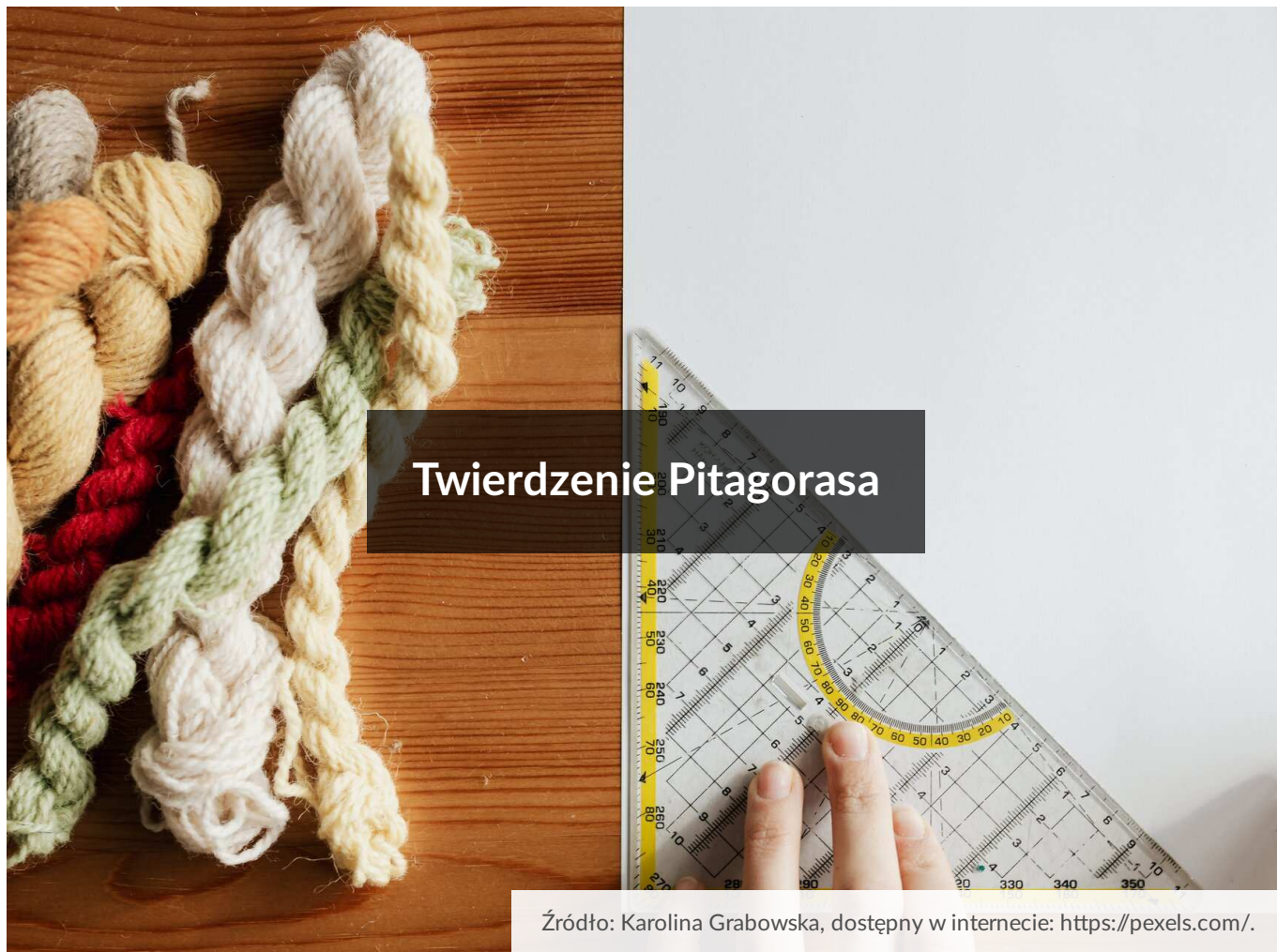




Twierdzenie Pitagorasa

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: Karolina Grabowska, dostępny w internecie: <https://pexels.com/>.

Twierdzenie Pitagorasa znasz już ze szkoły podstawowej. Można zaryzykować twierdzenie, że każdy kto ukończył szkołę pamięta, że uczył się twierdzenia Pitagorasa, nawet jeśli nie do końca pamięta, o co chodziło w tym twierdzeniu. Twierdzenie to przypisywane jest Pitagorasowi, ale związek między polami kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego znany był już wcześniej, a trzeba wiedzieć, że mówimy tu o historii, która miała miejsce około dwa i pół tysiąca lat temu, a więc o starożytności.

Twoje cele

- Poznasz twierdzenie Pitagorasa.
- Udowodnisz twierdzenie Pitagorasa na różne sposoby.
- Poznasz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.
- Zastosujesz twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne w sytuacjach typowych.
- Wykorzystasz twierdzenie Pitagorasa do konstrukcji odcinków.
- Zastosujesz twierdzenie Pitagorasa w dowodach geometrycznych.

