



Dwusieczna kąta

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Dwusieczna kąta

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Dwusieczna kąta jest jednym z podstawowych obiektów w geometrii płaskiej. Konstrukcja dwusiecznej za pomocą cyrkla i linijki należy, obok konstrukcji prostej prostopadłej, prostej równoległej i symetralnej odcinka, do elementarnych konstrukcji geometrycznych. Konstrukcja ta prowadzi do podziału kąta na dwa równe kąty. Można więc powiedzieć, że dwusieczna kąta pełni analogiczną rolę, jak symetralna odcinka – dzieli obiekt na dwa, w pewnym sensie równe, obiekty.

Twoje cele

- Określisz pojęcie dwusiecznej kąta.
- Skonstruujesz dwusieczną kąta wypukłego i dwusieczną kąta wklęsłego.
- Sformułujesz własność dwusiecznej kąta wypukłego.
- Wykorzystasz dwusieczną kąta do rozwiązywania problemów geometrycznych.

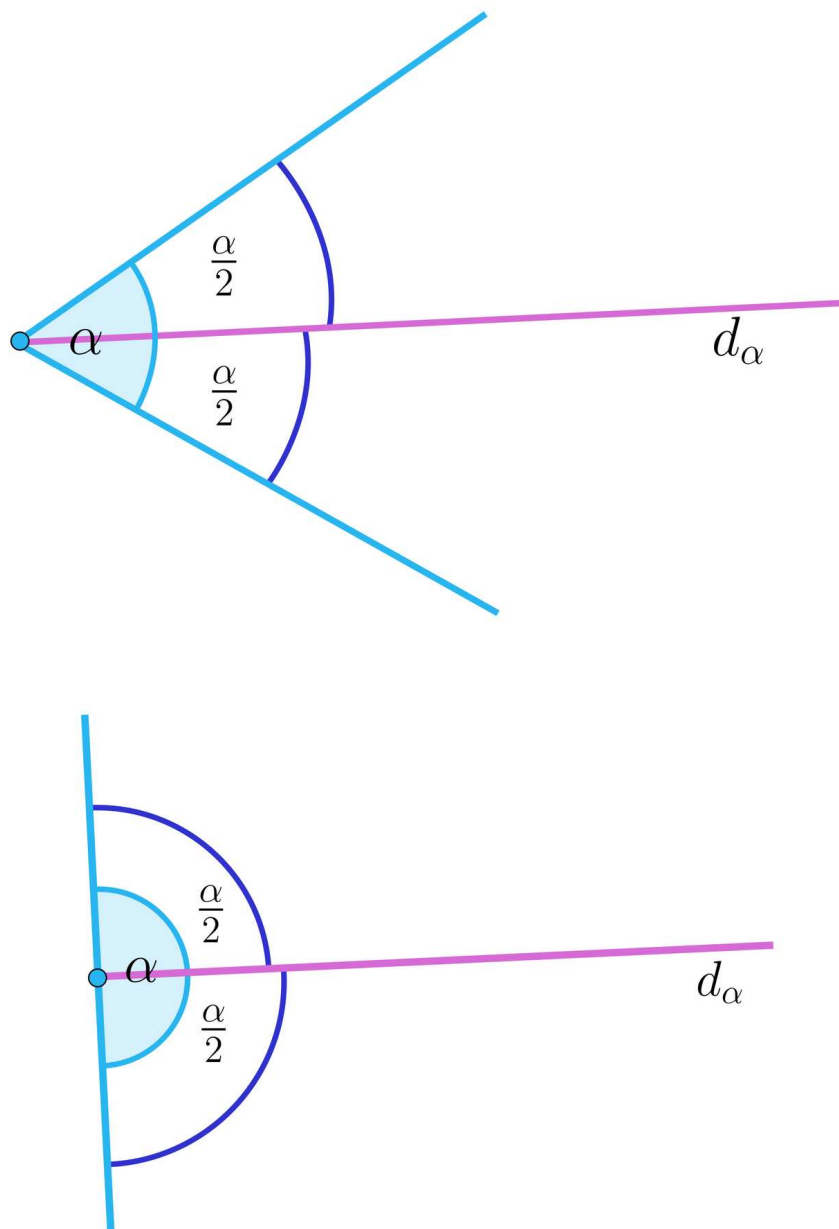
Przeczytaj

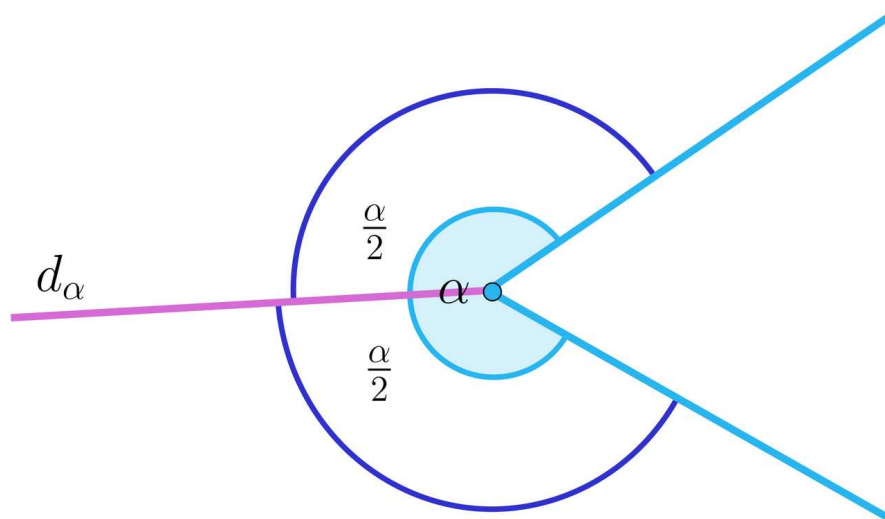
Dwusieczna kąta

Dwusieczną kąta można zdefiniować jako prostą. Taka definicja funkcjonuje na przykład w programie GeoGebra. Jednak w większości podręczników dwusieczną kąta definiuje się jako półprostą. Tak postąpimy też w tym opracowaniu. Konsekwencją przyjętej definicji są niekiedy nieco inne własności dwusiecznej.

Definicja: dwusieczna kąta

Dwusieczną kąta nazywamy półprostą, której początkiem jest wierzchołek tego kąta, i która dzieli ten kąt na dwa równe kąty.

