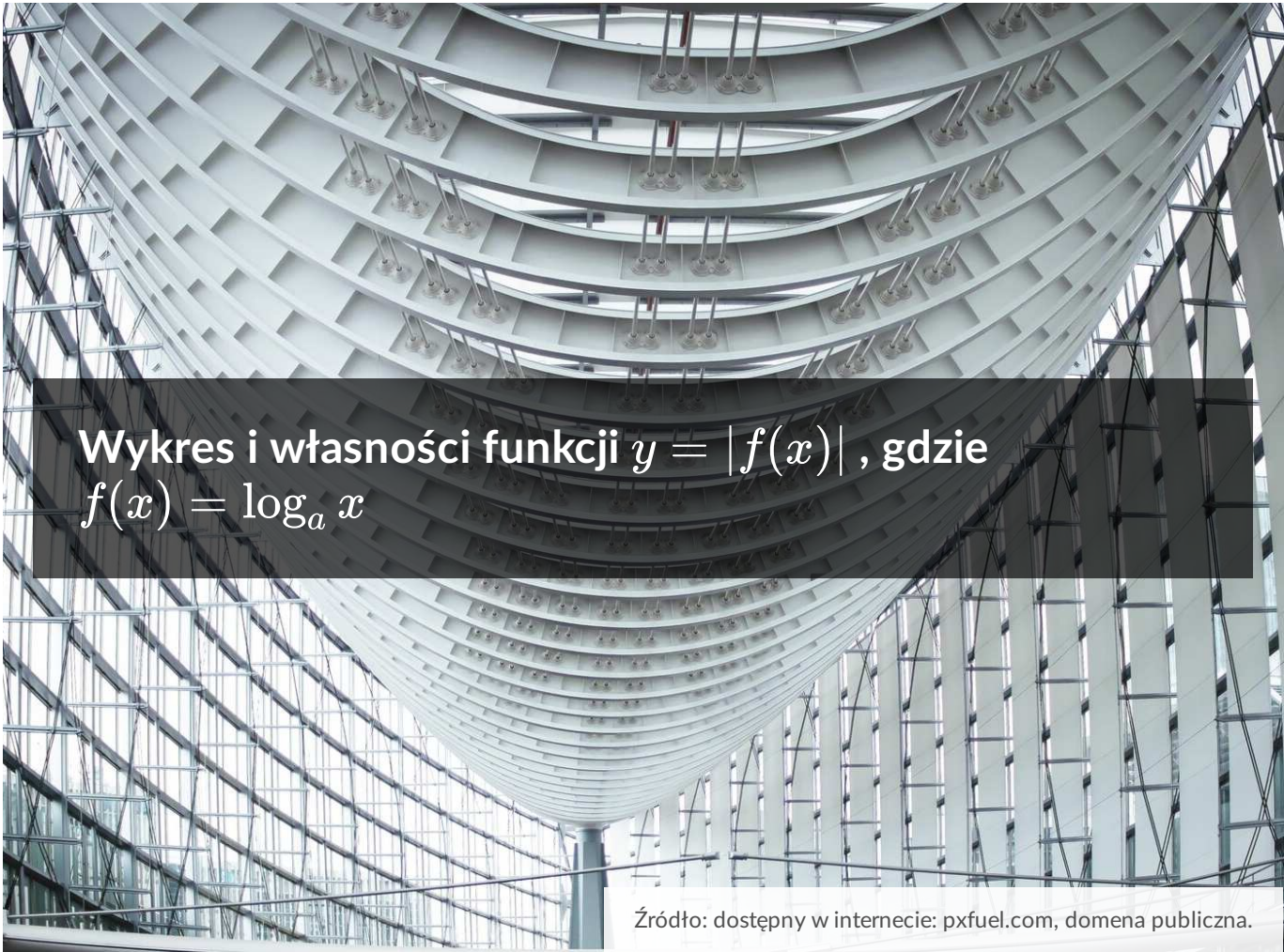




Wykres i własności funkcji $y = |f(x)|$, gdzie $f(x) = \log_a x$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykres i własności funkcji $y = |f(x)|$, gdzie $f(x) = \log_a x$

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

W tej lekcji omówimy wykres i własności funkcji logarytmicznej, jeżeli na wzór tej funkcji złożymy z wartością bezwzględną. Wykres takiej funkcji otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi odciętych tej części wykresu, która znajduje się pod osią X . Zwrócimy uwagę na to, jak zmieniają się wartości oraz inne własności dla funkcji logarytmicznej w wyniku takiego przekształcenia jej wykresu.

Twoje cele

- Określisz własności wykresu funkcji logarytmicznej po przekształceniu symetrycznym względem osi odciętych.
- Wyznaczysz wzór funkcji logarytmicznej na podstawie własności i informacji o jej wykresie.
- Przekształcisz wykresy funkcji logarytmicznych.

Przeczytaj

Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej, liczba $|x|$ jest zawsze nieujemna.

Funkcję określoną wzorem $f(x) = |\log_a x|$ oraz $a > 1$ definiujemy w postaci:

- $f(x) = \log_a x$ dla $x \geq 1$,
- $f(x) = -\log_a x$ dla $x \in (0, 1)$.

