



Obliczanie przybliżonej wielkości pola obszarów zamkniętych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Obliczanie przybliżonej wielkości pola obszarów zamkniętych

Źródło: Markus Spiske, domena publiczna.

W jaki sposób – za pomocą komputera – można obliczyć pole powierzchni pod wykresem funkcji? Jak oblicza się pole dowolnej figury bez stosowania odpowiednich wzorów? Które metody numeryczne mogą przybliżyć nas do celu? W tym e-materiale postaramy się odpowiedzieć na te pytania.

Jeśli już wiesz, w jaki sposób obliczyć pole powierzchni ograniczonej wykresem funkcji oraz osią OX i chcesz zapoznać się z implementacjami w wybranych językach programowania, przejdź do pozostałych e-materiałów:

- [Obliczanie przybliżonej wielkości pola obszarów zamkniętych w języku C++](#),
- [Obliczanie przybliżonej wielkości pola obszarów zamkniętych w języku Java](#),
- [Obliczanie przybliżonej wielkości pola obszarów zamkniętych w języku Python](#).

Więcej zadań? Przejdź do e-materiału [Obliczanie przybliżonej wielkości pola obszarów zamkniętych – zadania naturalne](#).

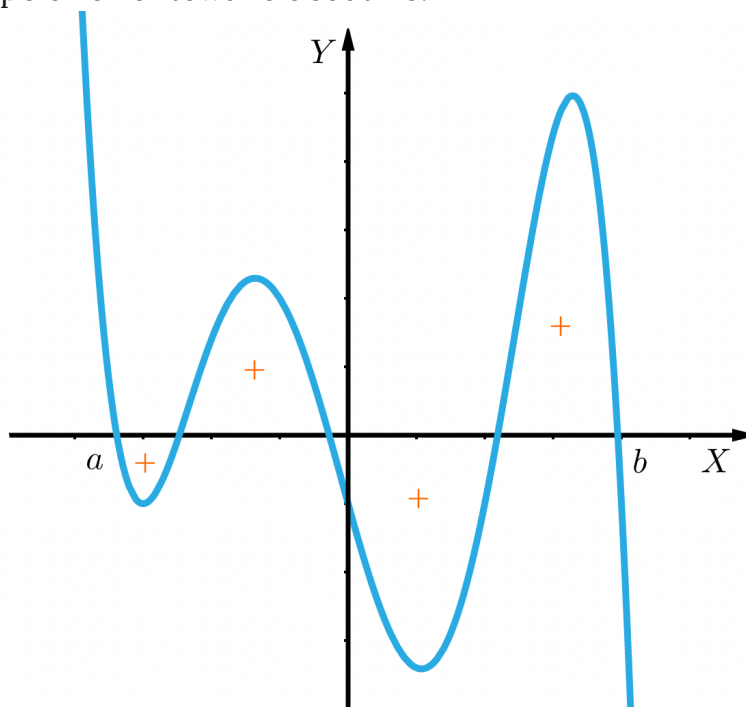
Twoje cele

- Wyjaśnisz, jak oszacować pole pod wykresem dowolnej funkcji.
- Scharakteryzujesz metody numeryczne pozwalające na przybliżenie wartości pola pod wykresem funkcji.
- Przeanalizujesz różnice między metodą prostokątów a metodą trapezów.

Pole powierzchni pod wykresem funkcji

Pole powierzchni pod wykresem funkcji oznacza powierzchnię obszaru ograniczonego przez funkcję $f(x)$, oś X oraz zadany przedział $\langle a, b \rangle$. W kontekście funkcji o wartościach ujemnych określenie to traci jednak sens. Poprawne jest używanie sformułowania „pole ograniczone wykresem funkcji oraz osią X ”. W zależności od potrzeb oraz interpretacji w przypadku pola, które znajduje się pod osią X , możemy traktować je jako pole zorientowane ujemnie lub dodatnio.

Chcąc obliczyć pole powierzchni figury geometrycznej utworzonej przez funkcję, potraktujemy je jako pole zorientowane dodatnio.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Istnieją metody matematyczne, które pozwalają obliczyć pole ograniczone wykresem funkcji oraz osią X w danym przedziale. Wymagają one jednak zaangażowania aparatu matematycznego. W wielu przypadkach niepotrzebna jest dokładna wielkość pola. Wówczas możemy nie korzystać z aparatu matematycznego, ale posłużyć się metodami numerycznymi, które pozwalają z dużą dokładnością oszacować pole takiej powierzchni.