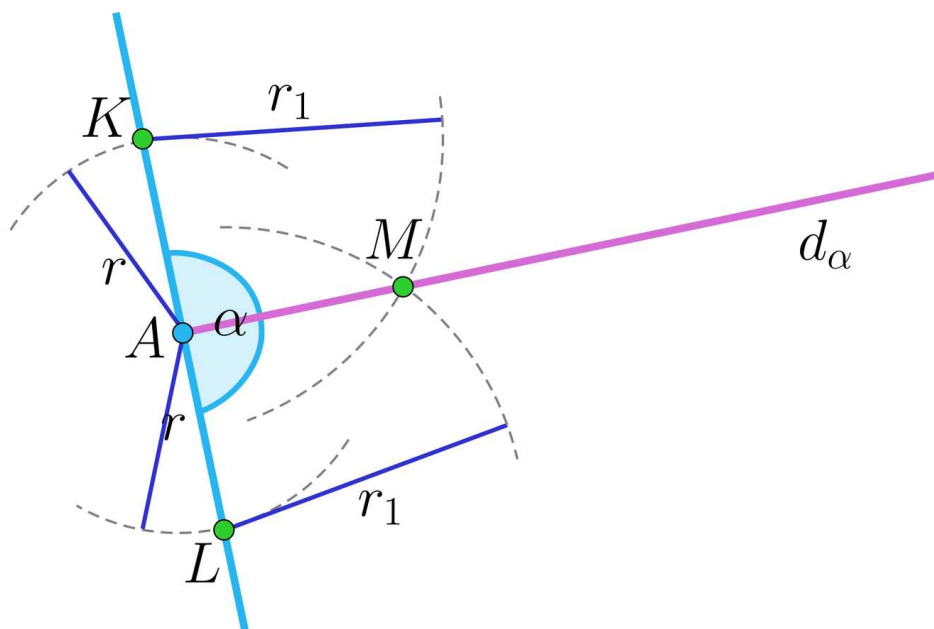




Konstrukcja dwusiecznej kąta

Konstrukcja dwusiecznej kąta półpełnego

Konstrukcja dwusiecznej kąta półpełnego sprowadza się do konstrukcji prostej prostopadłej do prostej zawierającej ramiona tego kąta i przechodzącej przez wierzchołek kąta.

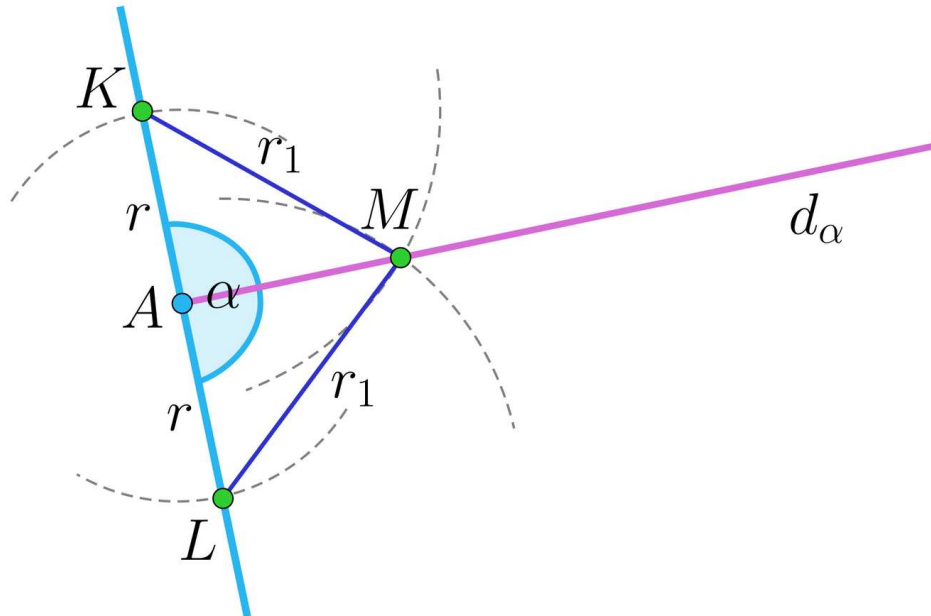


Kolejne etapy tej konstrukcji są następujące:

- rysujemy łuki okręgu o środku A i dowolnym promieniu $r > 0$ tak, żeby przecięły prostą zawierającą ramiona kąta w punktach K i L ,

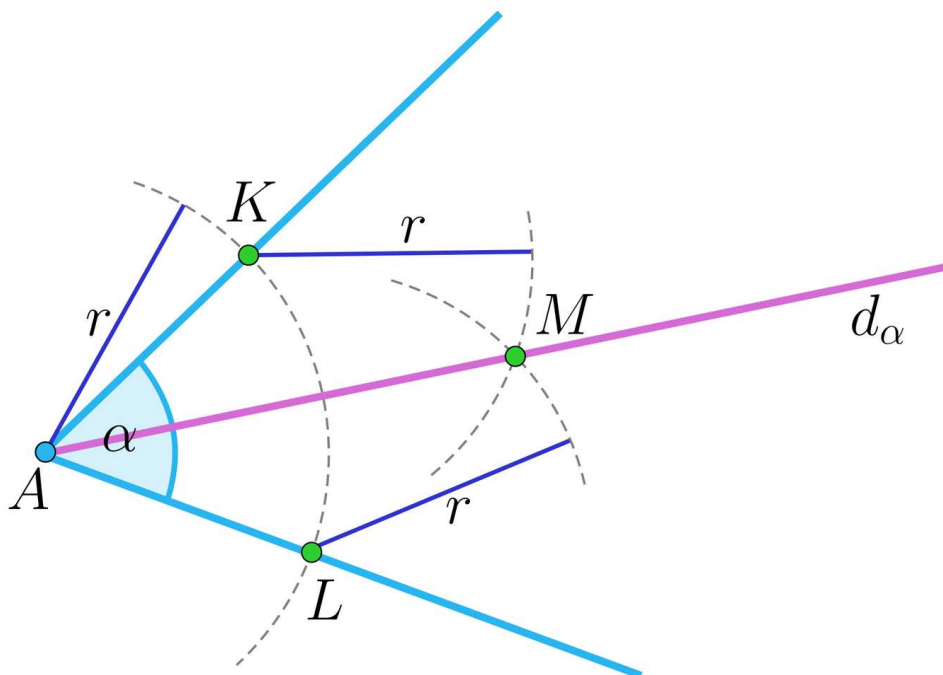
- rysujemy łuki okręgów o środkach K i L i tym samym promieniu $r_1 > r$ tak, żeby przecięły się w punkcie M należącym do kąta α ,
- rysujemy półprostą AM . Jest to dwusieczna d_α kąta α .

Uzasadnienie poprawności konstrukcji.