Przeczytaj

Figury o równych polach

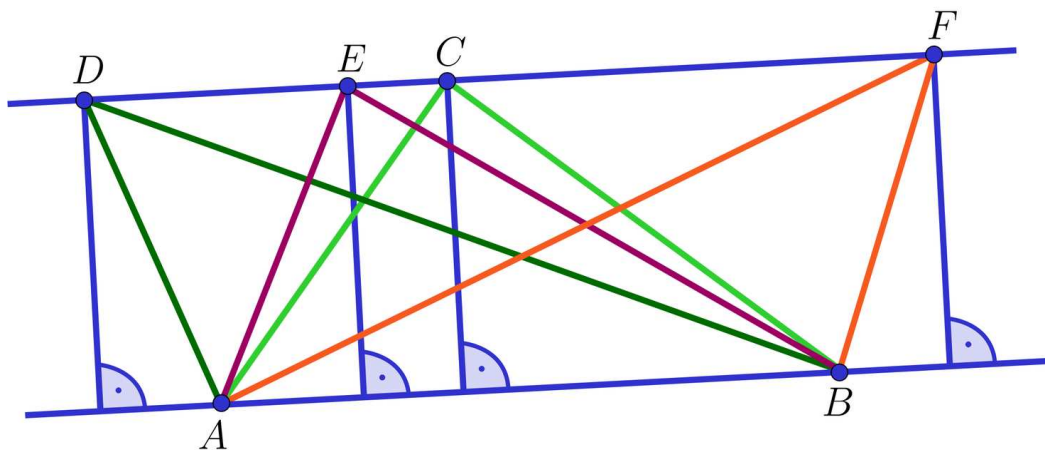
Jednym z trzech wielkich geometrycznych problemów w matematyce starożytnej Grecji była tzn. kwadratura koła. Problem ten polegał na skonstruowaniu przy użyciu jedynie cyrkla i linijki kwadratu o polu równym polu danego koła. Wówczas nie potrafiono tej konstrukcji wykonać, ale postawiono ważne pytanie, czy taką konstrukcję w ogóle da się wykonać jedynie przy pomocy cyrkla i linijki. Upłynęło ponad dwa tysiące lat zanim matematycy udowodnili, że taka konstrukcja jest niewykonalna. Od tego czasu stwierdzenie „kwadratura koła” oznacza, że mamy do czynienia z problemem nierozwiązywalnym.

Definicja: Figury równoważne

Figury o równych polach nazywamy figurami równoważnymi.

Przykładem figur równoważnych są trójkąty o wspólnej podstawie i jednakowych wysokościach.

Na rysunku ($AB \parallel DF$)



są to trójkąty ABC , ABD , ABE i ABF . Wszystkie te trójkąty mają wspólną podstawę AB i równe wysokości opuszczone na tę podstawę.

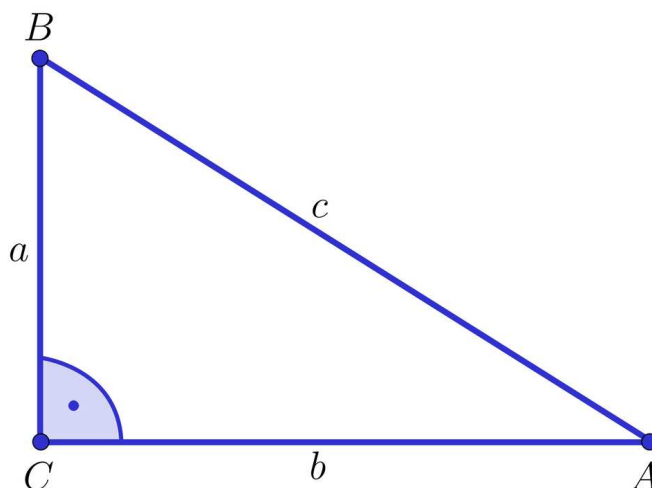
Posługując się tym nazewnictwem, moglibyśmy powiedzieć, że problem kwadratury koła polega na skonstruowaniu, jedynie za pomocą cyrkla i linijki, kwadratu równoważnemu danemu kołu.

Przejdziemy teraz do twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie: Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości jego przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej tego trójkąta.

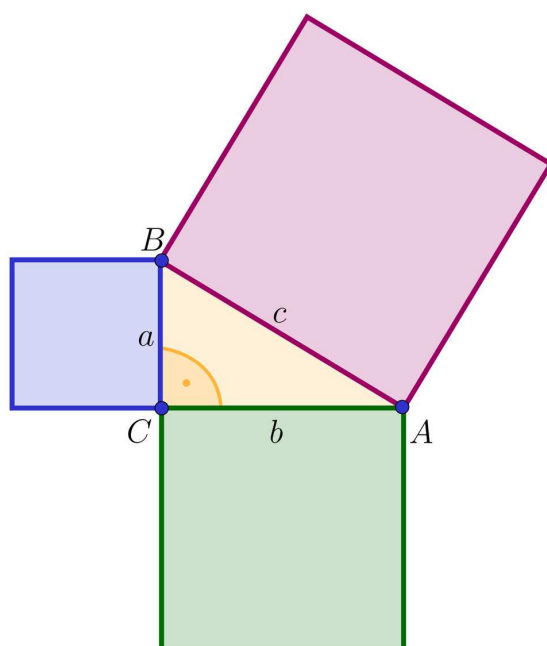
Przy oznaczeniach standardowych, jak na rysunku



tezę twierdzenia możemy zapisać w postaci

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Równość ta oznacza geometrycznie, że suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej. Ilustrację tej sytuacji przedstawia kolejny rysunek.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

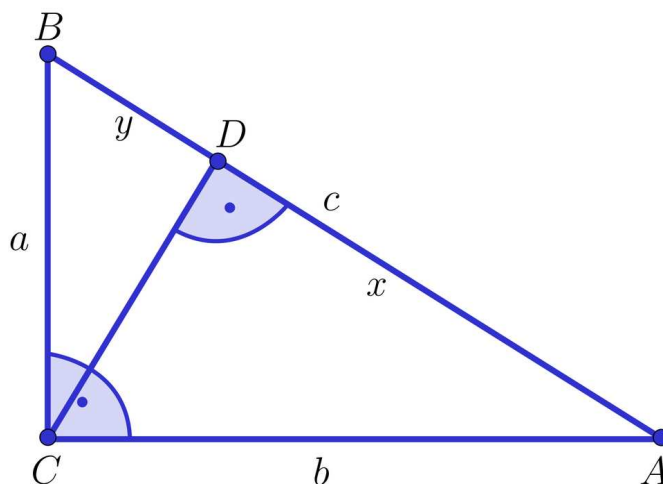
Obecnie znanych jest wiele dowodów tego twierdzenia, których większość opiera się na jego sensie geometrycznym.