Pole powierzchni figury to płaszczyzna, na której znajduje się dana figura. Pokrywamy ją siatką przylegających kwadratów o zadanej długości boku. Prostokąt o bokach 1 metr na 2 metry ma pole 2 metrów kwadratowych, co oznacza, że figurę można wypełnić dwoma kwadratami o boku 1 metra lub 20000 kwadratami o boku 1 centymetra.

Ważne!

Pole powierzchni każdej figury, której obszar ograniczony jest przez równania matematyczne, możemy obliczyć za pomocą metod numerycznych. Nie zawsze jednak jest to proste i często wymaga rozbicia figury na kilka mniejszych elementów. Co więcej, operacja ta, zwłaszcza przy figurach składających się z łuków, może nie być dokładna.

Przykład 1

Prostokąt o wymiarach 2 na 1 możemy opisać następująco:

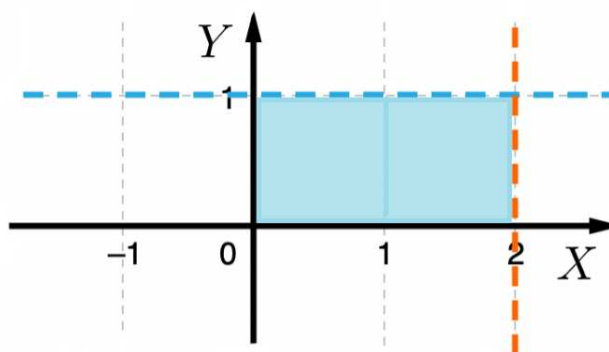
$$f_1(x) = 1$$

$$a = 0$$

$$b = 2,$$

gdzie a oznacza początek zakresu, natomiast b koniec zakresu. Ograniczamy się osią X .

Następnie obliczamy pole prostokąta jako sumę pól dwóch kwadratów.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Pole omawianego w przykładzie prostokąta to $2j^2$. Możemy je również obliczyć jak na lekcjach matematyki, czyli mnożąc długość boku prostokąta przez jego wysokość. Otrzymamy w ten sposób identyczny wynik.

Pomysł, że można podzielić dużą figurę na mniejsze figury, posłużył do opracowania metody numerycznego obliczania pola powierzchni pod wykresem funkcji – metody [prostokątów](#) i [trapezów](#).

Słownik

metoda prostokątów

metoda szacowania wartości pola powierzchni pod wykresem funkcji za pomocą sumy pól prostokątów, będących przybliżeniem obszaru ograniczonego wykresem funkcji i osią X

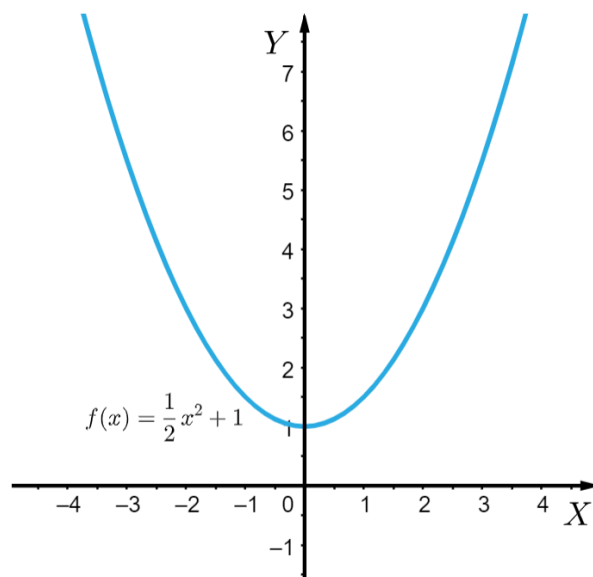
metoda trapezów

metoda szacowania wartości pola powierzchni pod wykresem funkcji za pomocą sumy pól trapezów, będących przybliżeniem obszaru ograniczonego wykresem funkcji i osią X

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją, a następnie wykonaj ćwiczenia.



