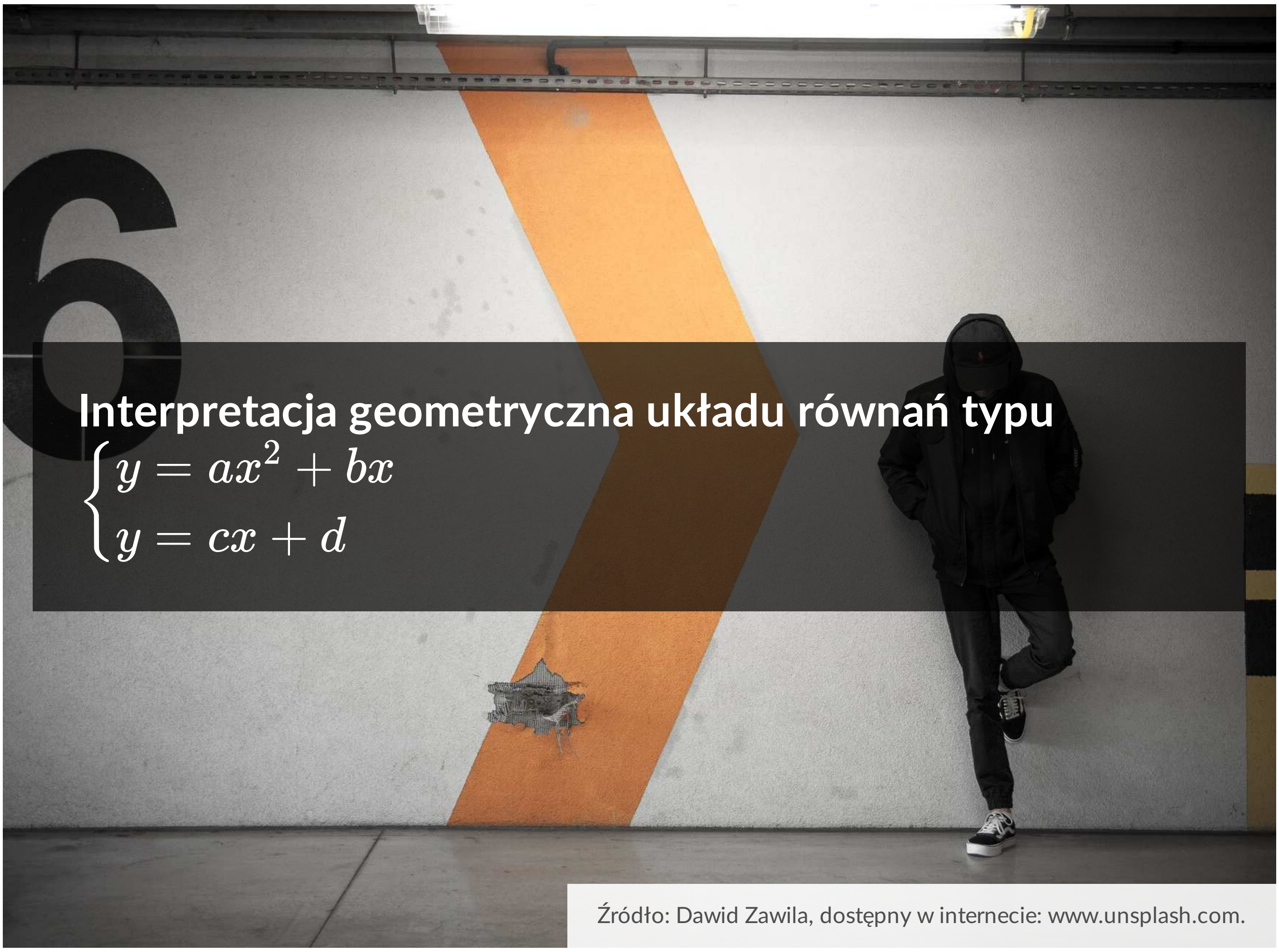
Interpretacja geometryczna układu równań typu $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = cx + d \end{cases}$

Interpretacja geometryczna układu równań typu $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = cx + d \end{cases}$



Źródło: Dawid Zawila, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Interpretacją geometryczną równania $y = ax^2 + bx$ jest parabola, zaś interpretacją geometryczną równania $y = cx + d$ jest prosta. Rozwiązaniem układu równań z dwiema niewiadomymi są pary liczb, spełniające jednocześnie oba równania tego układu.

