



Granice funkcji elementarnych w nieskończoności

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Granice funkcji elementarnych w nieskończoności

Źródło: dostępny w internecie: maxpixels.net, domena publiczna.

Problem nieskończoności jako pierwszy naukowo ujął Arystoteles, rozróżniając nieskończoność potencjalną i nieskończoność aktualną. Symbol nieskończoności został zaproponowany przez Johna Wallisa, angielskiego matematyka, kryptologa i teologa, w traktacie z 1655 r. *De sectionibus conicis*. Prawdopodobnie zainspirowała go mała grecka litera ω , która była metaforą końca i ostateczności.

W tym materiale wyznaczymy granice funkcji w nieskończoności.

Twoje cele

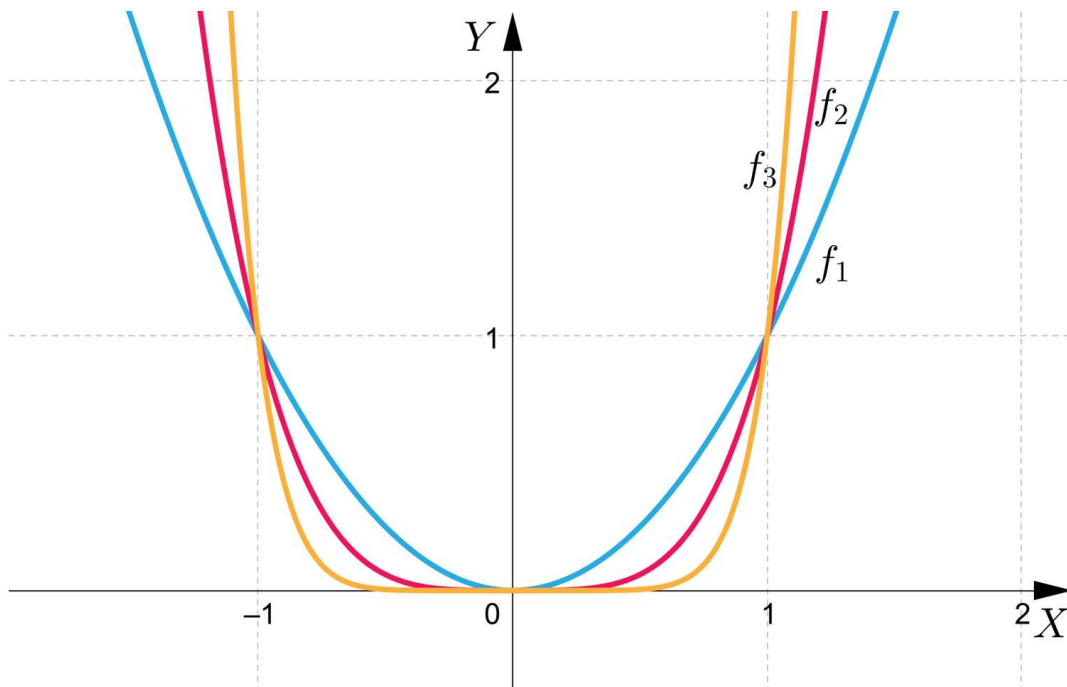
- Wyznaczysz granice funkcji elementarnych w nieskończoności.
- Utrwalisz umiejętność obliczania granic funkcji w nieskończoności.
- Wykorzystasz granice funkcji w nieskończoności do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

W tym materiale, analizując wykresy wybranych funkcji elementarnych, określimy ich granice w nieskończoności a następnie wykorzystamy poznane wiadomości do obliczenia granic innych funkcji.

Niech: $f(x) = x^{2n}$, $D_f = \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}_+$.