Zaprezentujemy dwa dowody, z który pierwszy oparty jest na trójkątach podobnych, a drugi na wspomnianym sensie geometrycznym twierdzenia.

Dowód

Dowód 1

Poprowadźmy wysokość CD trójkąta ABC i oznaczmy długości odcinków AD i BD literami x i y , jak na rysunku.



Trójkąty ACD i ABC są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku A , więc dwa pozostałe kąty ostre tych trójkątów są równe. To oznacza, na mocy cechy *kkk*, że te trójkąty są podobne. Tak samo trójkąty CBD i ABC są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku B , więc te trójkąty także są podobne.

Z tych podobieństw wynikają równości

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \text{ oraz } \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

czyli

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{c} \text{ oraz } \frac{y}{a} = \frac{a}{c}$$

Stąd otrzymujemy

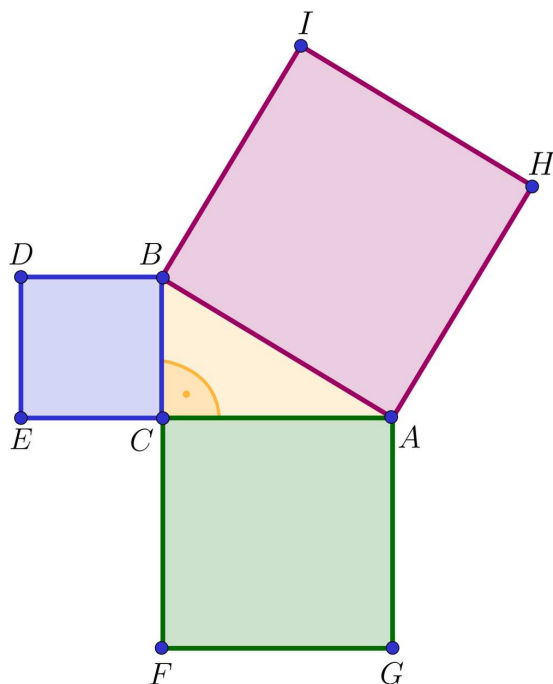
$$x = \frac{b^2}{c} \text{ oraz } y = \frac{a^2}{c}$$

Ponieważ $x + y = c$, więc $\frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c} = c$. Stąd, po pomnożeniu obu stron tej równości przez c , otrzymujemy

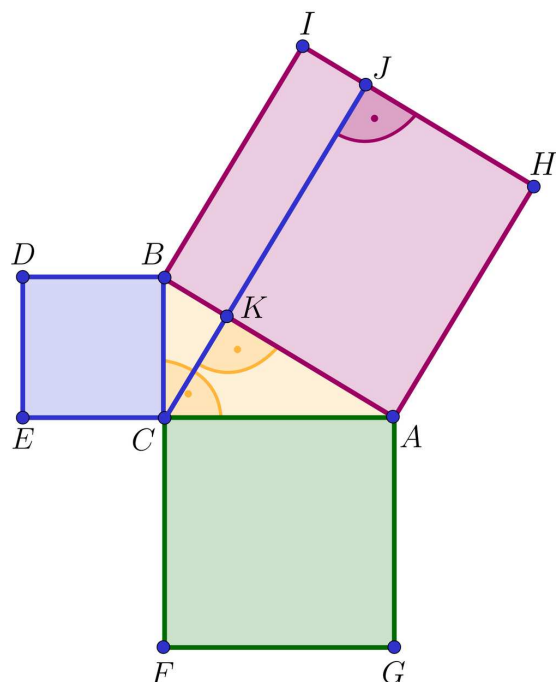
$a^2 + b^2 = c^2$, co właśnie należało udowodnić.

Dowód 2

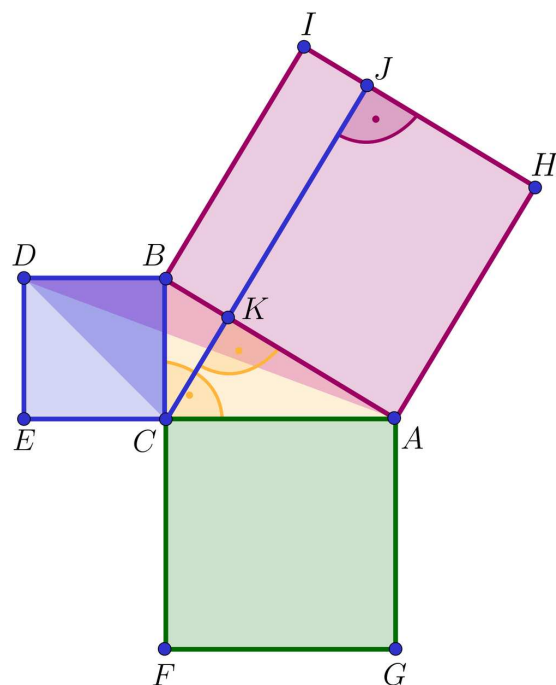
Dowód, który teraz zaprezentujemy, pochodzi od Euklidesa. Wykażemy, że suma pól kwadratów $BDEC$ i $CFGA$ jest równa polu kwadratu $AHIB$.