Trójkąty AKM i ALM mają wspólny bok AM , boki AK i AL są tej samej długości r i boki KM i LM są tej samej długości r_1 . Zatem są to trójkąty przystające (cecha *bbb* przystawiania trójkątów). Stąd wynika równość kątów KAM i LAM , a to oznacza, że półprosta AM jest dwusieczną kąta α .

Konstrukcja dwusiecznej kąta wypukłego i mniejszego od kąta półpełnego

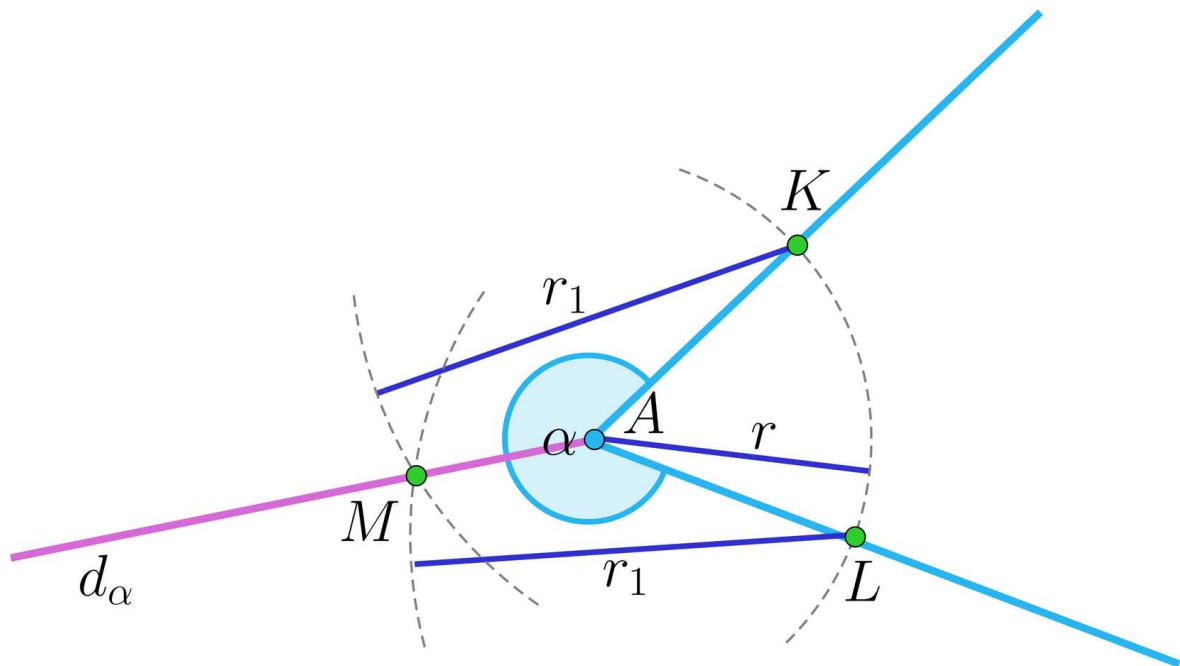


Kolejne etapy tej konstrukcji są następujące:

- rysujemy łuk okręgu o środku A i dowolnym promieniu $r > 0$ tak, żeby przeciął ramiona kąta w punktach K i L ,
- rysujemy łuki okręgów o środkach K i L i tym samym promieniu r tak, żeby przecięły się w punkcie M różnym od punktu A (możemy też narysować łuki okręgów o środkach K i L jakimkolwiek, ale tym samym, promieniu $r_1 > \frac{1}{2}|KL|$),
- rysujemy półprostą AM . Jest to dwusieczna d_α kąta α .

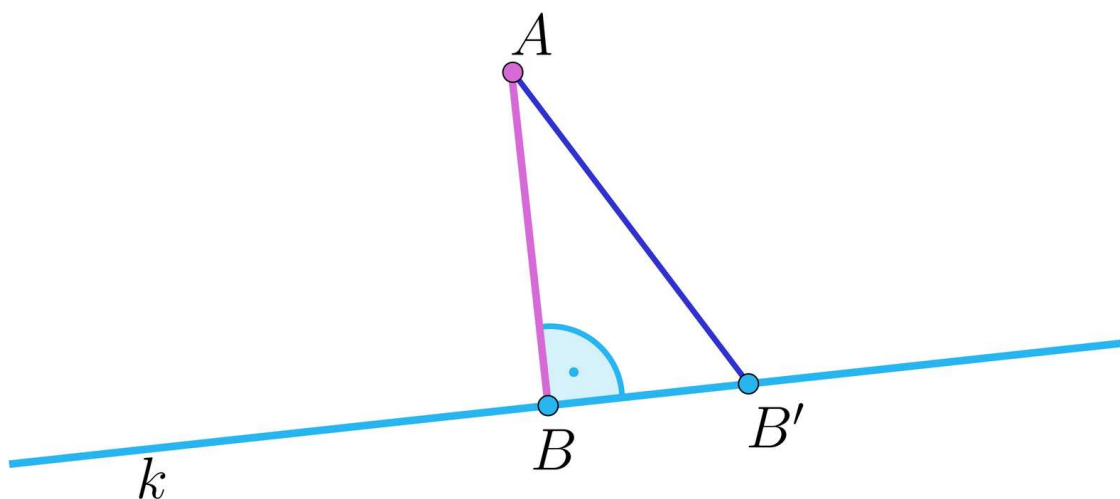
Poprawność tej konstrukcji wynika, podobnie jak poprawność konstrukcji dwusiecznej kąta półpełnego, z przystawania trójkątów AKM i ALM . Trójkąty te mają wspólny bok AM , boki AK i AL są tej samej długości r i boki KM i LM są tej samej długości r lub r_1 . Są to więc, na mocy cechy *bbb*, trójkąty przystające. Stąd wynika równość kątów KAM i LAM , a to oznacza, że półprosta AM jest dwusieczną kąta α .

Konstrukcja dwusiecznej kąta wklęsłego



Kolejne etapy tej konstrukcji są takie same jak konstrukcji dwusiecznej kąta wypukłego. Jedyna różnica jest taka, że promień r_1 okręgów o środkach K i L musi być większy od r , o ile chcemy, żeby punkt M przecięcia łuków był punktem kąta α .

