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Sposób ten wymaga rozpatrzenia, zgodnie z definicją, dwóch przypadków:

$$1^\circ a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$2^\circ a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

W tym przykładzie wyrażenie a jest równe $x - 2$, a zatem :

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{dla } x \geq 2 \\ -x + 2, & \text{dla } x < 2 \end{cases}$$

Rozpatrujemy pierwszy przypadek, kiedy liczba pod modulem jest nieujemna:

$$1^\circ x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Wtedy nierówność przyjmuje postać:

$$x - 2 < 7$$

$$x < 9$$

W pierwszym przypadku, rozwiązaniem są liczby, które spełniają układ nierówności

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \langle 2, 9 \rangle$$

Rozpatrujemy drugi przypadek, kiedy liczba pod modulem jest ujemna.

$$2^\circ x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

Wtedy nierówność przyjmuje postać:

$$-x + 2 < 7$$

$$-x < 5 \quad |: (-1)$$

$$x > -5$$

W tym przypadku, rozwiązaniem są liczby, które spełniają układ nierówności

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-5, 2)$$

Rozwiązaniem nierówności $|x - 2| < 7$ jest suma przedziałów otrzymanych w powyższych przypadkach.

$$x \in (-5, 2) \cup \langle 2, 9 \rangle$$

A zatem zbiór rozwiązań nierówności, to przedział otwarty $(-5, 9)$.

Przykład 6

Rozwiąż nierówność $|3x - 1| \leq 5$.

Zastosuj definicję algebraiczną wartości bezwzględnej liczby.

Rozpatrujemy przypadki:

$$1^\circ 3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$$

Wtedy:

$$|3x - 1| = 3x - 1$$

a nierówność przyjmuje postać:

$$3x - 1 \leq 5$$

$$3x \leq 6 \quad |: 3$$

$$x \leq 2$$

Zapisujemy rozwiązanie pierwszego przypadku.

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$$

$$2^\circ 3x - 1 < 0 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$$

Wtedy:

$$|3x - 1| = -3x + 1$$

i nierówność przyjmuje postać:

$$-3x + 1 \leq 5$$

$$-3x \leq 4 \quad | : (-3)$$

$$x \geq -\frac{4}{3}$$

Zapisujemy rozwiązanie drugiego przypadku.

$$\begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x \geq -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\langle -\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$$

Zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności.

$$x \in \left\langle -\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{3}, 2 \right\rangle$$

$$x \in \left\langle -\frac{4}{3}, 2 \right\rangle$$

Słownik

nierówność liniowa podwójna

nierówność, w której pojawiają się dwa znaki mniejszości; jej zbiorem rozwiązań są liczby, które spełniają jednocześnie obie nierówności

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi filmie samouczku. Spróbuj samodzielnie rozwiązać trzecią nierówność.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DuzQ1qFpB>

Film samouczek przedstawia metody rozwiązywania nierówności typu wartość bezwzględna z x odjąć a koniec wartości bezwzględnej mniejsze od b za pomocą metod algebraicznych: uproszczonej oraz z analizą przypadków wartości bezwzględnej. Przedstawiono również przykład nierówności z wartością bezwzględną, która jest nierównością sprzeczną.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówności.

a. $|x - 4| < -5$

b. $|x - 1| < 4$

c. $|x + 2| \leq 3$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Poniżej przedstawiono pewne nierówności. Połącz w pary nierówności równoważne.

$$|5x - 4| \leq 2$$

$$|4x - 5| < 2$$

$$|2x - 4| < 5$$

$$-5 < 2x - 4 < 5$$

$$-2 < 4x - 5 < 2$$

$$|4x - 2| \leq 5$$

$$-5 \leq 4x - 2 \leq 5$$

$$-2 \leq 5x - 4 \leq 2$$

Ćwiczenie 2



Które z poniższych liczb całkowitych spełniają nierówność podwójną $-3 < x - 2 < 3$?
Zaznacz poprawne odpowiedzi.

☐ 4

☐ -3

☐ 2

☐ 3

☐ 1

☐ -1

☐ 0

Ćwiczenie 3



Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność $-2 < x - 4 < 2$, jest liczba 3.

☐ Rozwiązaniem nierówności $|x - 10| < 5$ jest przedział $(5, 15)$.

☐ Liczba $x = -3$ należy do zbioru rozwiązań nierówności $|-3 + x| < 6$.

☐ Rozwiązaniem nierówności $|2x - 7| \leq 3$ jest przedział $(2, 5)$.

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Rozwiąż nierówność $|x - 6| \leq 8$, korzystając z definicji algebraicznej wartości bezwzględnej liczby.

Przełącznij we właściwe miejsca kolejne etapy rozwiązania.

Rozpatrujemy dwa przypadki:

1. Jeżeli $x \geq 6$, to ,
stąd nierówność ,
stąd otrzymujemy następujący zbiór rozwiązań .

2. Jeżeli $x < 6$, to ,
stąd nierówność ,
stąd otrzymujemy następujący zbiór rozwiązań .

Wtedy otrzymujemy , czyli ostatecznym zbiorem rozwiązań jest zbiór .

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Posortuj we właściwej kolejności kolejne etapy rozwiązania nierówności:

$$|2 \cdot (x + 3) - 11| - 4 \leq 5.$$

Złap element i przesun go w górę lub w dół.

$$x \in \langle -2, 7 \rangle$$



$$-4 \leq 2x \leq 14$$



$$-9 \leq 2x - 5 \leq 9$$



$$|2x - 5| \leq 9$$



$$|2x + 6 - 11| - 4 \leq 5$$



$$|2 \cdot (x + 3) - 11| - 4 \leq 5$$



$$|2x - 5| - 4 \leq 5$$



$$-2 \leq x \leq 7$$



Ćwiczenie 8



Dane są zbiory liczbowe:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : |x - 1| < 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} : |x + 2| \leq 5\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} : |x + 2| \leq 3\}$$

Rozwiązując odpowiednie nierówności, znajdź zbiory A , B i C oraz zbiór $(A \cap C) \cup B$.

Połącz ze sobą zbiory i właściwe odpowiedzi.

A

$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

B

$\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

C

$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$(A \cap C) \cup B$

$\{0, 1, 2, 3\}$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązanie algebraiczne nierówności typu $|x - a| < b$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności typu $|x - a| < b$ oraz $|x - a| \leq b$, korzystając z własności modułu
- utrwała definicję algebraiczną wartości bezwzględnej
- rozwiązuje nierówności typu $|x - a| < b$ oraz $|x - a| \leq b$, korzystając z definicji algebraicznej modułu

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku

- rozmowy nauczające z wykorzystaniem materiałów multimedialnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie wiadomości i umiejętności dotyczące zapisywania prostych nierówności typu $|x| \leq a$ bez symbolu wartości bezwzględnej.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” oraz filmie samouczku.
2. Uczniowie wspólnie z nauczycielem omawiają przeanalizowane przykłady i wyjaśniają powstałe wątpliwości.
3. Pracując w parach, uczniowie wykonują polecenie zawarte pod medium bazowym. Wątpliwości konsultują z nauczycielem.
4. Uczniowie pracując indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń. Uczniowie wskazują nauczycielowi, na jakie trudności natknęli się rozwiązując zadania. Wspólnie znajdują rozwiązanie problemów.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia 7, 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Nierówności stopnia pierwszego](#)
- [Definicja wartości bezwzględnej](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać materiały multimedialne do utrwalenia wiadomości z lekcji i jako pomoc przy odrabianiu pracy domowej.