W tym materiale zajmiemy się poszukiwaniem takich par przy pomocy geometrycznych interpretacji równań zawartych w danym układzie.

Twoje cele

- Utrwalisz metody rysowania wykresów funkcji liniowej.
- Utrwalisz metody rysowania wykresów funkcji kwadratowej.
- Wykorzystasz wykresy funkcji liniowej i kwadratowej do graficznego rozwiazywania układów równań postaci $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = cx + d \end{cases}$.
- Na podstawie wykresów odczytasz liczbę rozwiązań układu równań postaci $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = cx + d \end{cases}$.
- Zinterpretujesz wykres układu równań postaci $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = cx + d \end{cases}$.

Przeczytaj

Definicja: Układ równań

Układem równań nazywamy koniunkcję co najmniej dwóch równań.

Definicja: Rozwiązanie układu równań

Rozwiązaniem układu równań nazywamy parę liczb spełniających każde równanie danego układu równań.

Definicja: Wykres funkcji liniowej

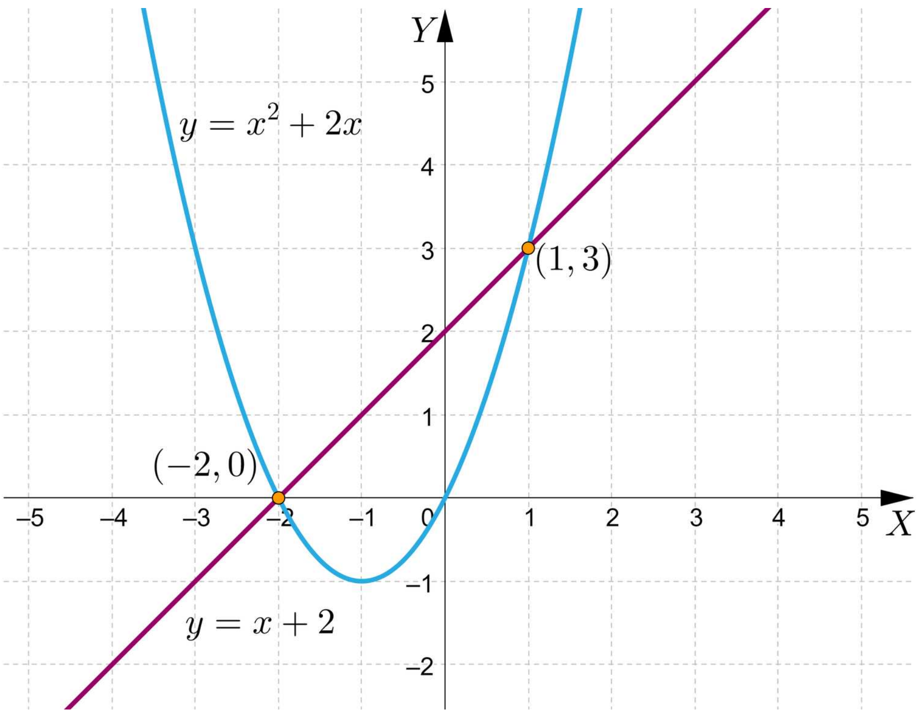
Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta o równaniu $y = ax + b$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Definicja: Wykres funkcji kwadratowej

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2$ jest krzywa o równaniu $y = ax^2$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Krzywą tę nazywamy parabolą.