1

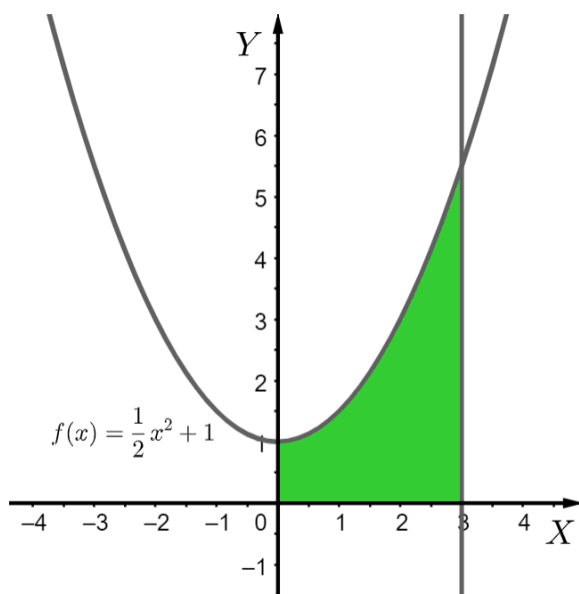
Dana jest funkcja kwadratowa

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

2

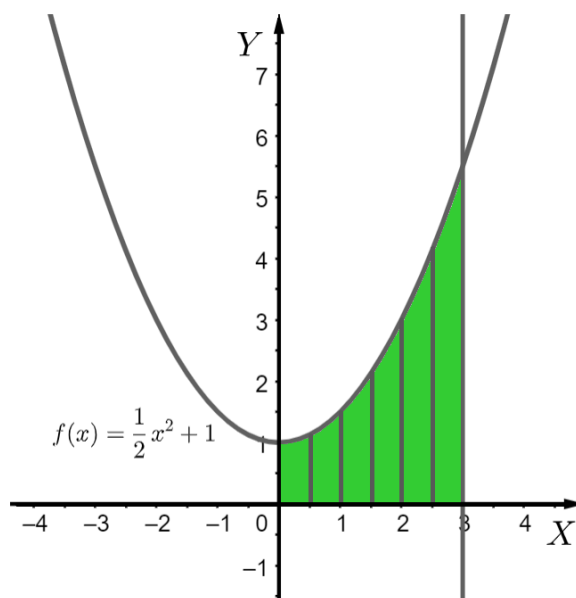
Obliczymy pole powierzchni ograniczonej funkcją $f(x)$ w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$.

3



Analizowany obszar został zaznaczony zielonym kolorem.

4



Szacowanie wartości pola pod wykresem funkcji – metoda prostokątów

Metoda ta wykorzystuje pola powierzchni prostokątów. Zaczynamy od podzielenia przedziału na równe części. Liczba części jest dowolna, ale im jest ich więcej, tym

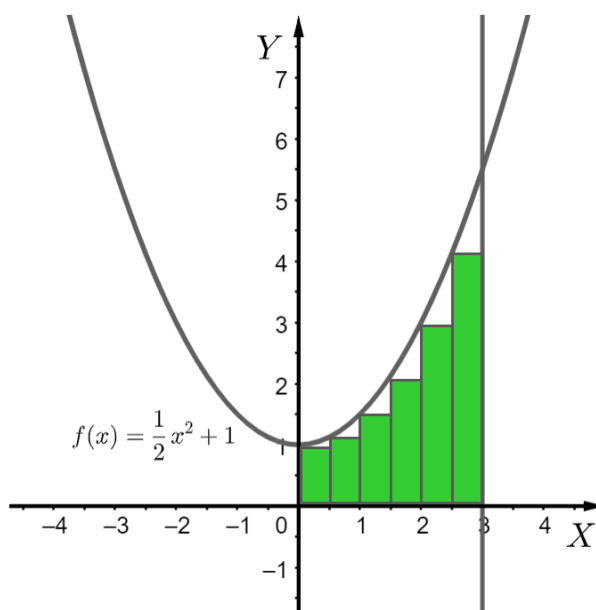
dokładniejszy będzie szacunek wartości.
W omawianym przykładzie podzielimy figurę na 6 części.

Jeżeli podzieliłbyśmy ten przedział na 10 równych części, pierwszy z przedziałów zaczynałby się w $x = 0$, a kończył w $x = 0,5$, drugi zaczynałby się w $x = 0,5$, a kończył w $x = 1$ itd.