Poprowadźmy najpierw odcinek CJ prostopadły do przeciwprostokątnej AB , którego koniec J leży na boku HI kwadratu $AHIB$.

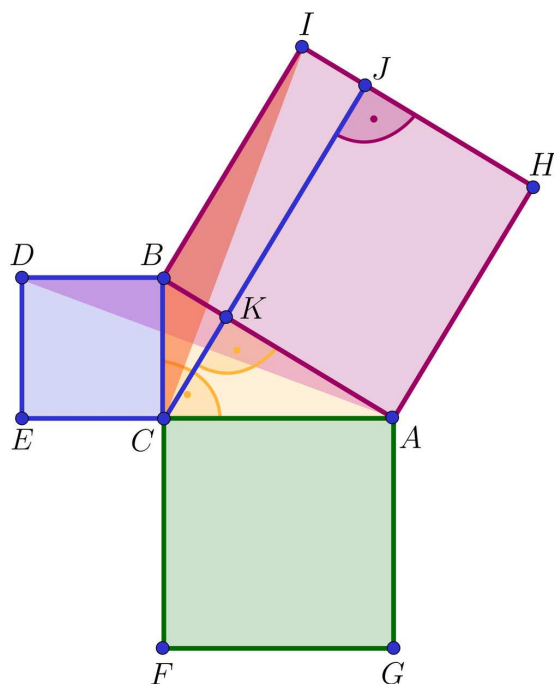


Pokażemy, że kwadrat $CBDE$ i prostokąt $BKJI$ to figury równoważne oraz kwadrat $CFGA$ i prostokąt $AHJK$ to figury równoważne. Wystarczy wykazać, że trójkąt CBD – połowa kwadratu $CBDE$ i trójkąt BJI – połowa prostokąta $BKJI$ to figury równoważne.



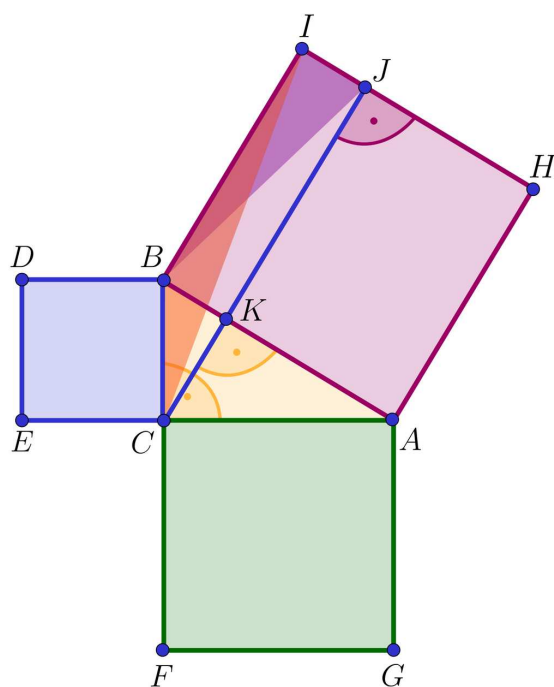
Trójkąty CBD i ABD są równoważne, gdyż mają taką samą podstawę BD i równe wysokości opuszczone z wierzchołków C i A na prostą BD .

W kolejnym kroku wykazujemy, że trójkąty ABD i IBC są równoważne.



Jest tak dlatego, że te trójkąty są przystające, co z kolei wynika z równości
 $|AB| = |IB|$, $|BD| = |BC|$,
 $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ABC| + 90^\circ =$
 $= |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ABI| = |\sphericalangle IBC|$
 i cechy *bkb* przystawiania trójkątów.

Teraz pozostaje już tylko zauważyć, że trójkąty *IBC* i *BJI* są równoważne.



To wynika z faktu, że mają one wspólną podstawę *BI* i równe wysokości opuszczone z wierzchołków *C* i *J* na prostą *BI*.

W ten sam sposób wykazujemy równoważność trójkątów, kolejno: CGA , BGA , HCA i HJA .

To kończy dowód.

Twierdzenie Pitagorasa stosujemy w sytuacji, gdy wiemy, że trójkąt jest prostokątny. Okazuje się też że można wnioskować w drugą stronę. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie: odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma długości kwadratów któryś dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku tego trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny.

Oznaczając $a = |BC|$, $b = |AC|$ i $c = |AB|$ i zakładając, że $a \leq b \leq c$, możemy to twierdzenie zapisać w postaci:

Jeżeli $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt ABC jest prostokątny.

Pokażemy teraz kilka przykładów, w których zastosujemy twierdzenie Pitagorasa lub twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Przykład 1

Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 756, a przeciwprostokątna tego trójkąta jest o 1 dłuższa o jednej z przyprostokątnych. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Rozwiązanie

Niech x oznacza długość przeciwprostokątnej trójkąta. Wtedy jedna z przyprostokątnych ma długość równą $x - 1$, a druga $756 - x - (x - 1)$, czyli $757 - 2x$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie

$$(x - 1)^2 + (757 - 2x)^2 = x^2.$$

Zastosujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy, a następnie uporządkujemy otrzymane równanie

$$x^2 - 2x + 1 + 757^2 - 2 \cdot 757 \cdot 2x + 4x^2 = x^2,$$

$$4x^2 - 3030x + 573050 = 0,$$

$$2x^2 - 1515x + 286525 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik i pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 - 1515x + 286525$.

$$\Delta = (-1515)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 286525 = 3025, \text{ więc } \sqrt{\Delta} = \sqrt{3025} = 55.$$

$$x_1 = \frac{1515-55}{4} = 365, x_2 = \frac{1515+55}{4} = 392\frac{1}{2}.$$

Gdy $x = 365$, to $x - 1 = 364$ oraz $757 - 2x = 757 - 2 \cdot 365 = 27$, a gdy $x = 392\frac{1}{2}$, to $x - 1 = 391\frac{1}{2}$ oraz $757 - 2x = 752 - 2 \cdot 392\frac{1}{2} = -33$, co jest niemożliwe.

