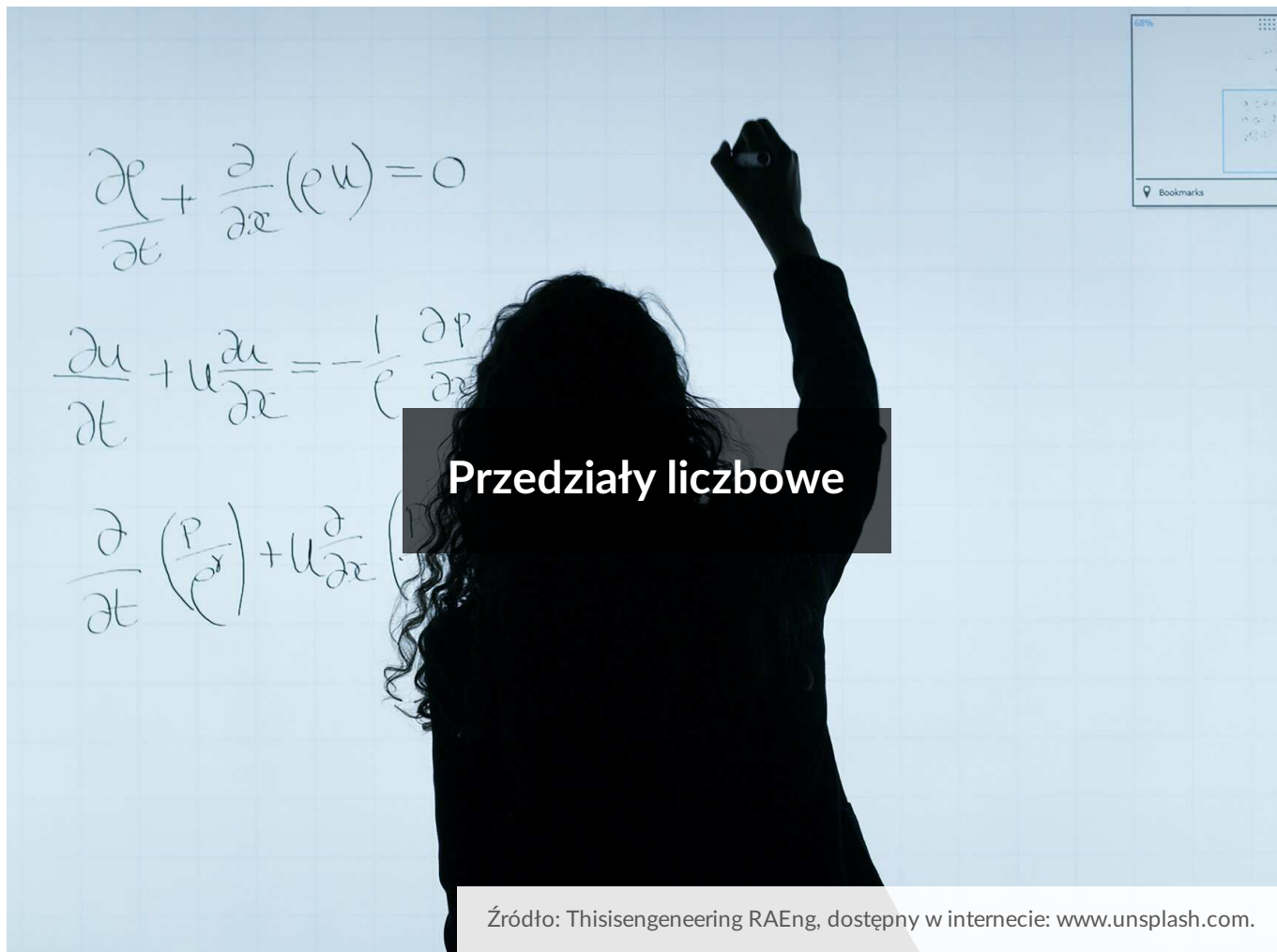




Przedziały liczbowe

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: Thisisengineering RAEng, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Zajmiemy się teraz przedziałami liczbowymi, czyli zbiorami liczb, które na osi liczbowej ilustruje się za pomocą odcinków (z końcami lub bez końców) lub półprostych (z początkiem lub bez początku). Istnieją różne rodzaje przedziałów liczbowych – poznasz je w dalszej części materiału.

Przedziały liczbowe można wykorzystać na przykład do ilustracji zbioru rozwiązań pojedynczych lub podwójnych nierówności pierwszego stopnia jednej zmiennej.

Twoje cele

- Określisz rodzaj przedziału liczbowego.
- Użyjesz odpowiednich oznaczeń do zapisu konkretnych przedziałów liczbowych.
- Zaznaczysz na osi liczbowej dany przedział liczbowy.