W metodzie prostokątów pole każdego z wydzielonych podobszarów przybliżamy przez potraktowanie go jako prostokąta. Istnieją różne sposoby wyznaczania prostokątów. Przyjrzyjmy się niektórym z nich.

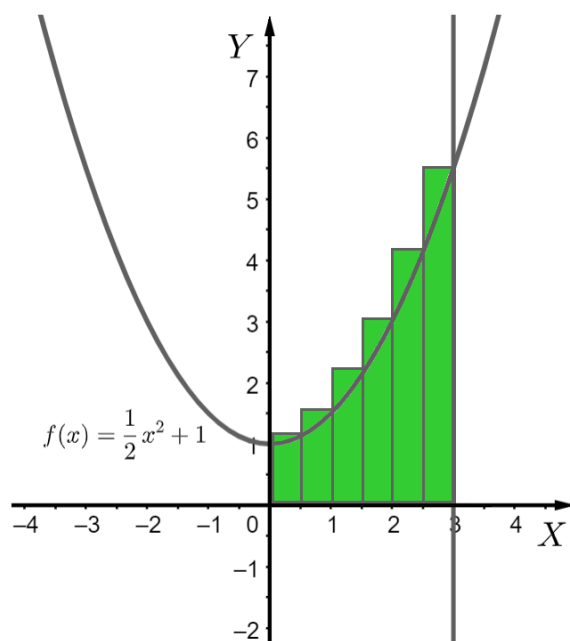
5

6



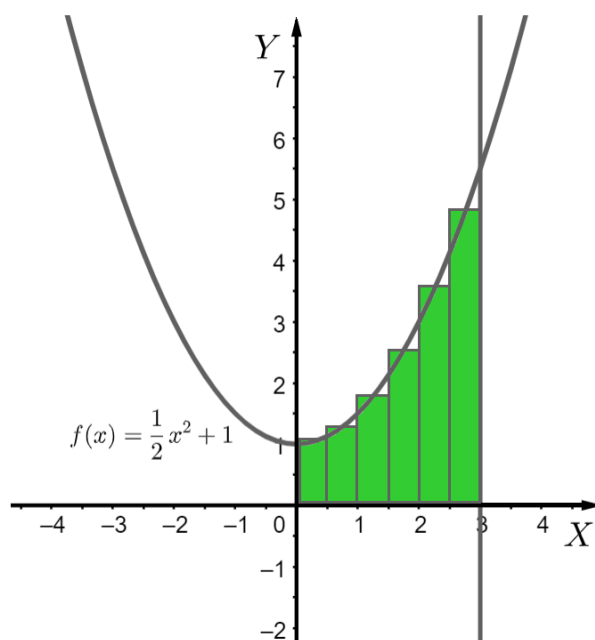
Szacowanie z lewej strony, jest to szacowanie z niedoborem.

7



Szacowanie z prawej strony, jest to szacowanie z nadmiarem.

8



Szacowanie z punktem środkowym.

Aby obliczyć pole każdego z prostokątów, potrzebujemy długości dwóch boków.

Pierwszą z długości jest długość podstawy prostokąta (taka sama dla każdego).

Otrzymujemy ją, dzieląc długość całego przedziału przez liczbę prostokątów. Zapiszmy to w formie wzoru:

$$d = \frac{b-a}{n}$$

Gdzie:

a – początek przedziału

b – koniec przedziału

n – liczba prostokątów

10

Drugą wartością jest długość wysokości każdego z prostokątów. Jak już wiemy, istnieje kilka różnych sposobów na jej zdefiniowanie w metodzie prostokątów. Wysokość ta może być równa wartości funkcji w lewej granicy przedziału, w prawej granicy przedziału lub w jego środku.