Przykład 1

Na rysunku przedstawione są wykresy równań $y = x^2 + 2x$ oraz $y = x + 2$.



Widzimy, że wykresy te przecinają się w dwóch punktach, których współrzędne możemy odczytać z rysunku. Są to punkty $(-2,\ 0)$ oraz $(1,\ 3)$.

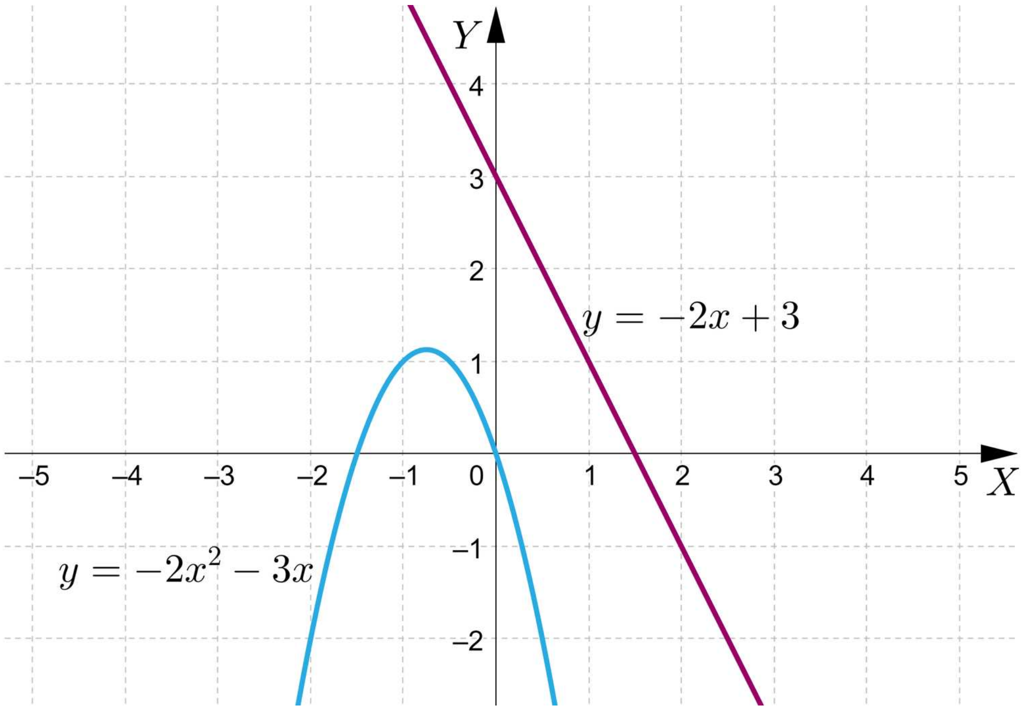
Współrzędne punktów przecięcia wykresów równań, są rozwiązaniami układu utworzonego przez te równania.

A zatem rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = x + 2 \end{cases}$ są dwie pary liczb $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.

Przykład 2

Przedstawimy interpretację graficzną układu równań $\begin{cases} y = -2x^2 - 3x \\ y = -2x + 3 \end{cases}$.

Rysujemy w układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = -2x^2 - 3x$ oraz $y = -2x + 3$.