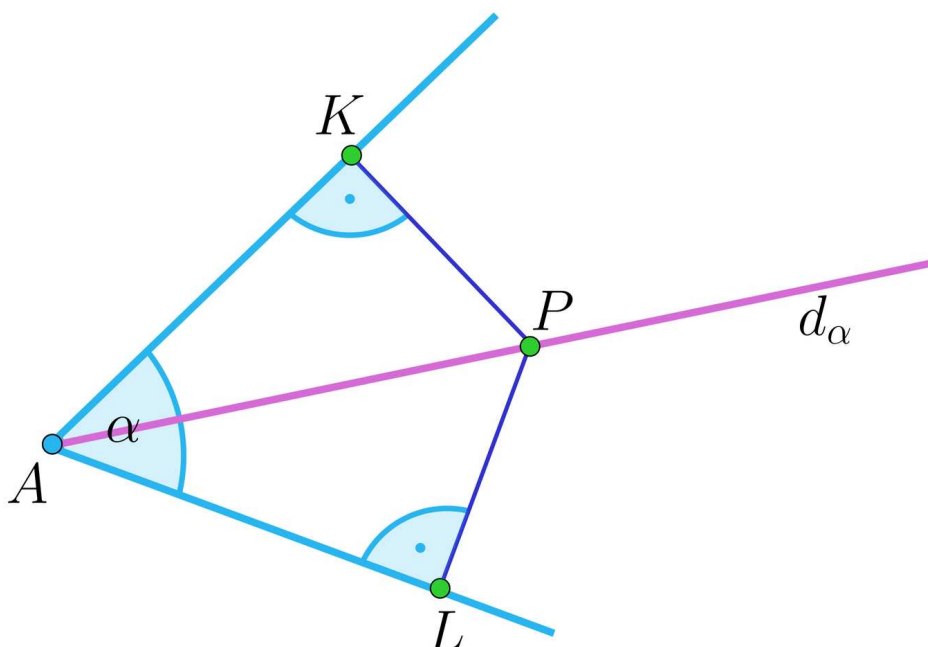
Dwusieczna kąta jest odpowiednikiem symetralnej odcinka. Podobnie też jak symetralna odcinka ma ciekawą własność geometryczną. Zanim przejdziemy do tej własności, przypomnijmy, co to jest odległość punktu od figury. W przypadku, gdy tą figurą jest punkt, to odległość punktu od punktu jest po prostu długością odcinka, którego końcami są te punkty. W przypadku, gdy figurą jest prosta – odległością punktu od tej prostej nazywamy długość najkrótszego z odcinków, którego jednym końcem jest ten punkt, a drugim – punkt leżący na tej prostej. Z nierówności trójkąta wynika, że odległość punktu A od prostej k jest długością odcinka AB prostopadłego do prostej k , którego koniec B leży na prostej k .



Rzeczywiście, biorąc jakikolwiek punkt B' leżący na prostej k , różny od punktu B , otrzymujemy trójkąt prostokątny ABB' o kącie prostym przy wierzchołku B . Przeciwprostokątna AB' jest oczywiście dłuższa od przyprostokątnej AB . Ogólnie, jeżeli punkt leży na zewnątrz figury i nie leży na brzegu tej figury, to odległość tego punktu od figury jest równa długości najkrótszego odcinka łączącego ten punkt z punktem leżącym na brzegu figury; jeżeli natomiast punkt leży wewnątrz figury lub na jej brzegu, to odległość tego punktu od figury jest równa 0.

Twierdzenie: własność punktu leżącego na dwusiecznej kąta wypukłego

Jeżeli punkt leży na dwusiecznej kąta wypukłego, to jest on równo oddalony od ramion tego kąta. Teza, przy oznaczeniach jak na poniższym rysunku, oznacza równość $|PK| = |PL|$.

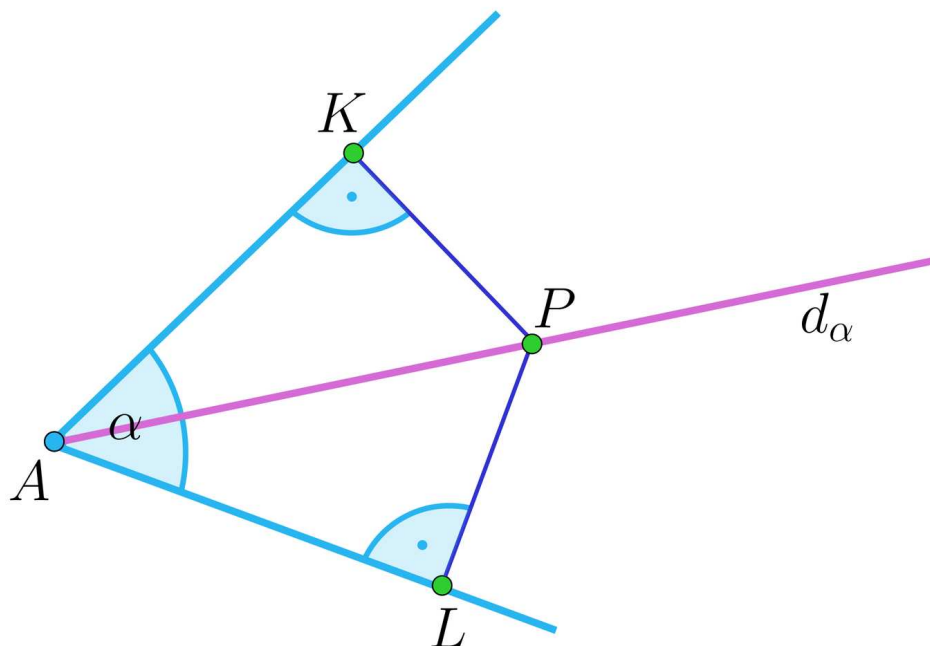


Dowód

Trójkąty AKP i ALP są prostokątne. Kąty ostre KAP i LAP tych trójkątów są równe, gdyż półprosta AP jest dwusieczną kąta α . Zatem z twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych trójkąta wynika, że kąty ostre APK i APL tych trójkątów także są równe. Odcinek AP jest wspólną przeciwprostokątną tych trójkątów. Zatem te trójkąty są przystające (cecha kbk przystawiania trójkątów). Stąd wynika, że $|PK| = |PL|$. To kończy dowód.

Twierdzenie: odwrotne do twierdzenia o własności punktu leżącego na dwusiecznej kąta wypukłego

Jeżeli punkt leży wewnątrz kąta wypukłego i jest równo oddalony od ramion tego kąta, to punkt ten leży na dwusiecznej tego kąta.