Zapiszmy to w formie wzoru. Niech h_i oznacza długość wysokości i -tego prostokąta;
 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Dla szacowania z lewej strony:

$$h_i = |f(a + (i - 1)d)|$$

Dla szacowania z prawej strony:

$$h_i = |f(a + id)|$$

Dla szacowania z punktem środkowym:

$$h_i = \left| f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)d\right) \right|$$

Możemy wprowadzić wzór na pole i -tego prostokąta:

$$P_i = h_i \cdot d$$

12

A także zapisać ostateczny wzór na pole powierzchni pod wykresem:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i$$

Po podstawieniu wcześniej wyprowadzonych wielkości:

Dla szacowania z lewej strony:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + (i-1) \frac{b-a}{n}\right)$$

Dla szacowania z prawej strony:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

Dla szacowania z punktem środkowym:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right)$$

Dodając pola wszystkich prostokątów, otrzymamy przybliżoną wartość pola obszaru ograniczonego wykresem. W przypadku omawianego przykładu będzie to:

Dla szacowania z lewej strony:

$$P \approx 6,4375$$

Dla szacowania z prawej strony:

$$P \approx 8,6875$$

Dla szacowania z punktem środkowym:

$$P \approx 7,46875$$

14

Rzeczywista wartość pola powierzchni obszaru ograniczonego wykresem funkcji wyliczona dokładnie metodami matematycznymi wynosi:

$$P = 7,5$$

15

Ponieważ funkcja w całym przedziale, w którym liczyliśmy pole pod wykresem, była rosnąca, metoda szacowania z lewej strony zaniżyła wynik, a metoda szacowania z prawej strony go zawyżyła. W przypadku, gdyby funkcja była malejąca, byłoby na odwrót. Największą dokładność otrzymaliśmy w przypadku metody z punktem środkowym. Aby rzetelnie porównać omówione sposoby, należałoby jednak zastosować dużo większą liczbę prostokątów. W większości przypadków wybór punktu środkowego będzie jednak najlepszym rozwiązaniem w przypadku metody prostokątów.

16

Sposobów wyboru wysokości prostokątów może być wiele, jednak omówiliśmy najczęściej stosowane z nich. Możemy wyróżnić jeszcze dwie ciekawe i przydatne metody:

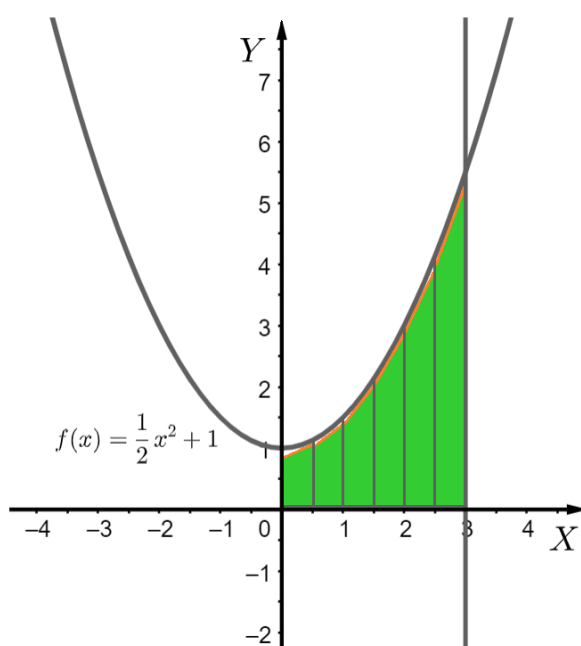
Szacowanie z niedomiarem – wybieramy lewą lub prawą krawędź w zależności od tego, która da mniejszy wynik:

$$h_i = \min(|f(a + (i - 1)d)|, |f(a + id)|)$$

Szacowanie z nadmiarem – wybieramy lewą lub prawą krawędź w zależności od tego, która da większy wynik:

$$h_i = \max(|f(a + (i - 1)d)|, |f(a + id)|)$$

Metody te przydają się do analizy algorytmów. Pozwalają określić maksymalny lub minimalny błąd, który można uzyskać, stosując metodę prostokątów.



17

Szacowanie wartości pola pod wykresem funkcji – metoda trapezów

Metoda trapezów różni się tylko nieznacznie od omówionych metod prostokątów.

Zaczynamy od ustalenia, na ile trapezów podzielimy pole powierzchni obszaru ograniczonego wykresem. Im więcej trapezów zastosujemy, tym dokładniejszy wynik otrzymamy. Jednocześnie trzeba pamiętać, że tym samym zwiększymy czas obliczeń.

W metodzie prostokątów wybieraliśmy, czy prostokąty będą tak wysokie jak ich lewy lub też prawy bok. W tym przypadku lewy i prawy

bok trapezu kończą się tam, gdzie napotykają wykres funkcji.

18

Jak obliczyć pola trapezów?