Wykresy funkcji $f(x) = x^{2n}$, gdzie $D_f = \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}_+$, wyglądają następująco:



Widzimy, że gdy:

1. argumenty x dążą do plus nieskończoności, to wartości funkcji też dążą do plus nieskończoności, co zapisujemy następująco:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n} = +\infty,$$

2. argumenty x dążą do minus nieskończoności, to wartości funkcji dążą do plus nieskończoności, co zapisujemy następująco:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty.$$

Analizowane funkcje są parzyste, więc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n} = +\infty.$$

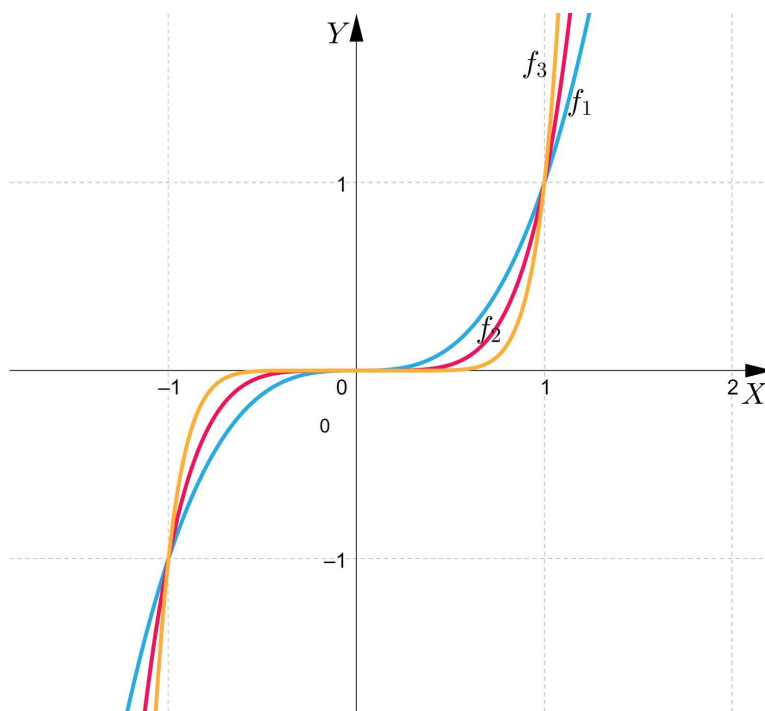
Wniosek

Jeżeli funkcja f jest postaci $f(x) = x^{2n}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}_+$, to

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n} = +\infty.$$

Niech: $f(x) = x^{2n+1}$, $D_f = \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}_+$.

Wykresy funkcji $f(x) = x^{2n+1}$, $D_f = \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}_+$ wyglądają następująco:



Na podstawie wykresów możemy stwierdzić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1} = +\infty.$$

Analizowane funkcje są nieparzyste, więc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1}.$$