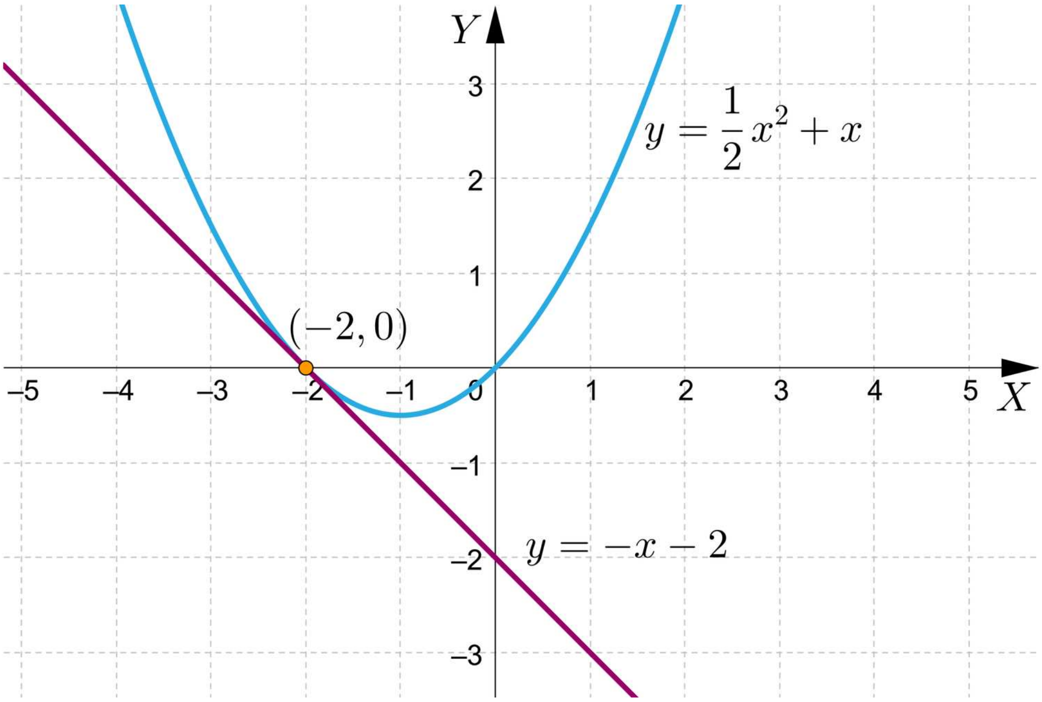


Wykresy nie posiadają punktów wspólnych. Zatem na podstawie geometrycznej interpretacji układu równań $\begin{cases} y = -2x^2 - 3x \\ y = -2x + 3 \end{cases}$ widzimy, że nie posiada on rozwiązań.

Przykład 3

Przedstawimy interpretację graficzną układu równań $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + x \\ y = -x - 2 \end{cases}$.

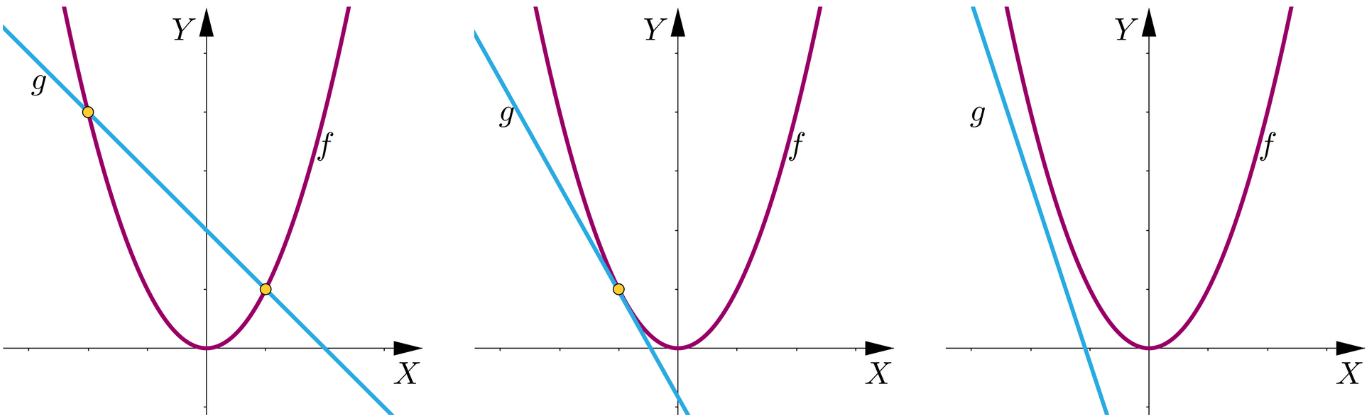
Rysujemy w układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = \frac{1}{2}x^2 + x$ oraz $y = -x - 2$.