Dowód

Założmy, że punkt P leży wewnątrz kąta wypukłego α i jest równo oddalony od ramion tego kąta, a więc zachodzi równość $|PK| = |PL|$, gdzie punkt K leży na jednym ramieniu kąta α i odcinek KP jest prostopadły do tego ramienia, a punkt L leży na drugim ramieniu kąta α i odcinek LP jest prostopadły do tego ramienia. Wówczas trójkąty AKP i ALP są prostokątne i mają wspólną przeciwprostokątną AP . Wobec tego z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla każdego z tych trójkątów wynika, że $|AK| = \sqrt{|AP|^2 - |KP|^2}$ oraz $|AL| = \sqrt{|AP|^2 - |LP|^2}$. Stąd i z równości $|KP| = |LP|$ wynika, że $|AK| = |AL|$. Wykazaliśmy więc, że trójkąty AKP i ALP są przystające (cecha *bbb* przystawania trójkątów). To oznacza, że kąty ostre KAP i LAP tych trójkątów są równe. To z kolei znaczy, że półprosta AP jest dwusieczną kąta α , czyli punkt P leży na dwusiecznej kąta α . To kończy dowód.

Ważne!

Powyższe dwa twierdzenia często zapisujemy w postaci równoważności:

Dwusieczna kąta wypukłego jest zbiorem wszystkich punktów tego kąta, które są równo oddalone od jego ramion.

Prześledźmy teraz kilka przykładów, które przybliżą nam wprowadzone pojęcie dwusiecznej kąta oraz wskażą, jak można wykorzystać dwusieczną kąta do rozwiązywania zadań.

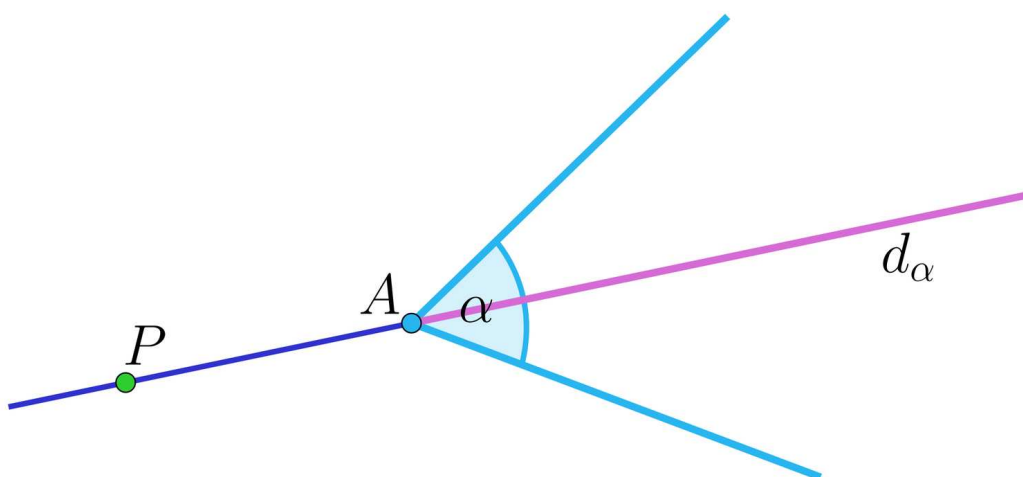
Przykład 1

Rozstrzygnij, czy w ostatnim podanym twierdzeniu można pominąć założenie o tym, że punkt jest punktem kąta, a więc rozstrzygnij, czy prawdziwe jest zdanie:

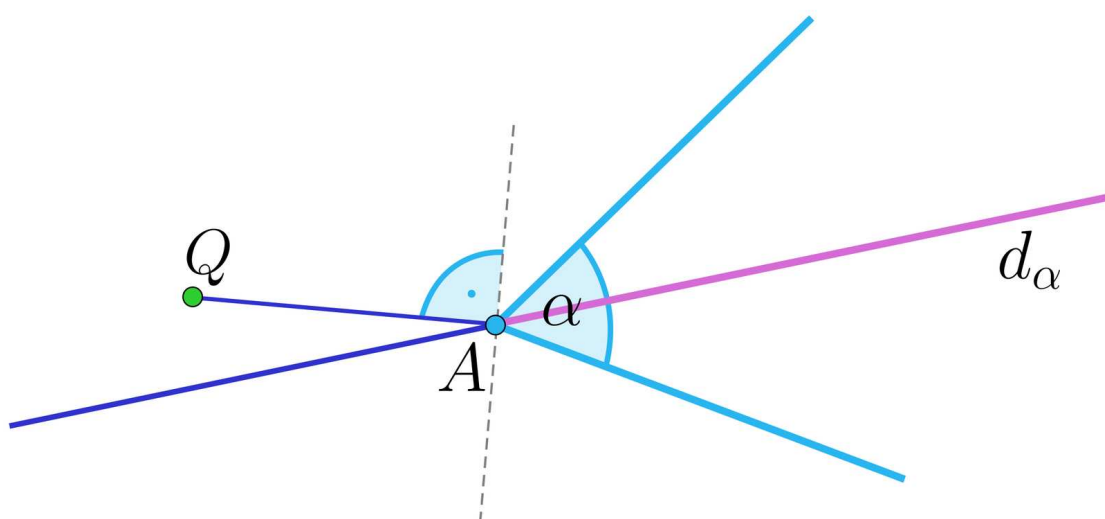
Dwusieczna kąta wypukłego jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, które są równo oddalone od jego ramion.

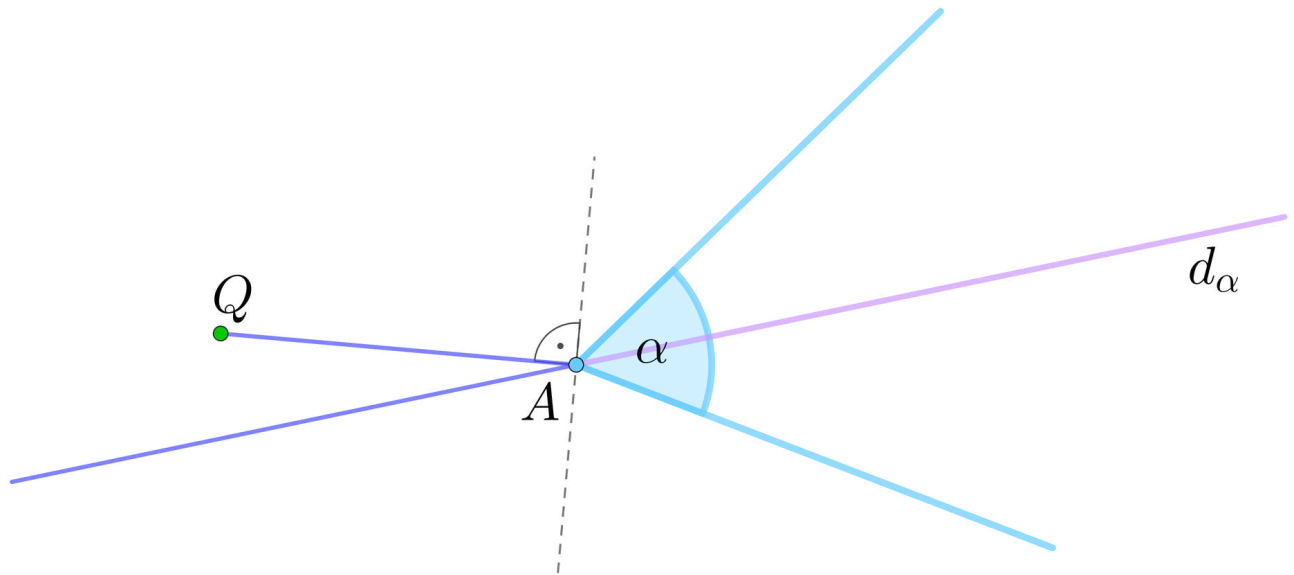
Każdy punkt leżący na dwusiecznej kąta jest równo oddalony od jego ramion.