Przeczytaj

Przedział liczbowy to pewien podzbiór zbioru liczb rzeczywistych. Przedziały liczbowe dzielimy zwykle na przedziały ograniczone i nieograniczone. Możemy zilustrować je na osi liczbowej.

Definicja: Przedział ograniczony

Przedziałem ograniczonym nazywamy zbiór liczb rzeczywistych, który na osi liczbowej tworzy odcinek (z końcami lub bez).

Definicja: Przedział otwarty

Niech a oraz b będą pewnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$.

Przedziałem otwartym (a, b) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność:

$$a < x < b.$$

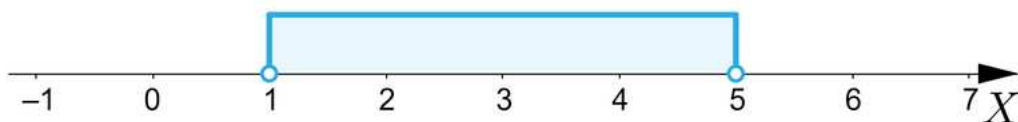
Przedział otwarty jest zatem zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych zawartych między liczbami a oraz b . Na [osi liczbowej](#) ilustrujemy go następująco:



Zwróćmy uwagę, że końce przedziału otwartego do niego nie należą i są przedstawione na rysunku w punktach a oraz b jako kółeczka niezamalowane.

Przykład 1

Zbiór liczb zdefiniowany za pomocą podwójnej nierówności: $1 < x < 5$ jest przedziałem otwartym $(1; 5)$.



Ważne!

Możemy zauważyć, że np. liczba 2 należy do przedziału $(1; 5)$. Symbolicznie zapisujemy ten fakt następująco: $2 \in (1; 5)$. Z kolei fakt, że liczba 0 nie należy do przedziału $(1; 5)$, możemy symbolicznie zapisać następująco: $0 \notin (1; 5)$.

Jeśli do przedziału otwartego dołączymy jego oba końce, otrzymamy przedział domknięty.

Definicja: Przedział domknięty

Niech a oraz b będą pewnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$.

Przedziałem domkniętym $\langle a; b \rangle$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność: $a \leq x \leq b$

Uwaga!

Jak widzimy, różnica w zapisie symbolicznym pomiędzy przedziałem otwartym a domkniętym polega na użyciu innych nawiasów: w przypadku przedziału otwartego używamy nawiasów zwykłych (okrągłych), w przypadku przedziału domkniętego – nawiasów ostrych.

Przedział domknięty jest zbiorem złożonym z liczb a i b oraz wszystkich liczb zawartych między nimi. Na osi liczbowej przedział domknięty ilustrujemy następująco:



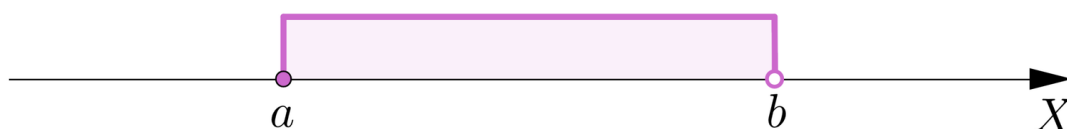
Zauważmy, że tym razem końce przedziału domkniętego do niego należą, zatem kółeczka w punktach a oraz b są zamalowane.

Przykład 2

Zbiór liczb spełniających podwójną nierówność: $0 \leq x \leq 4$ jest przedziałem domkniętym $\langle 0; 4 \rangle$. Jego ilustrację na osi liczbowej umieszczamy na rysunku poniżej.



W ten sposób rozpatrzyliśmy dwa rodzaje przedziałów, które na osi oznaczamy odcinkami bez końców lub z dwoma końcami. Jak łatwo można się domyślić, są też takie przedziały, które zawierają jeden z końców, a drugiego nie. Przedział, do którego należy jego lewy koniec, a prawy nie, oznaczamy na osi liczbowej następująco:



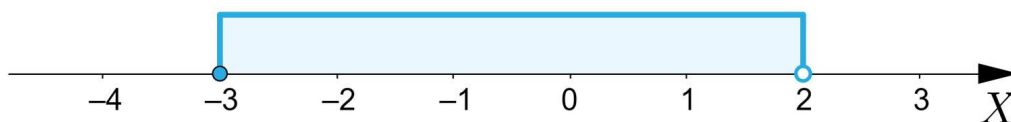
Jest on definiowany nierównością: $a \leq x < b$ i zapisywany symbolicznie: $\langle a; b \rangle$. Ostry nawias po lewej stronie oznacza, że liczba a należy do przedziału, a okrągły nawias po stronie prawej, że b nie należy do przedziału.