Prosta i parabola mają dokładnie jeden wspólny punkt $P = (-2,\ 0)$.

Stąd układ równań $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + x \\ y = -x - 2 \end{cases}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Możemy zatem zauważyć, że prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.



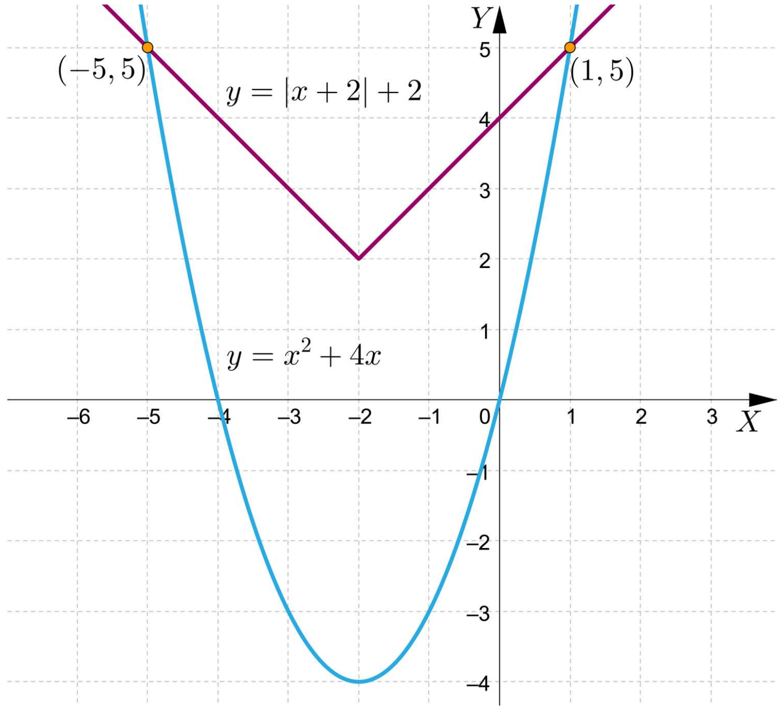
Prostą, która przecina parabolę w dwóch punktach, nazywamy **sieczną** paraboli.

Prostą, która ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny i nie jest równoległa do osi Y, nazywamy **styczną** do paraboli.

Przykład 4

Rozwiążemy metodą graficzną układ równań $\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = |x + 2| + 2 \end{cases}$.

W układzie współrzędnych przedstawione są wykresy funkcji $y = x^2 + 4x$ oraz $y = |x + 2| + 2$.



Wykresy przecinają się w dwóch punktach o współrzędnych $(-5,\ 5)$ oraz $(1,\ 5)$, a zatem układ równań $\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = |x + 2| + 2 \end{cases}$ ma dwa rozwiązania postaci $\begin{cases} x = -5 \\ y = 5 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$.

Przykład 5

Określimy liczbę rozwiązań układu równań $\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = -3x + m \end{cases}$, w zależności od parametru m.

Wiemy, że punkt wspólny wykresów należy jednocześnie do paraboli i prostej. Spełniony jest zatem warunek

$x^2 - x = -3x + m$

Znajdziemy m, dla którego istnieje dokładnie jeden taki punkt. Taka sytuacja ma miejsce wtedy, gdy wyróżnik trójmianu $x^2 + 2x - m = 0$ jest równy zero.