Prawdziwość tego zdania udowodniliśmy wcześniej, a w dowodzie zakładaliśmy, że punkt leży wewnątrz kąta wypukłego. Musimy więc rozstrzygnąć, czy są punkty leżące na zewnątrz kąta, które są równo oddalone od jego ramion. Bez trudu zauważamy, że każdy punkt P leżący na prostej zawierającej dwusieczną kąta jest równo oddalony od ramion tego kąta. Odległość od każdego z ramion jest wtedy równa $|PA|$, jak na rysunku.



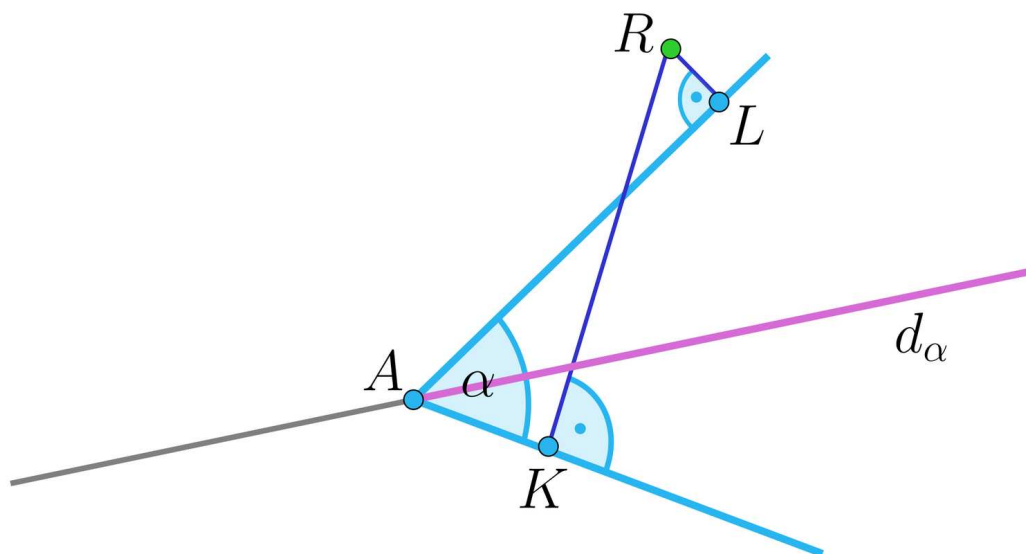
Czy są w takim razie jeszcze inne punkty leżące na zewnątrz kąta równo oddalone od jego ramion, które nie leżą na prostej zawierającej dwusieczną tego kąta? Poniższy rysunek pokazuje, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca.

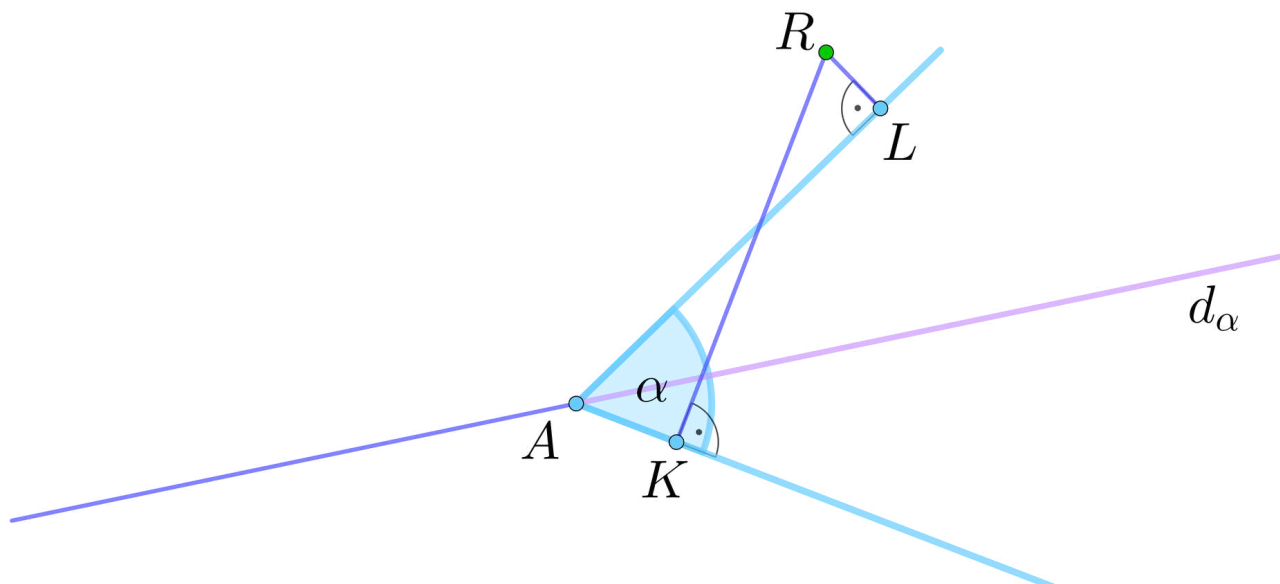




Zaznaczony na tym rysunku punkt Q leży w tej samej odległości od każdego z ramion kąta. Odległość tego punktu od obu ramion kąta jest równa $|QA|$.

Kolejny rysunek przekonuje nas jednak, że nie każdy punkt leżący na zewnątrz kąta leży w tej samej odległości od jego ramion.



