

## Iloczyn wielomianów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wielomiany jednej zmiennej są zapisywane za pomocą odpowiednich wyrażeń algebraicznych. W matematyce wyższej tworzą strukturę zwaną *pierścieniem* – mają wiele własności analogicznych do odpowiednich własności liczb całkowitych (które również tworzą strukturę *pierścienia*). Te pojęcia wykraczają poza program nauczania matematyki w szkole. Analizując kolejne lekcje warto jednak o tym pamiętać i szukać analogii między liczbami całkowitymi i wielomianami.

W zbiorze liczb całkowitych mamy zdefiniowane dwa podstawowe działania – dodawanie i mnożenie. Mają one pewne własności. Dla mnożenia:

- przemienność  $a \cdot b = b \cdot a$ ,
- łączność  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ,
- istnienie elementu neutralnego, czyli jedynki  $a \cdot 1 = a$ .

Mnożenie wielomianów ma analogiczne własności. W tym materiale poznamy niektóre z nich.

#### Twoje cele

- Poznasz metody mnożenia wielomianów jednej zmiennej.

- Pomnożysz wielomiany.
- Odkryjesz i zredagujesz własność opisującą związek między stopniami dwóch wybranych wielomianów i stopniem wielomianu uzyskanego jako ich iloczyn.

# Przeczytaj

---

## Definicja: Iloczyn wielomianów

Dane są wielomiany  $F(x)$  i  $G(x)$ .

**Iloczynem wielomianów**  $F(x)$  i  $G(x)$  nazywamy taki wielomian  $W(x)$ , że dla każdej liczby  $a \in \mathbb{R}$  spełniony jest warunek:

$$W(a) = F(a) \cdot G(a)$$

Iloczynem dowolnego wielomianu  $F(x)$  przez wielomian zerowy jest wielomian zerowy.

## Przykład 1

Pokażemy, jak wyznaczyć iloczyn wielomianu  $W(x) = 5x^3 + 4x^2 - 2x + 9$  przez wielomian  $P(x) = 2x^2 - 13x - 7$ .

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DK9CfoGxf>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący iloczynu wielomianów.

---

## Własność: Stopień iloczynu wielomianów

- Jeżeli  $W(x)$  i  $P(x)$  nie są wielomianami zerowymi, to  $\deg(W(x) \cdot P(x)) = \deg(W(x)) + \deg(P(x))$ .
- Jeżeli  $W(x)$  lub  $P(x)$  jest wielomianem zerowym, to  $W(x) \cdot P(x)$  jest wielomianem zerowym.

## Przykład 2

Dany jest wielomian ósmego stopnia  $F(x) = 2x^8 - 3x^5 + 7x^3 + 5$ .

- Dla wielomianu siódmego stopnia  $G(x) = 5x^7 - 3x^2 + x + 4$  iloczyn  $F(x) \cdot G(x) = 10x^{15} - 15x^{12} + 29x^{10} + 2x^9 + 8x^8 + 34x^7 - 3x^6 - 33x^5 + 7x^4 + 28x^3 - 15x^2 + 5x + 20$  będzie wielomianem stopnia 15.
- Dla wielomianu drugiego stopnia  $G(x) = -3x^2 + 2x + 4$  iloczyn  $F(x) \cdot G(x) = -6x^{10} + 4x^9 + 8x^8 + 9x^7 - 6x^6 - 33x^5 + 14x^4 + 28x^3 - 15x^2 + 10x + 20$  będzie wielomianem stopnia 10.
- Dla wielomianu zerowego  $G(x)$  iloczyn  $F(x) \cdot G(x)$  będzie wielomianem zerowym.

W niektórych sytuacjach w obliczaniu iloczynu wielomianów można posłużyć się wzorami skróconego mnożenia.

### Przykład 3

Obliczmy iloczyn  $(3x^7 - 2x^5 + 4) \cdot (3x^7 - 2x^5 + 4)$ .