Obliczenie pola każdego z trapezów wymaga znalezienia długości wysokości oraz dwóch podstaw.

Wysokością będzie w tym przypadku długość podprzedziału, oznaczana wcześniej symbolem d . Podobnie jak w metodzie prostokątów wartość ta będzie dla każdego trapezu taka sama.

$$d = \frac{b-a}{n}$$

19

20

Długości podstaw i -tego trapezu mogą zostać wyrażone przez wartość funkcji na krańcach danego podprzedziału. Niech $h_i^{(1)}$ oznacza długość lewej, a $h_i^{(2)}$ prawej podstawy. Zgodnie z wcześniejszą numeracją $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$h_i^{(1)} = |f(a + (i-1)d)|$$

$$h_i^{(2)} = |f(a + id)|$$

W tym momencie możemy już wyprowadzić wzór na pole i -tego trapezu:

21

$$P_i = \frac{(h_i^{(1)} + h_i^{(2)}) \cdot d}{2}$$

22

Przybliżenie pola powierzchni pod wykresem funkcji jest sumą pól wszystkich prostokątów:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i$$

W przypadku metody trapezów będzie to zatem:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{(f(a + (i-1) \cdot \frac{b-a}{n}) + f(a + i \cdot \frac{b-a}{n})) \cdot \frac{b-a}{n}}{2}$$

23

W przypadku omawianej w tym przykładzie funkcji oraz liczby trapezów $n = 6$ oszacowanie pola wynosi:

$$P \approx 7,5625$$

Dokładność tej metody jest w tym przypadku większa niż metod prostokątów z lewej oraz prawej strony, porównywalna z metodą prostokątów z punktem środkowym. Z reguły jednak metoda ta powinna być dokładniejsza niż metody prostokątów. Należy pamiętać jednak, aby przy implementacji wyprowadzonych wzorów, przy każdym przetwarzanym trapezie zapisywać w pamięci długość jego prawej podstawy, ponieważ jest ona również długością lewej podstawy następnego trapezu. W przeciwnym wypadku złożoność metody trapezów zwiększa się dwukrotnie.

Ćwiczenie 1

Przygotuj krótkie charakterystyki poznanych metod obliczania pola powierzchni obszaru ograniczonego wykresem funkcji. Wyjaśnij, w jakich sytuacjach najlepiej sprawdzają się dane metody.

Ćwiczenie 2

Poznane w prezentacji wzory traktują pole pod osią OX jako pole zorientowane ujemnie. Przekształć je na wzory traktujące pole pod osią OX jako pole zorientowane dodatnio.

Ćwiczenie 3

Na przedstawionej symulacji interaktywnej przeanalizuj zaprezentowane metody obliczania przybliżonej wielkości pola powierzchni obszarów zamkniętych. Porównaj – pod względem dokładności – obie metody.

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Polecenie 2

Przygotuj notatkę ze swoimi spostrzeżeniami dotyczącymi metod liczenia ukazanych w symulacji.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



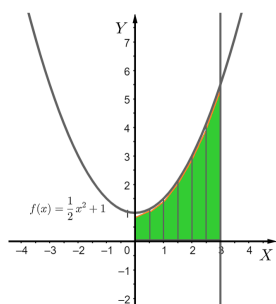
Wskaż zdanie prawdziwe w przypadku funkcji liniowej w przedziale $\langle a, b \rangle$, gdzie $a \geq 0$ i $b \geq 0$.

- ☐ Im więcej dokonamy podziałów zakresu, tym większa złożoność pamięciowa.
- ☐ W przypadku funkcji liniowej w przedziale dodatnim metoda prostokątów z punktem środkowym daje identyczny wynik, co metoda prostokątów.
- ☐ Metoda trapezów zawsze jest dokładniejsza niż metoda prostokątów.
- ☐ Metoda trapezów ma złożoność obliczeniową wyższą niż metoda prostokątów.

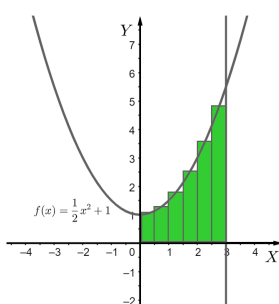
Ćwiczenie 2



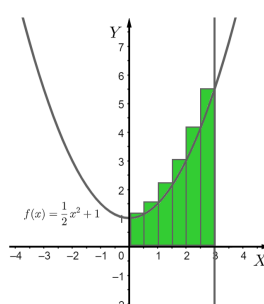
Dopasuj metody do odpowiednich ilustracji.