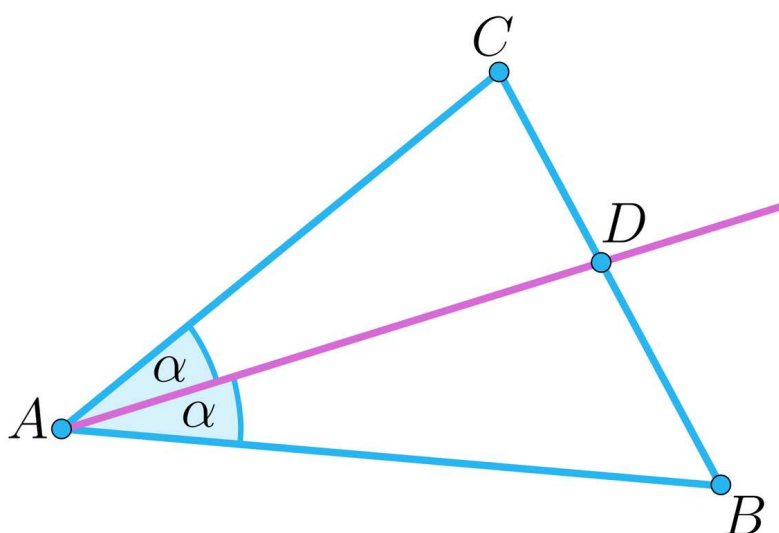


Odległości zaznaczonego na tym rysunku punktu R od ramion kąta są równe $|RK|$ i $|RL|$. Oczywiście $|RK| < |RL|$. Czy potrafiłbyś teraz zaznaczyć wszystkie punkty płaszczyzny równo oddalone od ramion tego kąta wypukłego? Jeśli to zrobiłeś i chcesz sprawdzić, czy Twoje rozwiązanie jest poprawne, odkryj rysunek.

[Zobacz rysunek](#)

Przykład 2

Wykaż, że jeśli **dwusieczna kąta trójkąta** jest jednocześnie **środkową** tego trójkąta, to ten trójkąt jest **równoramienny**.



Założmy, że odcinek AD jest dwusieczną kąta BAC trójkąta ABC i jednocześnie jest środkową trójkąta ABC . Zatem $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$ oraz $|BD| = |CD|$. Z własności środkowej wynika, że trójkąty ABD i ACD mają równe pola. Możemy więc zapisać

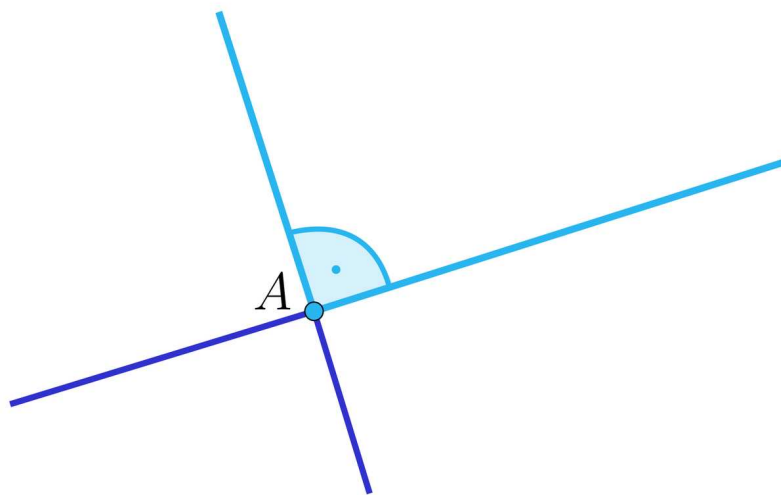
równość $\frac{1}{2}|AB| \cdot |AD| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}|AC| \cdot |AD| \cdot \sin \alpha$, z której otrzymujemy równość $|AB| = |AC|$. To oznacza, że trójkąt ABC jest równoramienny, co kończy dowód.

Przykład 3

Skonstruuj kąt o mierze $22^\circ 30'$.

Krok 1

Skonstruujmy najpierw kąt prosty. Wystarczy w tym celu skonstruować dwie proste prostopadłe.



Krok 2

Krok 3

Z ostatniego przykładu wynika, że jeśli mamy dany kąt α , to możemy ten kąt podzielić na dwa równe kąty; otrzymaną połówkę kąta znowu możemy podzielić na dwa równe kąty i tak dalej. Możemy więc skonstruować kąty o miarach $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha$; ogólnie kąt o mierze $\frac{1}{2^n}\alpha$, gdzie n oznacza dodatnią liczbę całkowitą. Pojawia się zatem tutaj pytanie, czy możemy podzielić kąt na trzy równe kąty. Podział kąta na trzy równe kąty nazywa się trysekcją kąta (podział kąta na dwa równe kąty nazywamy też bisekcją kąta). Trysekcja dowolnego kąta jest jednym z trzech wielkich problemów geometrycznych postawionych jeszcze przez starożytnych Greków. Dwa pozostałe problemy to [kwadratura koła](#) i [podwojenie sześcianu](#). Postawienie tych trzech problemów przypisuje się Platonowi. Dopiero w XIX wieku Gauss wykazał, że w przypadku ogólnym [trysekcji kąta](#) nie da się wykonać jedynie za pomocą cyrkla i linijki (bez podziałki). Pozostałe dwa problemy też mają negatywne rozwiązanie.

Słownik

dwusieczna kąta trójkąta

odcinek, który jest częścią wspólną trójkąta i dwusiecznej kąta wewnętrznego tego trójkąta