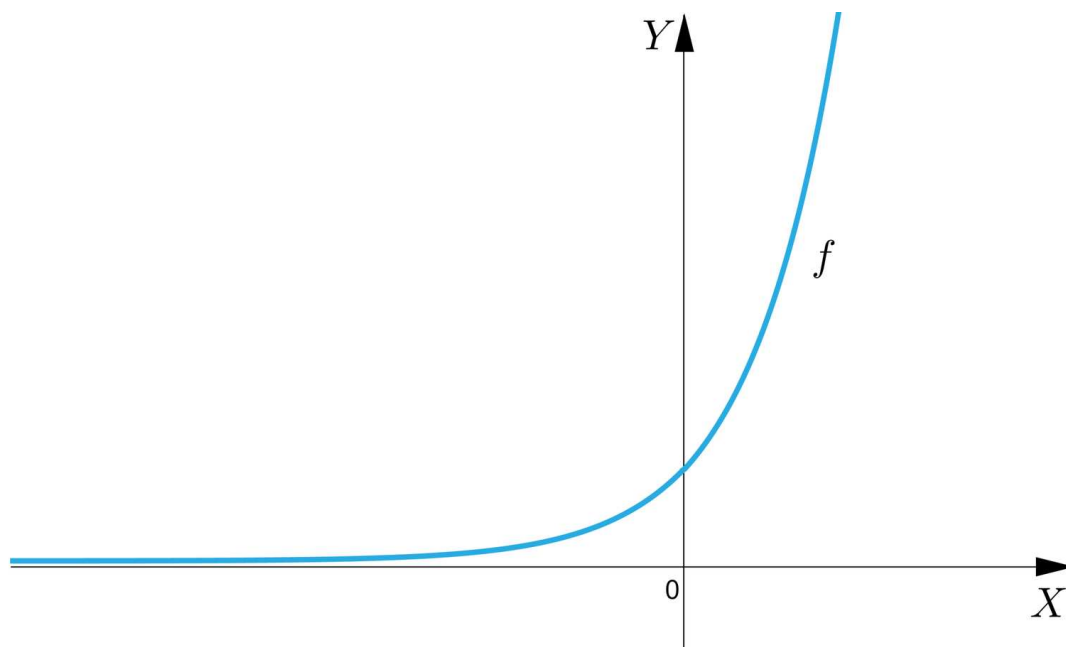
Wniosek

Jeżeli funkcja f jest postaci $f(x) = x^{2n+1}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}_+$ to $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty$ i

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1} = +\infty.$$

Niech: $f(x) = a^x$, $D_f = \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

Wykres funkcji $f(x) = a^x$, $D_f = \mathbb{R}$ dla $a \in (1, +\infty)$ wygląda następująco:



Widzimy, że gdy:

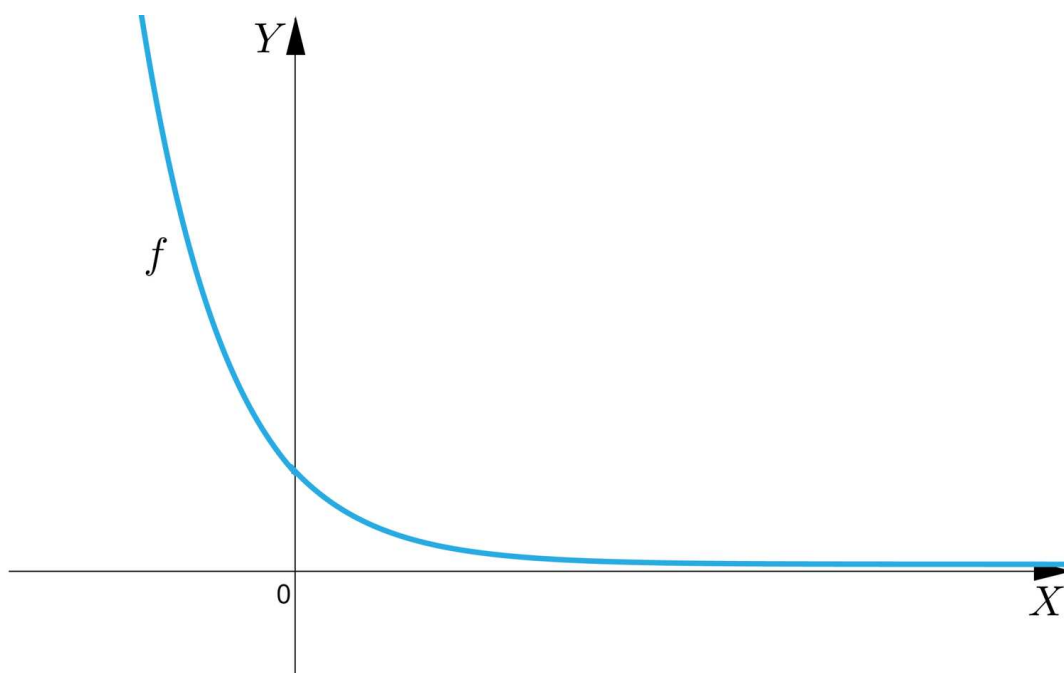
1. argumenty x dążą do plus nieskończoności, to wartości funkcji też dążą do plus nieskończoności, co zapisujemy następująco

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty,$$

2. argumenty x dążą do minus nieskończoności, to wartości funkcji zbliżają się do osi X , czyli dążą do zera, co zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

