



Obliczanie granic ciągów będących wynikiem działań na ciągach rozbieżnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Obliczanie granic ciągów będących wynikiem działań na ciągach rozbieżnych

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W materiale pokażemy, jak obliczać granice ciągów, gdy pojawia się symbol nieoznaczony. Szczególnie zwrócimy uwagę na przykłady, w których występuje symbol $\infty - \infty$.

Pokażemy także zastosowania twierdzenia Stolza do obliczania granic ciągów, we wzorach których występuje sumy wyrażeń.

Twoje cele

- Nauczysz się obliczać granice ciągów, w których występują symbole nieoznaczone.
- Poznasz zastosowania twierdzenia Stolza.

Przeczytaj

Na lekcji pokażemy kilka przykładów ciągów, dla których obliczanie granic powoduje pojawienie [symbolu nieoznaczonego](#).

Granicy wyrażeń takich postaci nie można obliczyć, mając tylko informację o granicach ciągów, które składają się na całe wyrażenie. Do wyznaczania granic takich ciągów będziemy stosować przekształcenia wzorów ciągów z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.

Wykorzystywać także będziemy poniższe twierdzenie, które pozostawiamy bez dowodu.

Twierdzenie: o odwrotności ciągu rozbieżnego do nieskończoności

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ lub $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$, to $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Ważne!

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Jako przykład możemy podać ciąg $x_n = (-1)^n \cdot n$.

Ciąg $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ jest zbieżny do 0, ale ciąg (x_n) jest rozbieżny, lecz nie jest rozbieżny ani do $-\infty$ ani do $+\infty$.

Przykład 1

Obliczymy granicę ciągu $x_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$.

Rozwiązanie

Ciągi $a_n = \sqrt{n+3}$ i $b_n = \sqrt{n}$ są ciągami rozbieżnymi do $+\infty$. Zatem przy obliczaniu granicy mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\infty - \infty$.

Przekształcimy wzór ciągu (x_n) rozszerzając ułamek $\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{1}$ przez wyrażenie $\sqrt{n+3} + \sqrt{n}$. Dlaczego w ten sposób rozszerzamy?

Oczywiście wartość ułamka się nie zmieni, lecz w liczniku wykorzystamy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów do zapisania wyrażenia już bez pierwiastków.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3-n}{(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}.$$

Ponieważ ciągi $a_n = \sqrt{n+3}$ i $b_n = \sqrt{n}$ są ciągami rozbieżnymi do $+\infty$, zatem ciąg $a_n + b_n = \sqrt{n+3} + \sqrt{n}$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Na podstawie twierdzenia ciąg $c_n = \frac{3}{(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}$ jest zbieżny do 0, a zatem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) = 0.$$

Przykład 2

Obliczymy granicę ciągu $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n)$.

Rozwiązanie

Ciągi $a_n = \sqrt{n^2 + 3n}$ i $b_n = n$ są ciągami rozbieżnymi do $+\infty$. Zatem przy obliczaniu granicy mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\infty - \infty$.

Przekształcimy wzór ciągu rozszerzając ułamek $\frac{\sqrt{n^2+3n}-n}{1}$ przez $\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{\sqrt{n^2+3n}+n}$

i wykorzystując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że zarówno licznik jak i mianownik zmierza do $+\infty$, czyli pojawia się symbol nieoznaczony $\frac{\infty}{\infty}$.

Wobec tego rozszerzymy ułamek przez wyrażenie $\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \frac{3}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{2}.$$

Przykład 3

Obliczymy granicę: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3+4n^2} - n)$.

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednich przykładach, przy obliczaniu granicy mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\infty - \infty$. Zatem będziemy przekształcać wzór ciągu do innej postaci.

Wykorzystamy wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów:

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$. Otrzymujemy wówczas:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3 + 4n^2} - n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^3 + 4n^2} - n) \left((\sqrt[3]{n^3 + 4n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 + 4n^2} \cdot n + n^2 \right)}{(\sqrt[3]{n^3 + 4n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 + 4n^2} \cdot n + n^2} = \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^3 + 4n^2})^3 - n^3}{(\sqrt[3]{n^3 + 4n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 + 4n^2} \cdot n + n^2} = \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4n^2 - n^3}{(\sqrt[3]{n^3 + 4n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 + 4n^2} \cdot n + n^2} = \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2 \left(\left(\sqrt[3]{1 + \frac{4}{n}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{4}{n}} + 1 \right)}.\end{aligned}$$

Ponieważ otrzymaliśmy symbol nieoznaczony $\frac{\infty}{\infty}$, zatem wyłączamy przed nawias wyrażenie n^2 i je skracamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{4}{n}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{4}{n}} + 1} = \frac{4}{3}.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 4n^2} - n) = \frac{4}{3}.$$

Przykład 4

Obliczymy granicę: $a_n = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$.