- Zauważmy, że możemy go zapisać jako  $(3x^7 - 2x^5 + 4)^2$ .
- Możemy zatem zastosować wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy trzech składników:  
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$
- Uzyskamy  
$$9x^{14} + 4x^{10} + 16 - 12x^{12} - 16x^5 + 24x^7.$$
- Po uporządkowaniu mamy  
$$9x^{14} - 12x^{12} + 4x^{10} + 24x^7 - 16x^5 + 16.$$

### Przykład 4

Obliczmy iloczyn  $(3x^7 - 2x^5 + 4) \cdot (3x^7 + 2x^5 + 4)$ .

- Po pogrupowaniu wewnątrz nawiasów możemy go zapisać w postaci  
$$((3x^7 + 4) - 2x^5) \cdot ((3x^7 + 4) + 2x^5).$$
- Daje to możliwość zastosowania wzoru skróconego mnożenia  
$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$
- Uzyskamy  
$$(3x^7 + 4)^2 - 4x^{10} = 9x^{14} + 24x^7 + 16 - 4x^{10} = 9x^{14} - 4x^{10} + 24x^7 + 16.$$

W kolejnym przykładzie zaprezentujemy metodę obliczenia iloczynu wielomianów z pomocą tabelki. Jest przydatna zwłaszcza w sytuacji, gdy mnożone wielomiany zawierają więcej składników.

### Przykład 5

Obliczmy iloczyn  $(2x^4 - 3x^3 + 5x - 1) \cdot (-3x^2 + 7x - 9)$ .

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DK9CfoGxf>

Film nawiązujący do treści dotyczący iloczynu wielomianów.

---

Szukany iloczyn wynosi  $-6x^6 + 23x^5 - 39x^4 + 12x^3 + 38x^2 - 52x + 9$ .

# Słownik

## iloczyn wielomianów

dla wielomianów  $F(x)$  i  $G(x)$  to wielomian  $W(x)$  taki, że dla każdej liczby  $a \in \mathbb{R}$  spełniony jest warunek:

$$W(a) = F(a) \cdot G(a)$$

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady mnożenia wielomianów zaprezentowane w filmie samouczku.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DKINXrOtZ>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej iloczynu wielomianów.

---

## Polecenie 2



Oblicz wybraną metodą iloczyn wielomianów

a)  $(3x^2 - x + 7) \cdot (3x^2 + x + 7)$ ,

b)  $(x^4 - 5x^2 + 7x - 11) \cdot (x^3 - 2x - 9)$ .

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8

Wykonaj mnożenie wypełniając tabelkę. Zapisz wielomian uzyskany jako iloczyn.  
Sprawdź poprawność swojej odpowiedzi.



Ćwiczenie 9



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Michał Niedźwiedź

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Iloczyn wielomianów

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- opisuje metody mnożenia wielomianów jednej zmiennej;
- analizuje własność opisującą związek między stopniami dwóch wybranych wielomianów i stopniem wielomianu uzyskanego jako ich iloczyn.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa;
- dyskusja.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

- Nauczyciel przedstawia temat oraz cele lekcji, a następnie wraz z uczniami określa kryteria sukcesu.

### **Faza realizacyjna:**

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie ćwiczeń, które przygotowali w domu (ćwiczenia oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie samodzielnie zapoznają się treścią materiału w filmie samouczku, następnie rozwiązują ćwiczenia znajdujące się w Poleceniu 2. Wyniki i ewentualne wątpliwości omawiają na forum klasy.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-8 w sekcji „Sprawdź się” na czas. Grupa uczniów, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza tłumaczy na forum klasy ewentualne wątpliwości pozostałym uczniom. Nauczyciel może nagrodzić wygranych uczniów ocenami za aktywność.

### **Faza podsumowująca:**

- Nauczyciel inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie lekcji i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

### **Praca domowa:**

- Uczniowie rozwiązują ćwiczenie 9 z sekcji „Sprawdź się”.

### **Materiały pomocnicze:**

- [Mnożenie wielomianów](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Film samouczek można wykorzystać jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy o wielomianach. Może być też wykorzystany na zajęciach poświęconych przekształcaniu wyrażeń algebraicznych.