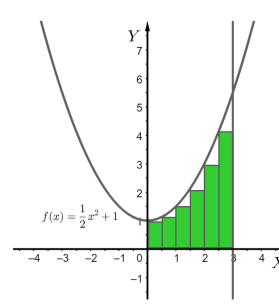
Metoda prostokątów — szacowanie z prawej strony



Metoda prostokątów — szacowanie z lewej strony



Metoda trapezów



Metoda prostokątów — szacowanie z punktem środkowym

Ćwiczenie 3



Uzupełnij tekst.

Pole pod wykresem funkcji to termin . Poprawnym określeniem jest pole ograniczone wykresem funkcji oraz w zadanym . W zależności od potrzeb pole możemy traktować jako zorientowane , jeśli leży nad lub pod osią OX . Istnieją obliczania pola ograniczonego wykresem funkcji, jednak są one skomplikowane. Stosowane mogą być wówczas , które potrafią szacować pole ograniczone wykresem funkcji, wykorzystując figury na wiele .

dodatnio lub ujemnie

nieprecyzyjny

metody matematyczne

metody numeryczne

osią OX

prostokątów lub trapezów

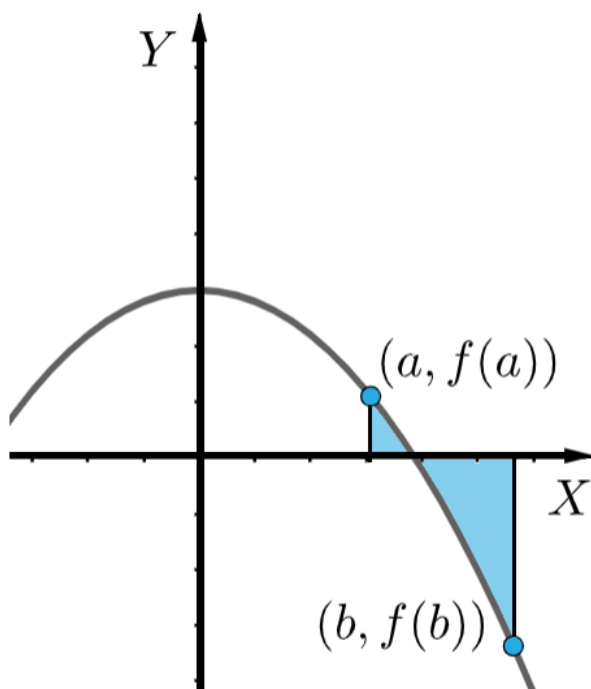
przedziale

podział

Ćwiczenie 4



W metodzie trapezów może zdarzyć się sytuacja ukazana na rysunku, na którym pokazany został i -ty „trapez”. Przyjmując oznaczenia takie jak na rysunku, wskaż zdania prawdziwe.

☐

Możliwe jest obliczenie pól obu trójkątów, a następnie potraktowanie jednego jako pole zorientowane dodatnio, a drugiego jako pole zorientowane ujemnie.

☐

Nie ma możliwości obliczenia pól obu trójkątów osobno. Jeśli chcemy interpretować pole jako zorientowane dodatnio lub ujemnie, musimy wybrać czy pole danej figury będzie zorientowane dodatnio, czy ujemnie.

☐

Suma pól obu utworzonych trójkątów będzie prawidłowa, jeśli obliczymy ją według wzoru $P_i = \left| \frac{(f(a)+f(b)) \cdot (b-a)}{2} \right|$

☐

Konieczne jest przeszacowanie pola zaznaczonej figury.

Ćwiczenie 5



Dana jest dodatnia funkcja rosnąca. Chcemy obliczyć pole pod jej wykresem. Która z wymienionych metod na pewno zaniży jego wartość?

- ☐ Metoda prostokątów – szacowanie z prawej strony
- ☐ Metoda trapezów
- ☐ Metoda prostokątów – szacowanie z lewej strony
- ☐ Metoda prostokątów – szacowanie z punktem środkowym

Ćwiczenie 6



Oszacuj metodą prostokątów z szacowaniem lewostronnym pole powierzchni ograniczonej wykresem funkcji $f(x) = x^2$ oraz osią OX na przedziale od 0 do 2, wykorzystując 4 prostokąty. Do każdego pola wpisz dokładny wynik w formie dziesiętnej, część ułamkową oddzielając od części całkowitej znakiem przecinka.