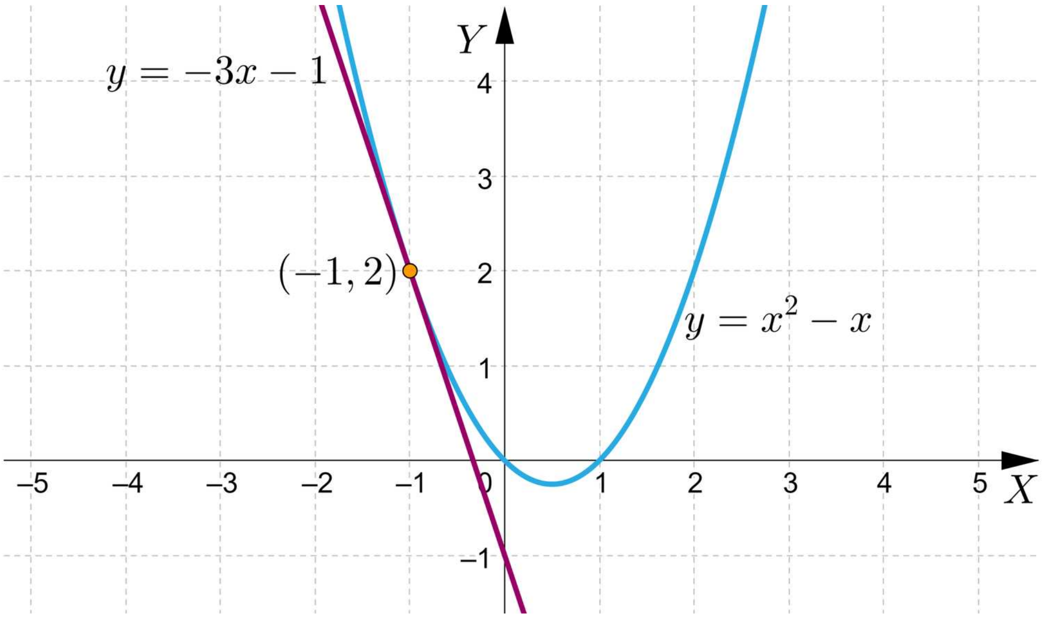
$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-m)$

$4 + 4m = 0$

$m = -1$

A zatem prosta $y = -3x - 1$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą $y = x^2 - x$ dla $m = -1$.

Naszkicujemy wykresy tych równań.



Proste $y = -3x + m$ są równoległe do narysowanej prostej, a w zależności od wartości parametru m „przesuwają się” wzdłuż osi Y. Z własności funkcji liniowej wiemy, że proste będą przecinać oś Y w punkcie $(0,\ m)$.

Zatem dla $m < -1$ prosta $y = -3x + m$ nie będzie miała punktu wspólnego z parabolą $y = x^2 - x$, a dla $m > -1$ prosta będzie miała dwa punkty wspólne z parabolą.

Słownik

układ równań

koniunkcja co najmniej dwóch równań

parabola

wykres funkcji kwadratowej

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z apletem przedstawiającym geometryczną interpretację układu równań typu $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = cx + d \end{cases}$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DkyvugaOj

Polecenie 2

Rozwiąż graficznie układy równań:

a) $\begin{cases} y = 5x^2 - 8x \\ y = 2x - 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 2x^2 - 3x \\ y = -x + 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = -x + 3 \end{cases}$

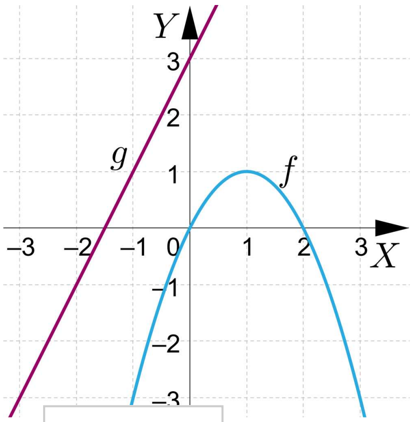
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

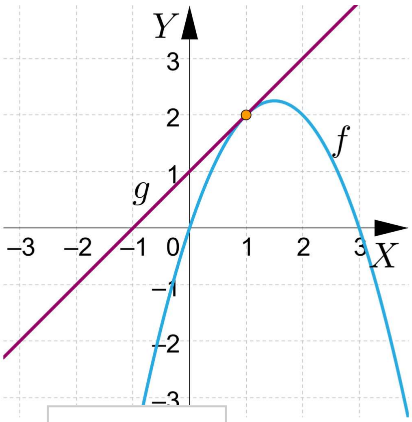
Ćwiczenie 1

Określ liczbę rozwiązań układów równań na podstawie ich interpretacji geometrycznych. Przeciągnij prawidłowe odpowiedzi w odpowiednie miejsca.