Ważne!

Przedział, w którym lewy koniec należy do przedziału, a prawy - nie, nazywamy przedziałem lewostronnie domkniętym i prawostronnie otwartym.

Przykład 3

Przedział, który zdefiniowany jest za pomocą podwójnej nierówności: $-3 \leq x < 2$, oznaczamy symbolicznie $\langle -3; 2 \rangle$. Zauważmy, że liczba (-3) należy do przedziału $\langle -3; 2 \rangle$, a liczba 2 do tego przedziału nie należy. Na osi liczbowej przedstawiamy go tak jak na rysunku poniżej.



Przedział, do którego należy jego prawy koniec, a lewy nie, oznaczamy na osi liczbowej następująco:



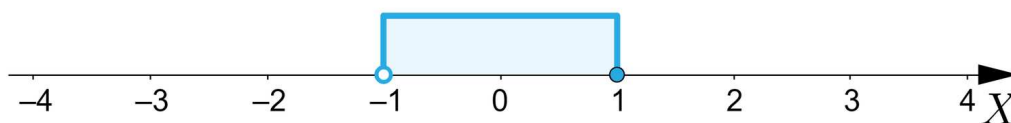
Jest on definiowany nierównością: $a < x \leq b$ i oznaczany symbolicznie: $(a; b]$.

Ważne!

Przedział, w którym prawy koniec należy do przedziału, a lewy – nie, nazywamy przedziałem lewostronnie otwartym i prawostronnie domkniętym.

Przykład 4

Przedział, który zdefiniowany jest za pomocą podwójnej nierówności $-1 < x \leq 1$, oznaczamy symbolicznie jako $(-1; 1]$. Zauważmy, że liczba (-1) nie należy do przedziału $(-1; 1]$, a liczba 1 do tego przedziału należy. Na osi liczbowej przedstawiamy go tak, jak na rysunku poniżej.



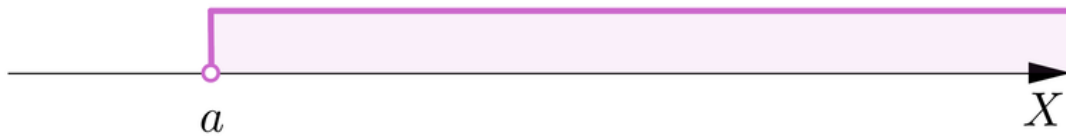
Wszystkie przedziały dotąd rozważane są przedziałami ograniczonymi. Mówimy również o przedziałach nieograniczonych, które na osi liczbowej symbolizuje półprosta (z początkiem lub bez początku).

Definicja: Przedział nieograniczony

Przedziałem nieograniczonym nazywamy zbiór liczb rzeczywistych, które na osi liczbowej tworzą półprostą (z początkiem lub bez początku).

W poniższych przykładach przedstawimy sposób oznaczania przedziałów nieograniczonych.

Zbiór liczb większych od liczby a , czyli spełniających nierówność: $x > a$ zaznaczamy na osi, jak na poniższym rysunku.



Symbolicznie zapisujemy go następująco: $(a; +\infty)$.

Przykład 5

Zbiór liczb zdefiniowany za pomocą nierówności: $x > -1$ to przedział $(-1; +\infty)$. Jego ilustracja na osi liczbowej przedstawiona jest na rysunku poniżej.



Zbiór liczb większych od a lub równych liczbie a , czyli spełniających nierówność: $x \geq a$, oznaczamy na osi jak na rysunku poniżej.



Symbolicznie przedział taki zapisujemy następująco: $\langle a; +\infty)$.

Przykład 6

Zbiór liczb zdefiniowany za pomocą nierówności: $x \geq 2$ jest przedziałem $\langle 2; +\infty)$, a na osi liczbowej przedstawiamy go tak jak na rysunku poniżej.



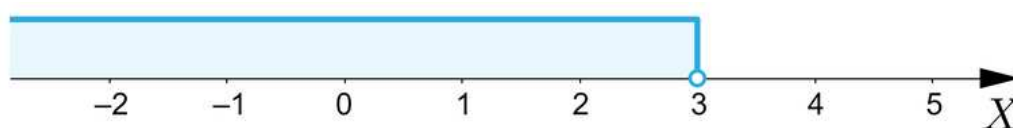
Zbiór liczb mniejszych od liczby a , czyli zbiór liczb rzeczywistych spełniających nierówność:

$x < a$, oznaczamy $(-\infty; a)$ i przedstawiamy na osi liczbowej następująco:



Przykład 7

Zbiór liczb zdefiniowany za pomocą nierówności: $x < 3$ jest przedziałem $(-\infty; 3)$, a na osi liczbowej przedstawiamy go tak jak na rysunku poniżej.