Wykres funkcji $f(x) = a^x$, $D_f = \mathbb{R}$ dla $a \in (0, 1)$ wygląda następująco:



Z wykresu odczytujemy:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$$

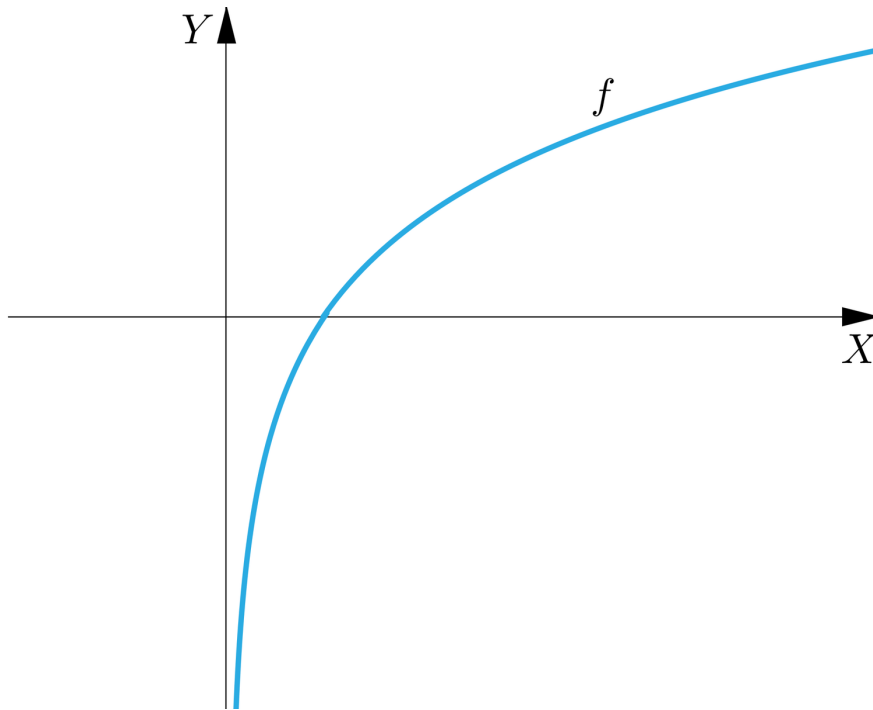
Wniosek

Jeżeli funkcja f jest postaci $f(x) = a^x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, to

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, gdy $a \in (1, \infty)$,
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, gdy $a \in (0, 1)$.

Niech $f(x) = \log_a x$, $D_f = \mathbb{R}_+$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$.

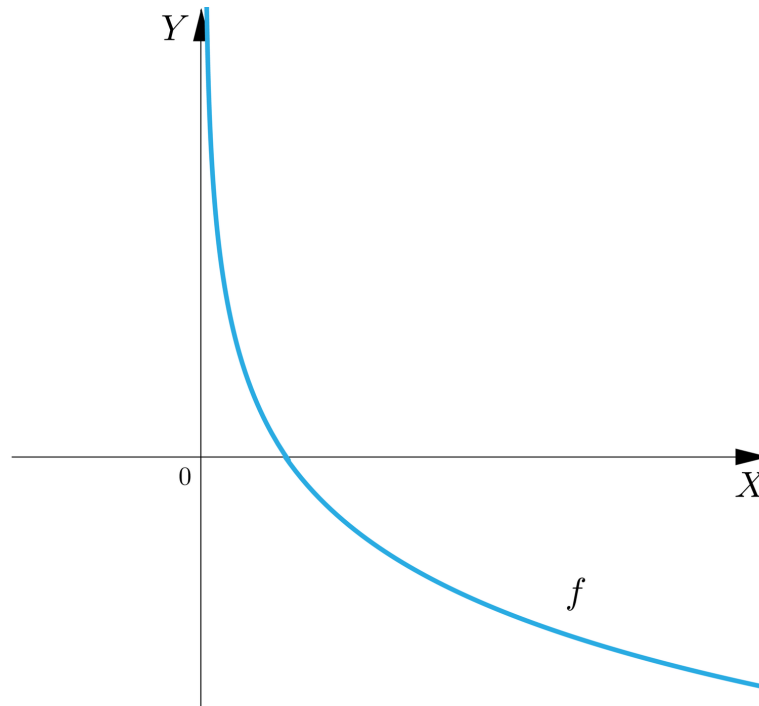
Gdy $a \in (1, +\infty)$ wykres funkcji $f(x) = \log_a x$ wygląda następująco:



Gdy argumenty x dążą do plus nieskończoności, wartości funkcji też zmierzają do plus nieskończoności: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$.

Możemy również zauważyć, że wykres tej funkcji ma asymptotę pionową prawostronną $x = 0$, ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$.

Wykres funkcji $f(x) = \log_a x$, gdy $a \in (0, 1)$:



Widzimy, że gdy $a \in (0, 1)$, to $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$.

Możemy również zauważyć, że wykres tej funkcji ma asymptotę pionową prawostronną $x = 0$ ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty$.

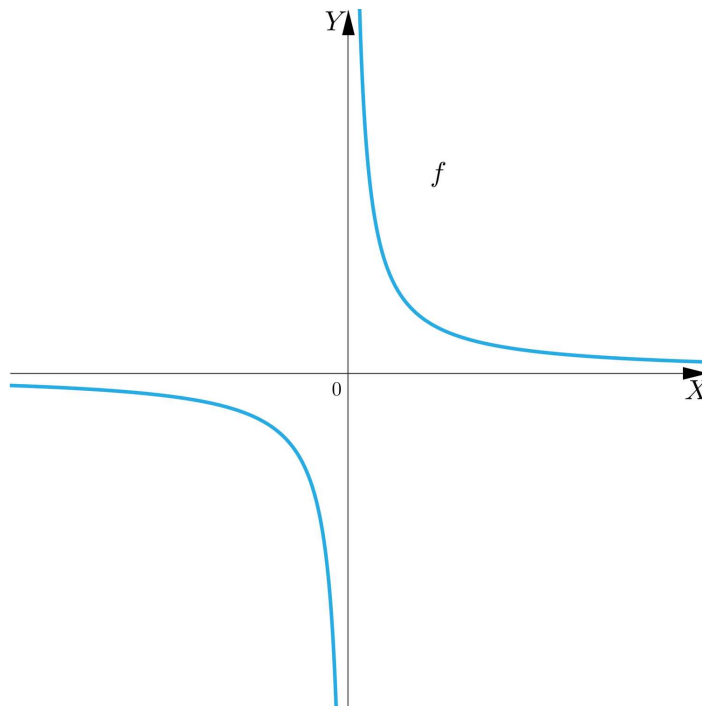
Wniosek

Jeżeli funkcja f jest postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie $x \in \mathbb{R}_+$, to

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$, gdy $a \in (1, \infty)$,
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$, gdy $a \in (0, 1)$.

Niech $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wykres tej funkcji wygląda następująco:



Możemy podać granicę tej funkcji w plus i minus nieskończoności.

Widzimy, że zarówno przy x zmierzającym do plus jak i minus nieskończoności wykres zbliża się do osi X , czyli:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Możemy również zauważyć, że wykres tej funkcji ma asymptotę pionową obustronną $x = 0$, bo istnieją granice **niewłaściwe**:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