Odpowiedź:

Przyprostokątne trójkąta mają długości 27 i 364, a przeciwprostokątna ma długość 365.

Przykład 2

Wykaż, że jeśli boki trójkąta mają długości $2x + 1$, $2x^2 + 2x$, $2x^2 + 2x + 1$, gdzie x jest liczbą dodatnią, to trójkąt ten jest prostokątny.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że jeśli $x > 0$, to liczby $2x + 1$, $2x^2 + 2x$, $2x^2 + 2x + 1$ są dodatnie, a największą z nich jest $2x^2 + 2x + 1$. Wystarczy więc sprawdzić, czy suma kwadratów liczb $2x + 1$ i $2x^2 + 2x$ jest równa kwadratowi liczby $2x^2 + 2x + 1$. Obliczmy

$$\begin{aligned}(2x + 1)^2 + (2x^2 + 2x)^2 &= 4x^2 + 4x + 1 + 4x^4 + 8x^3 + 4x^2 = \\ &= 4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1,\end{aligned}$$

oraz

$$(2x^2 + 2x + 1)^2 = 4x^4 + 4x^2 + 1 + 8x^3 + 4x^2 + 4x = 4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1.$$

Zatem dla każdej liczby $x > 0$ prawdziwa jest równość

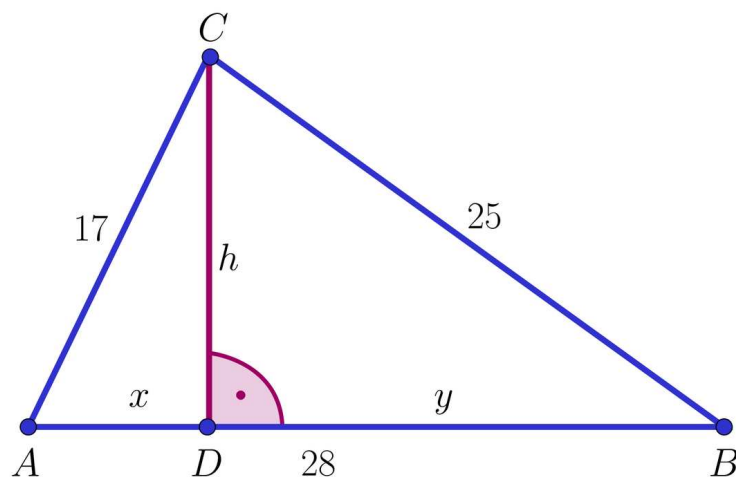
$(2x + 1)^2 + (2x^2 + 2x)^2 = (2x^2 + 2x + 1)^2$. Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wnioskujemy, że trójkąt jest prostokątny.

Przykład 3

Długości boków trójkąta są równe 17, 25 i 28. Udowodnij, spodek najkrótszej wysokości tego trójkąta dzieli bok trójkąta na dwie części w stosunku 2 : 5.

Rozwiązanie

Ponieważ pole trójkąta to połowa iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na prostą zawierającą ten bok, więc iloczyn długości boku i odpowiadającej mu wysokości jest stały. Wobec tego najkrótsza wysokość trójkąta jest opuszczona na najdłuższy bok. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC i dla trójkąta BDC otrzymujemy

$$x^2 + h^2 = 17^2 \text{ oraz } y^2 + h^2 = 25^2.$$

Odejmując równania stronami, od drugiego pierwsze, dostajemy

$$y^2 - x^2 = 25^2 - 17^2.$$

Stosując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów możemy to równanie zapisać w postaci

$$(y - x)(y + x) = (25 - 17)(25 + 17),$$

$$(y - x)(y + x) = 8 \cdot 42.$$

Ponieważ $x + y = 28$, więc otrzymujemy $(y - x) \cdot 28 = 8 \cdot 42$, skąd $y - x = 12$. Dodając stronami równania $x + y = 28$ i $y - x = 12$, otrzymujemy $2y = 40$, więc $y = 20$. Zatem $x + 20 = 28$, czyli $x = 8$.

Stosunek długości odcinka AD do długości odcinka BD jest równy $\frac{x}{y} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

To kończy dowód.

Ciekawym problemem, związanym z trójkątami prostokątnymi, jest poszukiwanie tzw. trójek pitagorejskich. Trójkami pitagorejskimi nazywamy takie ciągi (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich, które są długościami boków trójkąta prostokątnego. Przykładem takiej trójki jest ciąg $(3, 4, 5)$.

Przykład 4

Wykaż, że w każdej trójce pitagorejskiej co najmniej jedna z liczb jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że (a, b, c) jest **trójką pitagorejską** i że żadna z liczb a, b, c nie jest podzielna przez 5. Wtedy każda z tych liczb daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1, 2, 3 lub 4.

Jeśli liczba całkowita daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1, a więc ma postać $5k + 1$, gdzie k jest liczbą całkowitą, to jej kwadrat też daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1, gdyż $(5k + 1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5(5k^2 + 2k) + 1$.

Analogicznie: jeśli liczba całkowita daje przy dzieleniu przez 5 resztę 4, a więc ma postać $5k + 4$, gdzie k jest liczbą całkowitą, to jej kwadrat daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1, gdyż $(5k + 4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$.