Wreszcie, zbiór liczb mniejszych lub równych liczbie a , czyli spełniających nierówność: $x \leq a$, ilustrujemy na osi następująco:



Przykład 8

Zbiór liczb zdefiniowany za pomocą nierówności: $x \leq 6$ to przedział $(-\infty; 6]$, którego ilustracja na osi liczbowej przedstawiona jest na rysunku poniżej.



Słownik

oś liczbowa

prosta, na której ustalono zwrot, obrano punkt zerowy oraz ustalono odcinek jednostkowy

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną zawierającą przykłady, na podstawie których rozwiążesz polecenia 2, 3, i 4.



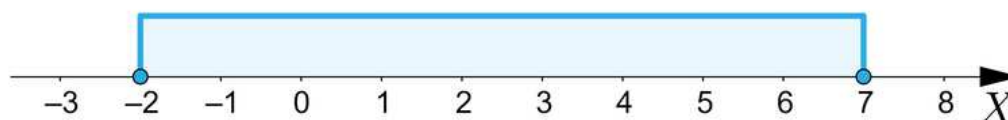
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D17O3qKMp>

Polecenie 2

Zanacz na osi liczbowej wszystkie liczby rzeczywiste x , które spełniają nierówność $x \leq 6$ oraz $x > -3$.

Polecenie 3

Zobrazowany na rysunku poniżej przedział zapisz za pomocą podwójnej nierówności.



Polecenie 4

Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb rzeczywistych x , które należą jednocześnie do przedziałów $(-1, 1)$ oraz $(-4; 0]$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Przedział $(-1, 21)$ jest przedziałem:

☐

otwartym

☐

domkniętym

☐

ograniczonym

☐

do którego należy -1

Ćwiczenie 2



Liczba $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ należy do przedziału:



Ćwiczenie 3



Jedną z liczb należących jednocześnie do przedziałów $(-2; \sqrt{13})$ oraz $(\sqrt[3]{10}; 11)$ jest liczba:



1



3



4



0

Ćwiczenie 4



Założmy, że a jest liczbą całkowitą dodatnią. Wiadomo, że liczba $\frac{3}{17}$ należy do przedziału $(\frac{a}{100}; \frac{a+1}{100})$

Wtedy $a =$

Ćwiczenie 5



Liczb całkowitych w przedziale $\langle -87; \frac{811}{23} \rangle$

jest dokładnie: .

Ćwiczenie 6



Wszystkie następujące liczby: -2 , (315) , $\frac{317}{50}$, $\sqrt{40\frac{1}{9}}$ oraz $-\frac{463}{200}$ należą do przedziału:

☐ $(-3, 6)$

☐ $\langle -\frac{1447}{625}, \frac{792}{125} \rangle$

☐ $\langle -\frac{11577}{5000}, \frac{198}{31} \rangle$

☐ $(-2, 7)$

Ćwiczenie 7



Do przedziału (a, b) należą między innymi liczby: $\sqrt{2}$, -2^{-1} oraz $\pi + 4$. Wynika stąd, że:

☐ $a + b > 0$

☐ $b > a + 6$

☐ $a = 2b$

☐ $ab = 0$

Ćwiczenie 8



Liczba x spełnia podwójną nierówność $-11 < x < 25$, ale nie należy do przedziału $(-\frac{17}{2}, \frac{80}{3})$. Wynika stąd, że liczba x jest w przedziale:

☐ $(-11, +\infty)$

☐ $(-12, 5)$

☐ $\langle -11, -8\frac{1}{2} \rangle$

☐ $(-\infty, -8\frac{1}{2})$

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przedziały liczbowe

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne:

I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- posługuje się pojęciem przedziału liczbowego,
- określa różne przedziały: przedział otwarty, domknięty, ograniczony i nieograniczony,
- zaznacza przedziały na osi liczbowej,
- odczytuje i zapisuje symbolicznie przedział zaznaczony na osi liczbowej,
- określa za pomocą przedziałów zbiory opisane nierównościami,
- weryfikuje, czy dana liczba należy do określonego przedziału.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Uczniowie zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji Przeczytaj i z prezentacją multimedialną.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Przedziały liczbowe”, a następnie określa cele i kryteria sukcesu. Przypomina podstawowe pojęcia związane z tematem lekcji i następnie przechodzi do weryfikacji wiedzy uczniów.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2.
2. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Przedziały liczbowe”).

Materiały pomocnicze:

- [Przedziały liczbowe. Przedziały jako zbiory.](#)

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna może być wykorzystana w tematach związanych z rozwiązywaniem nierówności.