trysekcja kąta

podział kąta na trzy równe kąty

kwadratura koła

konstrukcja kwadratu o polu równym polu danego koła

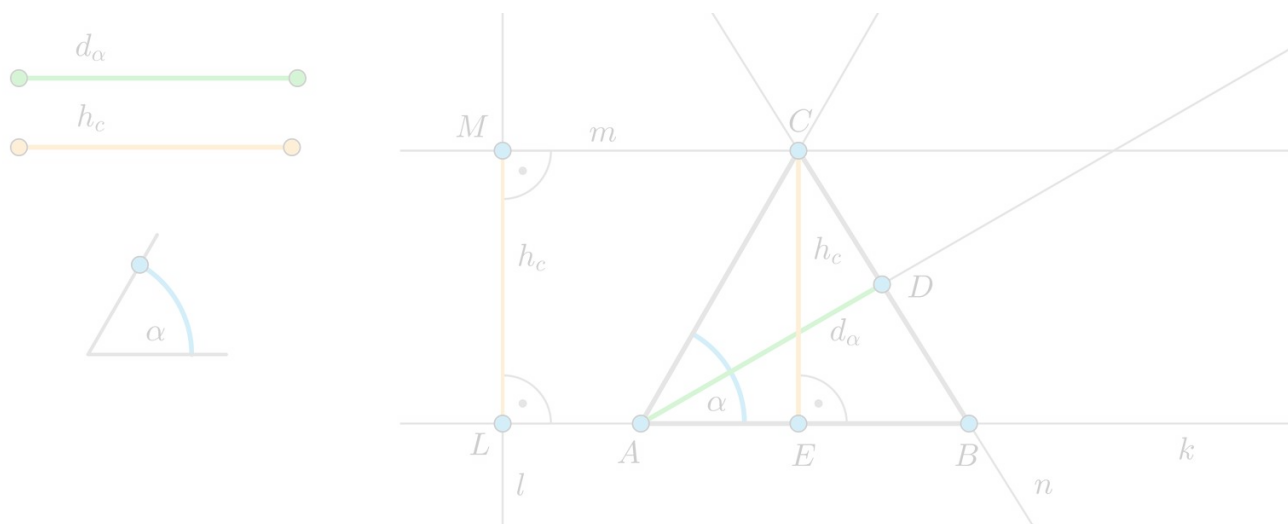
podwojenie sześcianu

konstrukcja odcinka będącego krawędzią sześcianu o objętości dwukrotnie większej od objętości danego sześcianu

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną w aplecie konstrukcją trójkąta o danym kącie, dwusiecznej tego kąta i wysokości.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyekLK4L>

Polecenie 2

Otwórz aplet *Konstrukcja trójkąta o danym kącie, dwusiecznej tego kąta i wysokości* i wybierz opcję „ $h_c = |CE|$ ”. Prześledź tę konstrukcję krok po kroku. Spróbuj samodzielnie uzasadnić jej poprawność. Zmieniając długość danych odcinków lub wielkość danego kąta, rozstrzygnij, kiedy konstrukcja ma rozwiązanie, a więc przy jakich danych trójkąt ABC istnieje, oraz czy konstrukcja może mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

Polecenie 3

Otwórz aplet „Konstrukcja trójkąta o danym kącie, dwusiecznej tego kąta i wysokości” i wybierz opcję „ $h_b = |AF|$ ”. Prześledź tę konstrukcję krok po kroku. Spróbuj samodzielnie uzasadnić jej poprawność. Zmieniając długość danych odcinków lub wielkość danego kąta, rozstrzygnij, kiedy konstrukcja ma rozwiązanie, a więc przy jakich danych trójkąt ABC istnieje, oraz czy konstrukcja może mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Półprosta AC jest dwusieczną kąta BAD , a półprosta AD jest dwusieczną kąta BAE . Wynika stąd, że

☐ $|\sphericalangle CAE| = 2 \cdot |\sphericalangle BAC|$.

☐ $|\sphericalangle CAE| = 4 \cdot |\sphericalangle BAC|$.

☐ $|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle BAC|$.

☐ $|\sphericalangle CAE| = 3 \cdot |\sphericalangle BAC|$.

Ćwiczenie 2



Wpisz prawidłową odpowiedź. W trójkącie ABC dane są $|\sphericalangle BAC| = 42^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 56^\circ$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D .

Wynika stąd, że miara kąta ADC jest równa °.

Ćwiczenie 3



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Dwusieczna jednego z kątów trójkąta ABC dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty ABD i ACD takie, trójkąt ACD jest podobny do trójkąta ABC . Wynika stąd, że

☐ jeden trójkątów ABD lub ACD jest rozwartokątny.

☐ taki trójkąt ABC nie istnieje.

☐ trójkąt ABC jest ostrokątny.

☐ trójkąt ABD jest równoramienny.

Ćwiczenie 4



Różnica kątów ACB i CAB trójkąta ABC jest równa 50° . Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D , a kąty ADB i ADC różnią się o 40° . Wskaż wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Jeden z kątów trójkąta ABC ma miarę równą średniej arytmetycznej miar dwóch pozostałych kątów tego trójkąta.

☐ Trójkąt ABC jest prostokątny.

☐ Najmniejszy kąt trójkąta ABC ma miarę równą 40° .

☐ Jeden z kątów trójkąta ABC jest o 10° większy od drugiego kąta tego trójkąta.

Ćwiczenie 5



Podstawa AB trapezu $ABCD$ ma długość 12. Dwusieczne kątów przy podstawie CD tego trapezu przecinają się w punkcie P , który leży na podstawie AB oraz $|PC| = |PD|$. Wskaż wszystkie zdania prawdziwe.

☐ $|AD| > |BC|$

☐ $|AC| = 6\sqrt{3}$

☐ $|CD| = 6$

☐ $|AD| + |BC| = |AB|$

Ćwiczenie 6



Wykaż, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

Ćwiczenie 7



Wykaż, że jeżeli dwusieczne kątów ABC i BAC trójkąta ABC przecinają się w punkcie P , to kąt APB jest rozwarty.

Ćwiczenie 8



Skonstruuj trójkąt ABC , mając następujące dane: odcinek o długości $c = |AB|$, odcinek o długości $d_\alpha = |AD|$, gdzie D to punkt przecięcia dwusiecznej kąta BAC z bokiem BC oraz kąt $\beta = |\sphericalangle ABC|$.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Dwusieczna kąta

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określi pojęcie dwusiecznej kąta;
- skonstruuje dwusieczną kąta wypukłego i dwusieczną kąta wklęsłego;
- sformułuje własność dwusiecznej kąta wypukłego;
- wykorzysta dwusieczną kąta do rozwiązywania problemów geometrycznych, w szczególności zadań konstrukcyjnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego;
- odwrócona klasa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Dwusieczna kąta”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w 2 grupach, metodą tekstu przewodniego – wykorzystując odpowiednie treści z sekcji „Przeczytaj”. Celem 1 grupy jest poznanie konstrukcji dwusiecznej kąta, a grupy 2 – konstrukcji dwusiecznej kąta wklęsłego. Wszyscy uczniowie spotykają się przy „okrągłym stole”. Zadaniem przedstawicieli grup jest przekazanie zdobytej wiedzy pozostałym uczniom.
2. Uczniowie w parach analizują Aplet i rozwiązują polecenia z nim związane. Ewentualne wątpliwości wyjaśnia nauczyciel.
3. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania zadania.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Dwusieczna kąta” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu – czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Wskazówki metodyczne:

- [Dwusieczna kąta](#)

Wskazówki metodyczne:

Aplet można wykorzystać jako pracę domową dla uczniów, aby mogli utrwalić sposób konstrukcji trójkąta o danym kącie, dwusiecznej tego kąta i wysokości.