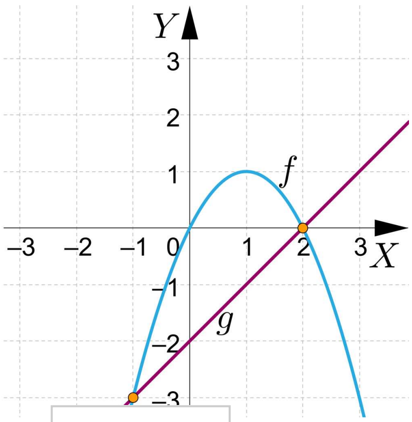
2 rozwiązania, brak rozwiązań, 1 rozwiązanie



....



....



....

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Rozwiąż graficznie układy równań, a następnie pogrupuj je zgodnie z liczbą ich rozwiązań.

Brak rozwiązań:

1 rozwiązanie:

2 rozwiązania:

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

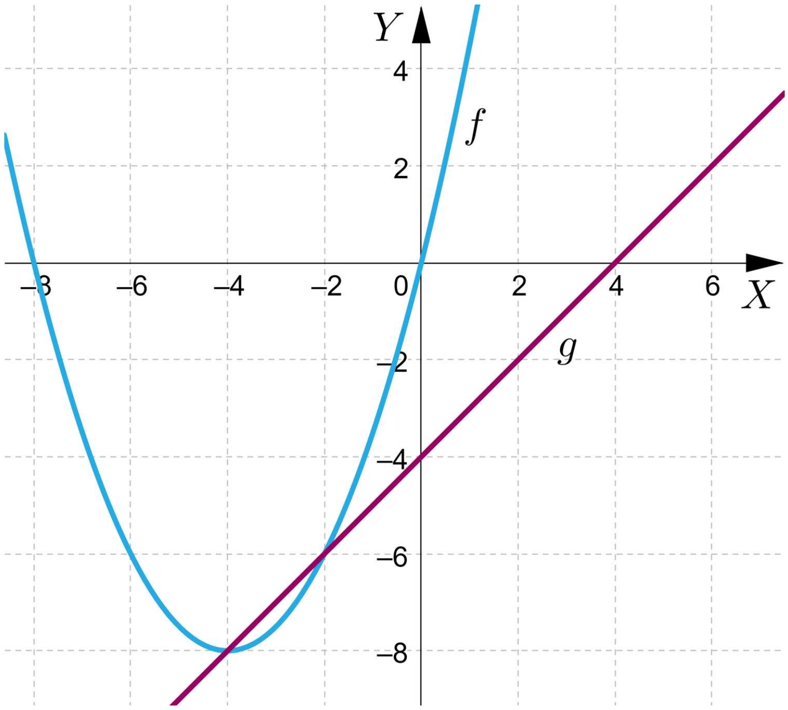
$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + x \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 + x \\ y = -x - 4 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5

Odczytaj z rysunku rozwiązania układu równań, a następnie uzupełnij wolne miejsca w zapisie algebraicznym tego układu. Przeciągnij poprawne liczby.