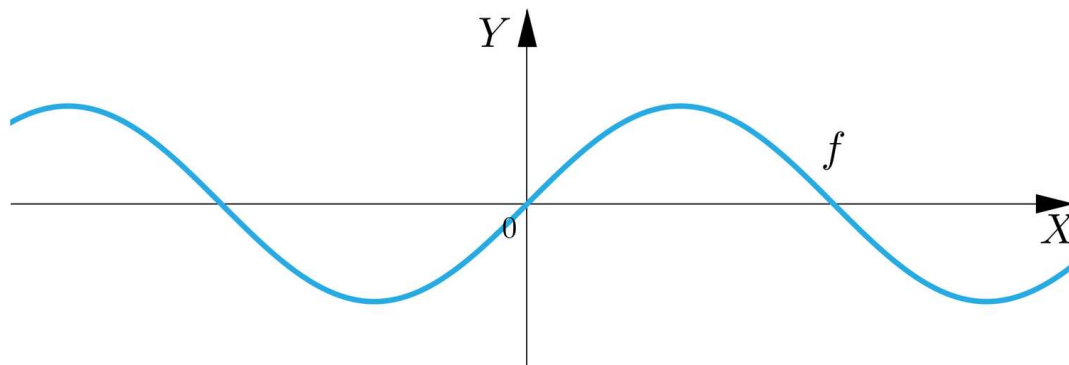
Wniosek

Jeżeli funkcja f jest postaci $f(x) = \frac{1}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Niech $f(x) = \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$

Narysujemy teraz wykres funkcji $f(x) = \sin x$



Z wykresu tej funkcji wynika, że nie istnieje granica tej funkcji w plus i minus nieskończoności. Aby to wykazać skorzystamy z definicji Heinego granicy funkcji.

Założmy, że przedział $(c, +\infty)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$, zawiera się w dziedzinie funkcji f . Granicą funkcji f w plus nieskończoności jest liczba g , jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ argumentów funkcji f rozbieżnego do $+\infty$ odpowiadający mu ciąg $\{f(x_n)\}$ wartości funkcji f jest zbieżny do liczby g .

Weźmy dwa ciągi rozbieżne do nieskończoności: $\{x_n\}$ oraz $\{x'_n\}$ określone wzorami:

$$x_n = 2\pi n \text{ oraz } x'_n = \frac{1}{2}\pi + 2\pi n.$$

Ponieważ funkcja $f(x) = \sin x$ jest funkcją okresową o okresie zasadniczym $T = 2\pi$, to $\sin(x_0 + 2\pi n) = \sin x_0$, więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2\pi n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \text{ i}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{2}\pi + 2\pi n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{2}\pi = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x'_n \text{ co oznacza, że nie istnieje granica } \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x.$$

Podobnie można wykazać, że nie istnieje granica tej funkcji, gdy $x \rightarrow -\infty$.

Przykład 1

Obliczymy granice funkcji $f(x) = -2x^4 - 3x^3 - 6$, gdy x dąży do $+\infty$ i gdy x dąży do $-\infty$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji określonej wzorem $f(x) = -2x^4 - 3x^3 - 6$ jest zbiór $\mathbb{R}$.

W przypadku, gdy liczymy granicę wielomianu, wyłączamy przed nawias zmienną w najwyższej potęgde: $-2x^4 - 3x^3 - 6 = x^4\left(-2 - \frac{3}{x} - \frac{6}{x^4}\right)$.

Zauważmy, że granica funkcji zarówno przy x dążącym do $+\infty$, jaki i przy x dążącym do $-\infty$, zależy jedynie od granicy wyrażenia $-2x^4$.

Ponadto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-2 - \frac{3}{x} - \frac{6}{x^4}\right) = -2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^4} = -2.$$

Zatem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^4 - 3x^3 - 6) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(-2 - \frac{3}{x} - \frac{6}{x^4}\right) = +\infty \cdot (-2) = -\infty.$$

Analogicznie liczymy granicę przy $x \rightarrow -\infty$.

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x^4},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 - \frac{3}{x} - \frac{6}{x^4}\right) = -2 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x^4} = -2,$$

więc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4 - 3x^3 - 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(-2 - \frac{3}{x} - \frac{6}{x^4}\right) = +\infty \cdot (-2) = -\infty.$$

Wniosek

Jeżeli f jest wielomianem stopnia parzystego zmiennej x , to zarówno przy x dążącym do $+\infty$ jak i przy x dążącym do $-\infty$ funkcja ta dąży do nieskończoności o takim znaku, jak znak współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x .