Tak samo, gdy liczba całkowita przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2 lub 3, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4. Rzeczywiście

$$(5k + 2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5(5k^2 + 4k) + 4 \text{ oraz}$$

$$(5k + 3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 5(5k^2 + 6k + 1) + 4.$$

Wynika stąd, że liczba $a^2 + b^2$ albo jest podzielna przez 5 (gdy reszty z dzielenia przez 5 liczb a^2 i b^2 będą równe 1 i 4) albo reszta dzielenia tej liczby przez 5 będzie równa 2 (gdy reszty z dzielenia przez 5 liczb a^2 i b^2 będą równe 1 i 1) albo reszta ta będzie równa 3 (gdy reszty z dzielenia przez 5 liczb a^2 i b^2 będą równe 4 i 4, bo $4 + 4 = 8 = 5 + 3$). To jest jednak niemożliwe, gdyż reszta, jaką przy dzieleniu przez 5 daje liczba c^2 może być równa 1 albo 4.

Otrzymana sprzeczność oznacza, że założenie o tym, że żadna z liczb a, b, c nie jest podzielna przez 5 jest nieprawdziwe.

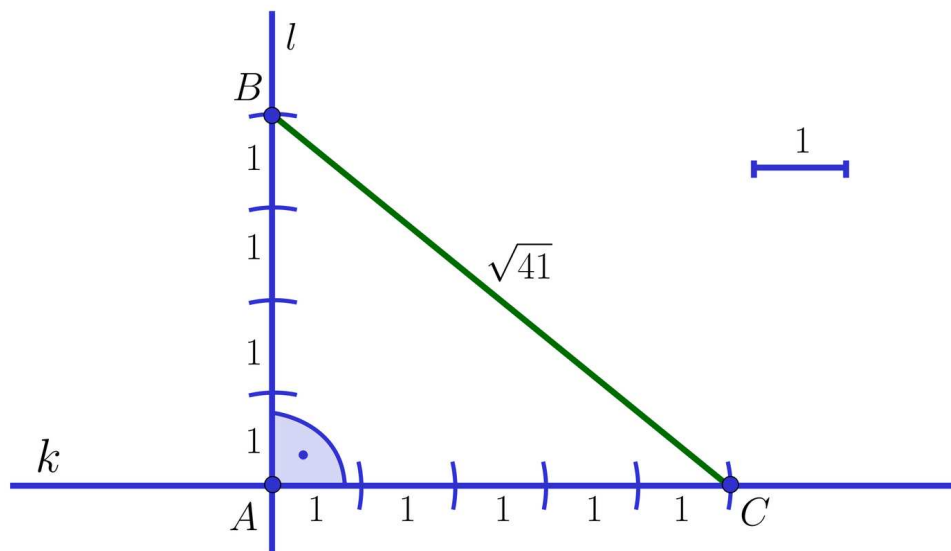
To kończy dowód.

Przykład 5

Mając dany odcinek o długości 1, skonstruuj odcinek o długości $\sqrt{41}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $41 = 16 + 25 = 4^2 + 5^2$. Zatem trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości 4 i 5 ma przeciwprostokątną długości $\sqrt{41}$, gdyż $4^2 + 5^2 = (\sqrt{41})^2$. Ten właśnie fakt wykorzystamy w naszej konstrukcji.



Opis konstrukcji.

1. Rysujemy prostą k i obieramy na niej punkt A .
2. Konstruujemy prostą l prostopadłą do prostej k i przechodzącą przez punkt A .
3. Odkładamy na prostych l i k takie punkty B i C , żeby $|AB| = 4$, $|AC| = 5$.
4. Kreślimy odcinek BC . Jest to odcinek o długości $\sqrt{41}$.

Przykład 6

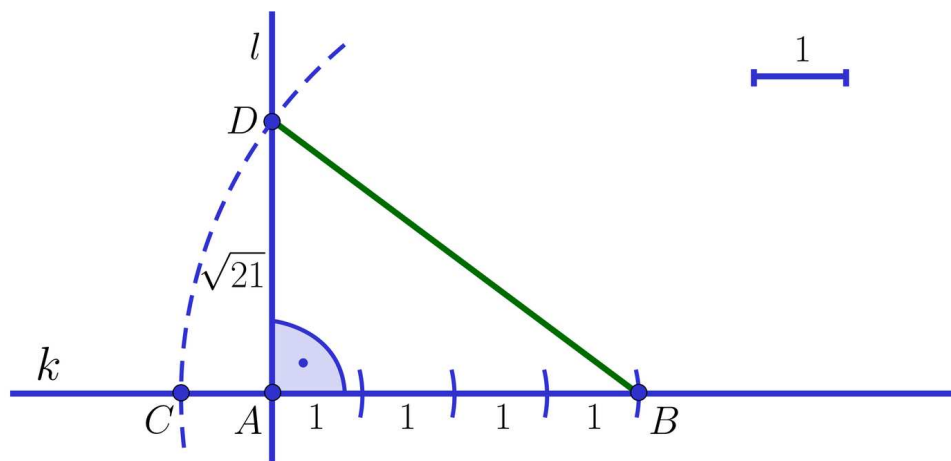
Mając dany odcinek o długości 1, skonstruuj odcinek o długości $\sqrt{21}$.

Rozwiązanie

Tym razem liczby 21 nie można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych, gdyż musiałyby to być kwadraty mniejsze od 21, a więc 1, 4, 9 lub 16.