Rozwiązanie

Składniki sumy zmierzają do 0, ale liczba składników rośnie. W istocie mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym $0 \cdot \infty$. Konieczne będzie przekształcenie wzoru ciągu.

Podobnie jak w poprzednich przykładach rozszerzymy ułamki i skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} &= \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1} - \sqrt{2})}{(\sqrt{1} + \sqrt{2})(\sqrt{1} - \sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} + \dots + \frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})} = \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1} - \sqrt{2})}{1 - 2} + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2 - 3} + \dots + \frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})}{(n-1) - n} =\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \right].$$

Zauważmy, że $\sqrt{2}$ z pierwszego nawiasu redukuje się z $\sqrt{2}$ z drugiego nawiasu, $\sqrt{3}$ z drugiego nawiasu redukuje się z $\sqrt{3}$ z trzeciego nawiasu i tak dalej. Sumę tego typu często nazywamy: sumą teleskopową. Pozostaną tylko dwa wyrażenia: $\sqrt{n}$ oraz $-\sqrt{1}$.

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - 1) = +\infty.$$

Słownik

symbole nieoznaczone

wyrażenie algebraiczne, które nie ma sensu liczbowego, będące umownym sposobem zapisu przy obliczaniu granic ciągów, których wprost nie możemy obliczyć; przy obliczaniu granic ciągów najczęściej pojawiają się symbole: $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^∞

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z galerią zdjęć interaktywnych. Zostało tam przedstawione twierdzenie Stolza, które ma zastosowanie w przypadku pewnych ciągów o wzorze zawierających sumy elementów.

Polecenie 2

Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uzupełnij lukę, wstawiając poprawną odpowiedź.

Granica ciągu $a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$ jest .

Ćwiczenie 2



Połącz w pary ciąg i jego granicę.

$$b_n = \sqrt{2n^2 + 6n} - \sqrt{2n}$$

 2

$$b_n = \sqrt{n^2 - n} - n$$

 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$b_n = \sqrt{4n^2 + 3} - 2n$$

 0

$$b_n = \sqrt{n^2 + 4n} - n$$

 $-\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Granicą ciągu $c_n = n(\sqrt[3]{n^3+n} - n)$ jest:

☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ 1

Ćwiczenie 4



Wskaż wszystkie ciągi o granicy 0.

☐ $d_n = \sqrt{n^2 + 100} - \sqrt{n^2 - 100}$

☐ $d_n = \sqrt{n^2 + 100n} - n$

☐ $d_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n$

☐ $d_n = \sqrt{n^2 + 1000} - n$

☐ $d_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$

☐ $d_n = \sqrt[3]{n^3 + n} - n$

Ćwiczenie 5



Wskaż granicę ciągu $e_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} \right)$. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 2

☐ $+\infty$

☐ 1

☐ 0

Ćwiczenie 6



Wskaż granicę ciągu $f_n = \sqrt[3]{n(n+1)^2} - \sqrt[3]{n(n-1)^2}$. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $\frac{3}{2}$

☐ $+\infty$

☐ 1

☐ $\frac{4}{3}$

Ćwiczenie 7



Połącz w pary ciąg i jego granicę. Możesz wykorzystać do szybkich obliczeń twierdzenie Stolza.

$$g_n = \frac{7+13+\dots+(6n+1)}{1+2+\dots+(n+7)}$$

$$6$$

$$g_n = \frac{3+5+\dots+(2n+1)}{4+9+\dots+(5n-1)}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$g_n = \frac{9+13+\dots+(5n+4)}{1+7+\dots+(6n-5)}$$

$$\frac{5}{6}$$

Ćwiczenie 8



Wskaż $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4+3^4+\dots+(2n+1)^4}{2^4+4^4+\dots+(2n)^4}$.

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $+\infty$

☐ 2

☐ 1

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obliczanie granic ciągów będących wynikiem działań na ciągach rozbieżnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1n$, an oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

Cele operacyjne:

- oblicza granice ciągów, w których występują symbole nieoznaczone,
- stosuje twierdzenia Stolza od obliczania granic ciągów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Obliczanie granic ciągów będących wynikiem działań na ciągach rozbieżnych” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach metodą tekstu przewodniego analizują treści z sekcji „Przeczytaj”. Po zapoznaniu się z każdym przykładem zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Nauczyciel wyjaśnia materiał przedstawiony w „Galerii zdjęć interaktywnych”. Następnie uczniowie na forum klasy rozwiązują polecenia z nią związane.
3. Uczniowie indywidualnie rozwiązują wskazana przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Obliczanie granic ciągów będących wynikiem działań na ciągach rozbieżnych” i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli). Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Co to znaczy, że ciąg jest rozbieżny?](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Obliczanie granic ciągów będących wynikiem działań na ciągach rozbieżnych”.