Pole pierwszego prostokąta:

$$P_1 = \text{[input box]}$$

Pole drugiego prostokąta:

$$P_2 = \text{[input box]}$$

Pole trzeciego prostokąta:

$$P_3 = \text{[input box]}$$

Pole czwartego prostokąta:

$$P_4 = \text{[input box]}$$

Pole całkowite:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \text{[input box]}$$

Ćwiczenie 7



Oszacuj metodą trapezów pole powierzchni ograniczonej wykresem funkcji $f(x) = x^2$ oraz osią OX na przedziale od 0 do 2, wykorzystując 4 trapezy. Do każdego pola wpisz dokładny wynik w formie dziesiętnej, część ułamkową oddzielając od części całkowitej znakiem przecinka.

Pole pierwszego trapezu:

$$P_1 = \text{[input box]}$$

Pole drugiego trapezu:

$$P_2 = \text{[input box]}$$

Pole trzeciego trapezu:

$$P_3 = \text{[input box]}$$

Pole czwartego trapezu:

$$P_4 = \text{[input box]}$$

Pole całkowite:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \text{[input box]}$$

Ćwiczenie 8



Wiedząc, że pole powierzchni ograniczone wykresem funkcji $f(x) = x^2$ oraz osią OX w przedziale od 0 do 2 wynosi dokładnie $2\frac{2}{3}$, oceń która z metod lepiej poradziła sobie z oszacowaniem powierzchni obszaru.

☐ Metoda prostokątów z szacowaniem lewostronnym.

☐ Metoda trapezów.

Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Obliczanie przybliżonej wielkości pola obszarów zamkniętych

Grupa docelowa:

Liceum ogólnokształcące i technikum, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

4) ilustruje i wyjaśnia rolę pojęć, obiektów i operacji matematycznych w projektowaniu rozwiązań problemów informatycznych i z innych dziedzin, posługuje się pojęciem logarytmu;

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) wykorzystuje znane sobie algorytmy przy rozwiązywaniu i programowaniu rozwiązań następujących problemów:

e) badania przecinania się odcinków, przynależności punktu do trójkąta,

f) obliczanie przybliżonej wielkości pola obszarów zamkniętych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Wyjaśnisz, jak oszacować pole pod wykresem dowolnej funkcji.
- Scharakteryzujesz metody numeryczne pozwalające na przybliżenie wartości pola pod wykresem funkcji.
- Przeanalizujesz różnice między metodą prostokątów a metodą trapezów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimedium i ćwiczeń interaktywnych;
- śniegowa kula;
- ćwiczenia praktyczne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Obliczanie przybliżonej wielkości pola obszarów zamkniętych”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.
2. **Rozpoznanie wiedzy uczniów.** Nauczyciel prosi wybranego ucznia lub uczniów o przedstawienie sytuacji problemowej związanej z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Nauczyciel ocenia, na podstawie informacji na platformie, stan przygotowania uczniów do zajęć. Jeżeli jest ono niewystarczające, prosi wybraną osobę o przedstawienie najważniejszych informacji z sekcji „Przeczytaj”.
2. **Praca z multimediami.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Symulacja interaktywna”. Uczniowie analizują treść prezentacji i wynotowują najważniejsze informacje w niej zawarte. Następnie wykonują Ćwiczenie 1. W kolejnym kroku łączą się w pary, porównują swoje zapiski i opracowują wspólną wersję. Następnie konsultują się z inną parą i jeśli zajdzie taka potrzeba, modyfikują swoje notatki.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1-3 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W kolejnym etapie uczniowie dobierają się w pary i wykonują ćwiczenia nr 4-5 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel ponownie wyświetla na tablicy temat i cele lekcji zawarte w sekcji „Wprowadzenie”. W kontekście ich realizacji następuje omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązywania ćwiczeń.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia 6-9 z sekcji „Sprawdź się”.

Wskazówki metodyczne:

- Uczniowie mogą wykorzystać multimediami w sekcji „Symulacja interaktywna” do przygotowania się do lekcji powtórkowej.