Ponieważ 21 jest liczbą nieparzystą, więc jeden z tych kwadratów musiałby być liczbą parzystą, a drugi nieparzystą, ale $4 + 16 = 20 < 21$, a $9 + 16 = 25 > 21$. Wobec tego liczby 21 nie można przedstawić jako sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych dodatnich. Zauważmy jednak, że $21 = 25 - 4 = 5^2 - 2^2$.

Zatem trójkąt prostokątny, którego jedna z przyprostokątnych ma długość 2, a przeciwprostokątna ma długość 5 ma drugą przyprostokątną długości $\sqrt{21}$, gdyż $2^2 + (\sqrt{21})^2 = 5^2$. W tej konstrukcji także wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa.



Opis konstrukcji.

1. Rysujemy prostą k i obieramy na niej punkt A .
2. Konstruujemy prostą l prostopadłą do prostej k i przechodzącą przez punkt A .
3. Odkładamy na prostej k takie punkty B i C leżące po przeciwnych stronach punktu A , żeby $|AB| = 4$, $|AC| = 1$.
4. Zataczamy łuk okręgu o środku B przechodzący przez punkt C , a punkt jego przecięcia z prostą l oznaczamy przez D .
5. Odcinek AD jest szukany odcinkiem. Jego długość jest równa $\sqrt{21}$.

Słownik

trójka pitagorejska

ciąg (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich, które są długościami boków trójkąta prostokątnego nazywamy trójką pitagorejską

Animacja

Polecenie 1

Odtwórz całą animację. Po jej obejrzeniu uzasadnij, że pomarańczowy czworokąt jest rzeczywiście kwadratem.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DKufnvodo>

Film nawiązujący do twierdzenia Pitagorasa.

Polecenie 2

Przeanalizuj zamieszczoną animację i uzasadnij, że przedstawia ona dowód twierdzenia Pitagorasa.

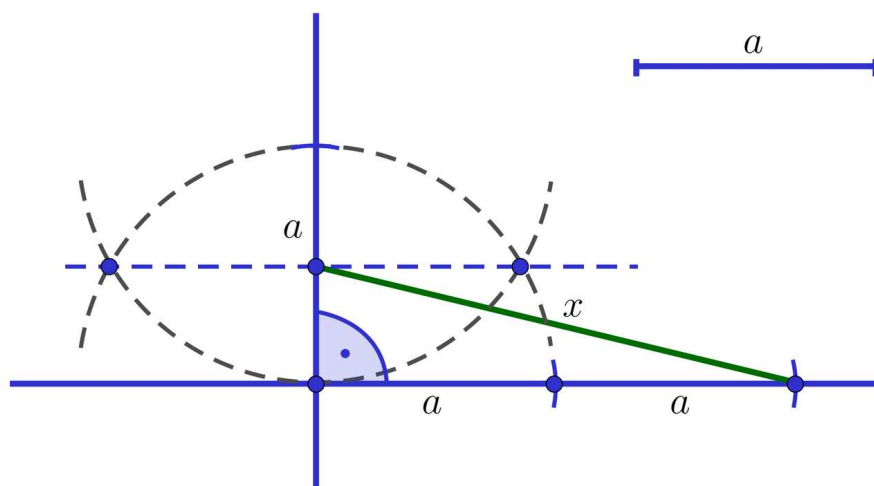
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na rysunku przedstawiona jest konstrukcja odcinka o długości x , gdy dany jest odcinek a .



Zaznacz poprawną odpowiedź. Skonstruowany odcinek x ma długość:

☐ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

☐ $x = \frac{\sqrt{13}}{2}a$

☐ $x = \frac{\sqrt{17}}{2}a$

☐ $x = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Liczby x , $2x - 1$, $3x - 5$ są długościami boków trójkąta prostokątnego. Liczba wszystkich takich trójkątów jest równa:

☐ 2

☐ 4

☐ 1

☐ 3

Ćwiczenie 3



Liczby całkowite a , b , c są długościami boków trójkąta prostokątnego. Wskaż wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Wszystkie liczby a , b , c mogą być podzielne przez 7.

☐ Wszystkie liczby a , b , c mogą być parzyste.

☐ Suma $a + b + c$ może być mniejsza od 11.

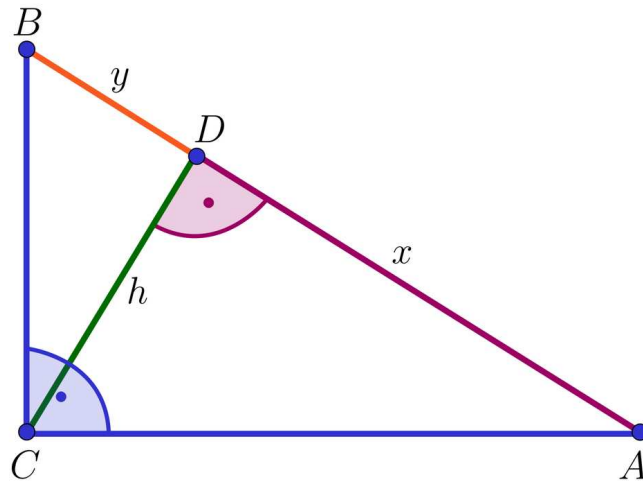
☐ Któraś z liczb a , b , c może być równa 1.

☐ Wszystkie liczby a , b , c mogą być nieparzyste.