Przykład 2

Obliczymy granicę funkcji $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 4x - 2$, gdy x dąży do $+\infty$ i gdy x dąży do $-\infty$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji określonej wzorem $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 4x - 2$ jest zbiór $\mathbb{R}$.

W przypadku, gdy liczymy granicę wielomianu, wyłączamy przed nawias zmienną w najwyższej potędze: $-3x^3 + 2x^2 + 4x - 2 = x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$.

Zauważmy, że granica funkcji zarówno przy x dążącym do $+\infty$ jak i przy x dążącym do $-\infty$ zależy jedynie od granicy wyrażenia $-3x^3$.

Mamy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} = 0$$

$$\text{zatem: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-3 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} = -3$$

$$\text{i stąd: } \lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^3 + 2x^2 + 4x - 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \\ = +\infty \cdot (-3) = -\infty.$$

Liczymy teraz granicę $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x^2 + 4x - 2)$.

Ponieważ:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = -3,$$

$$\text{więc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x^2 + 4x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \\ = -\infty \cdot (-3) = +\infty.$$

Wniosek

Gdy x dąży do $+\infty$, to wielomian stopnia nieparzystego zmiennej x dąży do nieskończoności z takim znakiem, jaki ma współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x , a gdy x dąży do $-\infty$, to wielomian dąży do nieskończoności ze znakiem przeciwnym do znaku współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x .

Przykład 3

Obliczymy granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-4}$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ gdyż $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Dla x dążącego do $+\infty$ funkcja $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$ dąży do $+\infty$ i funkcja $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$ też zmierza do $+\infty$, zatem otrzymujemy symbol nieoznaczony.

W przypadku, gdy liczymy granicę funkcji wymiernej, wyłączamy przed nawias, w liczniku i mianowniku, zmienną w najwyższej potędze, w której występuje ona

w mianowniku – w tym przypadku x^2 .

Wyrażenie $\frac{x^2+1}{x^2-4}$ zapisujemy zatem następująco:

$$\frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{x^2\left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0 \text{ i } \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1, \text{ to}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Zauważmy, że dla x dążącego do $-\infty$ nasze rozumowanie dotyczące granicy funkcji f się powtórzy. Taką samą sytuację będziemy mieli w każdym przypadku, gdy stopień licznika i stopień mianownika funkcji wymiernej będą równe.

Wniosek

Jeśli stopnie licznika i mianownika funkcji wymiernej są równe, to granica tej funkcji, gdy x dąży do $+\infty$ i gdy x dąży do $-\infty$, jest równa ilorazowi współczynników przy zmiennych w najwyższej potędze.

Przykład 4

Obliczymy granicę funkcji $f(x) = 3x(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1})$ w nieskończoności.

Rozwiązanie

Liczymy następującą **granicę** $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1})$.

Ponieważ obliczenie na tym etapie granicy jest niemożliwe, bo otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone, mnożymy i dzielimy funkcję $f(x)$ przez $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}$ i stosujemy wzór $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Mamy zatem:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}) \cdot (\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}} &= \frac{(\sqrt{x^2+2})^2 - (\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{x^2+2 - x^2-1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

i stąd:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}}.$$

Ponownie otrzymaliśmy symbol nieoznaczony, dlatego wyrażenie przekształcamy dalej i wyłączamy x z licznika i mianownika:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Słownik

granica niewłaściwa funkcji

funkcja f ma dla x dążącego do $+\infty$ granicę niewłaściwą $+\infty$, jeżeli dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ argumentów funkcji f rozbieżnego do $+\infty$ odpowiadający mu ciąg $\{f(x_n)\}$ wartości funkcji f jest rozbieżny do $+\infty$, co zapisujemy następująco $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

granica funkcji

granica funkcji f dla x dążącego do $+\infty$ jest liczba g , jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ argumentów funkcji f rozbieżnego do $+\infty$ odpowiadający mu ciąg $\{f(x_n)\}$ wartości funkcji f jest zbieżny do liczby g

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem prezentującym granice funkcji elementarnych w nieskończoności, a następnie wykonaj polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D14WmWDSI>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącą granic funkcji elementarnych w nieskończoności.