$x = -4$ oraz $y =$ ______ lub $x =$ ______ oraz $y = -6$

$y =$ ______ $\cdot x^2 +$ ______ $\cdot x$ oraz $y =$ ______ $\cdot x +$ ______

-4 6 1 $-\frac{1}{2}$ -6 -2 2 -8 8 4 $\frac{1}{2}$ -1

Ćwiczenie 6

Długość odcinka o końcach w punktach $A=(x_{A,}\,y_A)$, $B=(x_B,\ y_B)$ możemy obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

W trójkącie ABC współrzędne wierzchołków A i B spełniają układ równań $\begin{cases} y=-x^2+5x \\ y=-x+5 \end{cases}$, wierzchołek C jest początkiem układu współrzędnych.

Rozwiąż graficznie ten układ równań. Znajdź wierzchołki trójkąta ABC i oblicz jego obwód.

Zaznacz właściwe odpowiedzi.

A	B	**Obwód trójkąta**
$(-1,\ 4)$ ○	$(-5,\ 0)$ ○	54 ○
$(-1,\ -4)$ ○	$(5,\ 0)$ ○	$\sqrt{17}+5+\sqrt{8}$ ○
$(1,\ 4)$ ○	$(0,\ 5)$ ○	$17+\sqrt{5}+\sqrt{32}$ ○
$(1,\ -4)$ ○	$(0,\ -5)$ ○	$\sqrt{17}+5+4\sqrt{2}$ ○

Ćwiczenie 7

Wskaż wszystkie wartości parametru m, dla których układ równań $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + m \\ y = 4x + 1 \end{cases}$ jest sprzeczny.

- [ ] -3
- [ ] -10
- [ ] -1
- [ ] 5
- [ ] -20
- [ ] -5
- [ ] 3

Ćwiczenie 8

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} y = -|x + 1| + 1 \\ y = x^2 + 2x \end{cases}$.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Interpretacja geometryczna układu równań typu $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = cx + d \end{cases}$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

IV. Układy równań

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;

3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci $\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases}$ lub $\begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wykresy funkcji liniowej i kwadratowej do graficznego rozwiazywania układów równań
- odczytuje liczbę rozwiązań układu równań na podstawie wykresów prostej i paraboli
- odczytuje z wykresu współrzędne punktów wspólnych prostej i paraboli
- tworzy i wykorzystuje algorytmy rozwiązywania układów równań

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem apletu
- stacje eksperckie

Formy pracy:

- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego
- praca w grupach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Chętni uczniowie przygotowują informacje na podane przez nauczyciela tematy:

- wykres funkcji liniowej,
- wykres funkcji kwadratowej,
- graficzna interpretacja układu równań postaci $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = cx + d \end{cases}$.

Faza wstępna:

3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
4. Uczniowie przypominają sobie w parach informacje dotyczące rysowania wykresów funkcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie – eksperci w dowolnej formie przedstawiają przygotowane przez siebie informacje.
2. Pracując w parach metodą analizy przypadku, uczniowie analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj” i aplecie.
3. Nauczyciel oraz eksperci wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
4. Uczniowie wspólnie wykonują polecenie umieszczone pod apletem.
5. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy, które podchodzą do stacji zadaniowych przygotowanych przez ekspertów. Każda z grup rozwiązuje przygotowane przez nich zadania.
6. Eksperci wspierają pozostałych uczniów, wyjaśniają wątpliwości. Nauczyciel nadzoruje pracę grup.
7. Po wykonaniu zadań z danego zakresu, grupy zadaniowe przechodzą do kolejnej stacji.
8. Uczniowie w parach rozwiązują zadania zawarte w materiale multimedialnym. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszycie, sprawdzając w materiale ich poprawność.

Faza podsumowująca:

1. Przedstawiciele grup krótko omawiają trudności, na jakie natknęli się podczas rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- Definicja funkcji liniowej
- Równanie kwadratowe
- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Wskazówki metodyczne:

Aplet może być wykorzystany przez uczniów do ćwiczeń w rysowaniu interpretacji geometrycznej układów równań, a także do sprawdzania poprawności wykonanych przez siebie wykresów. Aplet można wykorzystać na zajęciach pokazujących wzajemne położenie prostej i paraboli.