Ćwiczenie 4



Punkt D jest spodkiem wysokości trójkąta prostokątnego ABC opuszczonej z wierzchołka C na przeciwprostokątną AB . Udowodnij, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, że długość odcinka CD jest średnią geometryczną długości odcinków AD i BD , a więc, że – przy oznaczeniach jak na rysunku

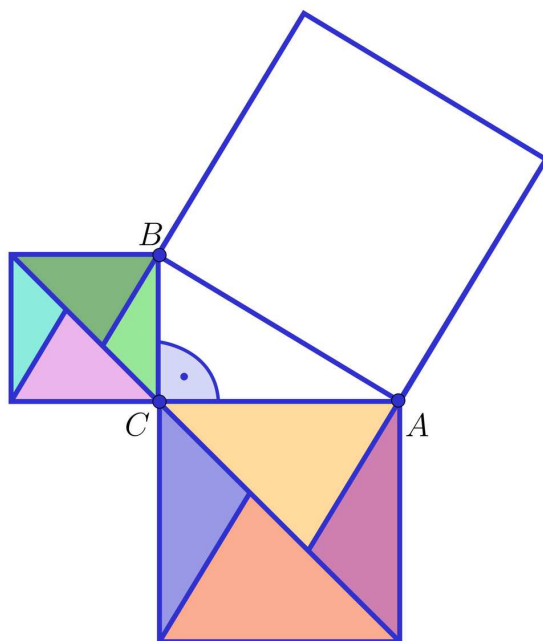


prawdziwa jest równość $h = \sqrt{xy}$.

Ćwiczenie 5



Kwadraty zbudowane na przyprostokątnych trójkąta ABC zostały rozcięte na osiem trójkątów prostą zawierającą przekątne tych kwadratów i prostymi prostopadłymi do przeciwprostokątnej trójkąta ABC , tak jak na rysunku.



Jak ułożyć te osiem trójkątów, aby zbudować kwadrat na przeciwprostokątnej trójkąta ABC ?
To kolejny dowód twierdzenia Pitagorasa.

Ćwiczenie 6



Wykaż, że w trapezie prostokątnym suma kwadratu długości dłuższej podstawy i kwadratu długości krótszej przekątnej jest równa sumie kwadratu długości krótszej podstawy i kwadratu długości dłuższej przekątnej.

Ćwiczenie 7

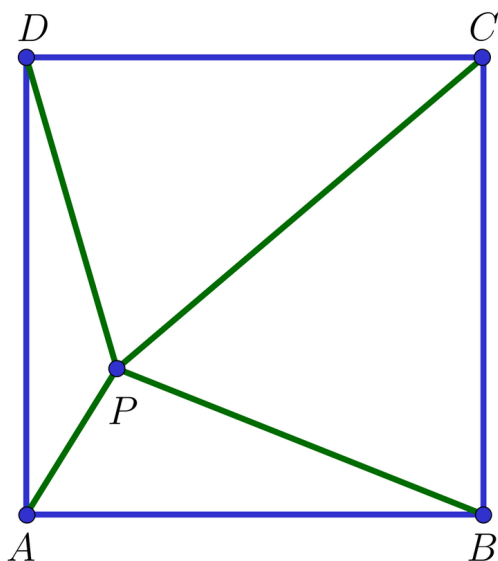


Udowodnij, że jeśli długości boków trójkąta prostokątnego są wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego, to różnica tego ciągu jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Ćwiczenie 8



Punkt P leży wewnątrz kwadratu $ABCD$.



Udowodnij, że $|AP|^2 + |CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2$.

Dla nauczyciela

Autor: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie Pitagorasa

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna i stosuje twierdzenie Pitagorasa;
- przeprowadza dowód twierdzenia Pitagorasa na co najmniej dwa sposoby;
- zna i stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa w sytuacjach typowych;
- konstruuje odcinki, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa;
- zna pojęcie trójki pitagorejskiej;
- przeprowadza dowody geometryczne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie pojęcia sformułowania twierdzenia Pitagorasa. Poleca uczniom wykonanie następującego zadania indywidualnie:
„Janek rozwiązał następujące zadanie: Rozstrzygnij, czy trójkąt o bokach długości 3, 4 i 5 jest prostokątny. Rozwiązał je następująco: Ponieważ $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$, więc z twierdzenia Pitagorasa wnioskuję, że ten trójkąt jest prostokątny.”
Czy wniosek dotyczący trójkąta, jaki wyciągnął Janek, jest prawdziwy?
Czy rozumowanie, jakie przeprowadził Janek, jest poprawne?
2. Nauczyciel inicjuje dyskusję dotyczącą rozwiązanej przez nich zadania, po czym nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel podsumowuje dyskusję, formułując twierdzenie Pitagorasa, przy czym zwraca szczególną uwagę na założenie i tezę tego twierdzenia.
2. Uczniowie, pracując w grupach przeprowadzają dowód twierdzenia Pitagorasa pochodzący od Euklidesa.
3. Nauczyciel formułuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa. Uczniowie w grupach, kierowani przez nauczyciela, przeprowadzają dowód tego twierdzenia.
4. Uczniowie zapoznają się z pojęciem trójki pitagorejskiej, analizują rozwiązanie Przykładu 4.
5. Następnie nauczyciel omawia przykłady zastosowania twierdzenia Pitagorasa. Szczególną uwagę zwraca na konstrukcję odcinków o długościach $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, gdzie a i b to długości danych odcinków.
6. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć oraz przeprowadzili dowód zależności omawianej we wstępie.

Materiały pomocnicze:

- [Twierdzenie Pitagorasa - dowody](#)
- [Twierdzenie Pitagorasa](#)

Wskazówki metodyczne:

Analizę dowodu twierdzenia Pitagorasa zamieszczonego w sekcji „Animacja” można zlecić uczniom jako pracę do samodzielnego wykonania. Można też wykorzystać aplet geogebry jako pretekst do zaprezentowania kilku innych dowodów twierdzenia Pitagorasa opartych na „układankach”.