Polecenie 2

Oblicz granicę funkcji $f(x) = \frac{5x^2-1}{2x^2+5}$, gdy x dąży do $+\infty$.

Polecenie 3

Zbadaj istnienie granicy $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^5$. Prawdą jest, że:

☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Ćwiczenie 2



Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7x$. Wybierz zdanie prawdziwe.

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

☐ Granica funkcji f dla x dążącego do $+\infty$ nie istnieje.

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Ćwiczenie 3



Do wzoru funkcji f dobierz odpowiednią granicę.

$$f(x) = \frac{2x^3-13}{5x^2+3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{2x^2-13}{5x^2+3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{2x^2-13}{5x^3+3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{5}$$

Ćwiczenie 4



Dane są funkcje: $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$ i $g(x) = \frac{3-x^3}{x+2}$. W miejsce kropek wstaw odpowiednie liczby całkowite lub symbol nieskończoności.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) =$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) =$

Ćwiczenie 5



Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = 2 \sin x$. Wybierz zdanie prawdziwe.

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

☐ Granica funkcji f dla x dążącego do $+\infty$ nie istnieje

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Ćwiczenie 6



Dane są funkcje $f(x) = \frac{8|x|+5}{2x-1}$ i $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt[3]{1+8x^3}}$. Oceń prawdziwość poniższych równości.

	Prawda	Fałsz
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$	☐	☐
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$	☐	☐
$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$	☐	☐
$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\frac{1}{2}$	☐	☐

Ćwiczenie 7



Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}$. Wybierz zdanie prawdziwe.

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Ćwiczenie 8



Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x(\sqrt{9x^2 + 5} - \sqrt{9x^2 - 1})$. Wybierz zdania prawdziwe.

☐ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0,5$

☐ Wzór funkcji można zapisać w postaci $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{9x^2+5}+\sqrt{9x^2-1}}$.

☐ Granica funkcji f dla x dążącego do $+\infty$ nie istnieje.

☐ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Granice funkcji elementarnych w nieskończoności

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje pojęcie granicy funkcji;
- oblicza granice funkcji wielomianowych w nieskończoności korzystając z poznanych własności o granicach;
- oblicza granice funkcji wymiernych w nieskończoności korzystając z poznanych własności o granicach;
- stosuje definicję Heinego do obliczenia granicy;
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania;
- przedstawia pełny tok rozwiązania zadania wraz z uzasadnieniem.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

1. Uczniowie przypominają definicję Heinego granicy funkcji;
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel, korzystając z zasobów e-podręcznika lub programu Geogebra prezentuje wykresy funkcji elementarnych;
2. Nauczyciel zwraca uwagę na intuicyjne pojęcie granicy;
3. Uczniowie na wykresach zauważają jak zachowuje się dana funkcja w nieskończoności;
4. Uczniowie na podstawie prezentowanych wykresów funkcji określają ich granice w nieskończoności, stwierdzając, że punkty na wykresie dążą do ...;
5. Nauczyciel wprowadza pojęcie granicy funkcji w nieskończoności;
6. Nauczyciel prezentuje film samouczek i omawia go z uczniami, następnie uczniowie samodzielnie rozwiązują zadanie do samodzielnego rozwiązania z filmu samouczka oraz zadania pod filmem;
7. Następnie uczniowie formułują wnioski, w których określają jak policzyć granice funkcji elementarnych w nieskończoności;
8. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela;
9. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek i zwracając uwagę na staranność zapisów.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych;
2. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień;
3. Uczniowie sporządzają notatkę w zeszycie: granice funkcji elementarnych w nieskończoności;
4. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

1. Zadaniem uczniów jest wykonanie pozostałych ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

[Granica ciągu nieskończonego](#)

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte w multimedium i filmie samouczku uczniowie mogą przeanalizować jako pracę własną przed lekcją. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.