Analogicznie definiuje się $f(x) = |\log_a x|$, gdy $a \in (0, 1)$.

Ciekawostka

Wykres funkcji

przekształcenie wykresu funkcji $|f(x)|$ dla $f(x) = \log_a x$ znajduje się zawsze w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

Wynika to z faktu, że wartość bezwzględna przyjmuje tylko wartości nieujemne.

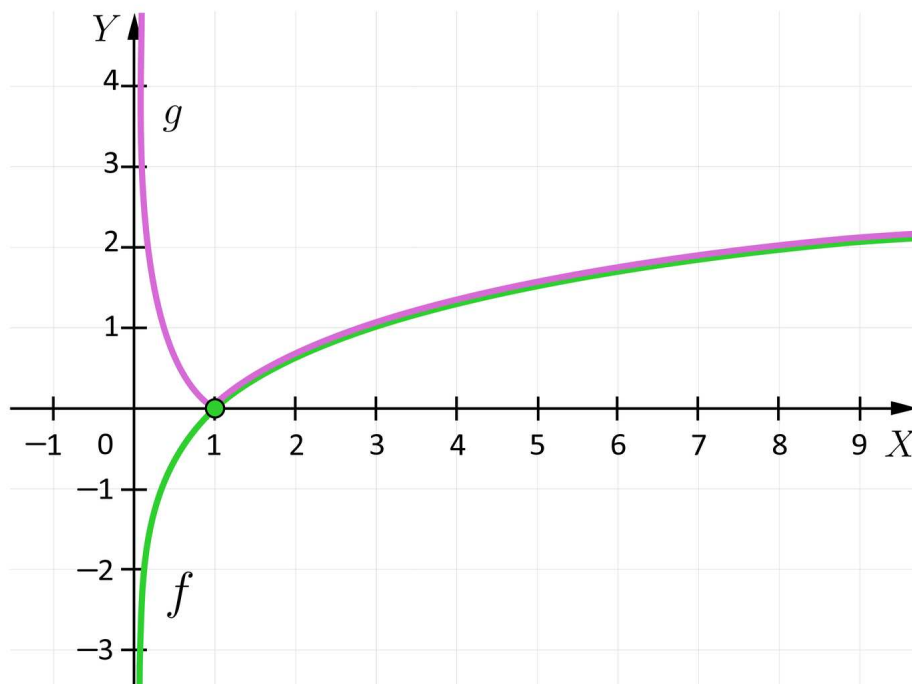
Naszkicujemy wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = |\log_3 x|$.

W tym celu posłużymy się wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_3 x$.

Wartości dla wybranych argumentów funkcji f i g przedstawimy w tabeli:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f(x)$	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	2	1	0	1	2

Wykresy tych funkcji przedstawiono na poniższym rysunku:



Przy szkicowaniu wykresu funkcji $f(x) = |\log_a x|$ należy:

- pozostawić bez zmian tę część wykresu, która znajduje się nad osią X ,
- odbić symetrycznie względem osi X tę część wykresu, która znajduje się pod osią odciętych.

Analizując wzory oraz wykresy tych funkcji możemy zauważyć, że:

- dla $x \in (0, 1)$ wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi X układu współrzędnych,
- zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych, zaś zbiorem wartości funkcji g jest zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych,
- funkcja f jest rosnąca, a funkcja g jest przedziałami monotoniczna: dla $x \in (0, 1)$ jest malejąca, dla $x \in \langle 1, \infty)$ jest rosnąca.

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}} x + 2 \right|$.



Z wykresu odczytamy:

- a) zbiór wartości tej funkcji,
- b) wartość funkcji dla argumentu 8,
- c) przedziały monotoniczności tej funkcji.

Rozwiązanie:

- a) Zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór $\langle 0, \infty \rangle$.
- b) Wartość funkcji dla argumentu 8 wynosi 1.
- c) Funkcja jest malejąca w przedziale $(0, 4)$ oraz rosnąca w przedziale $\langle 4, \infty \rangle$.

Przykład 2

Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = |\log_2 x - 1|$. Wyznamy, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 1.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $x \in (0, \infty)$.

W celu wyznaczenia argumentów, dla których wartość funkcji wynosi 1 rozwiążemy równanie $|\log_2 x - 1| = 1$.

Zatem $\log_2 x - 1 = 1$ lub $\log_2 x - 1 = -1$.

Rozwiązaniami równań są odpowiednio liczby: 4 lub 1. Zatem funkcja przyjmuje wartość 1 dla argumentów 1 oraz 4.

Jeżeli podane są współrzędne punktu, różnego od $(1, 0)$, który należy do wykresu funkcji logarytmicznej złożonej z funkcją wartość bezwzględna, wówczas możemy wyznaczyć jej wzór oraz własności.

Przykład 3

Do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = |\log_a x|$ należy punkt o współrzędnych $(25, 4)$.

Wyznamy wzór tej funkcji i obliczymy wartość funkcji dla argumentu $\frac{1}{5}$.

W celu wyznaczenia wartości a rozwiążemy równanie:

$$4 = |\log_a 25|.$$

$$\text{Zatem } 4 = \log_a 25 \text{ lub } -4 = \log_a 25.$$

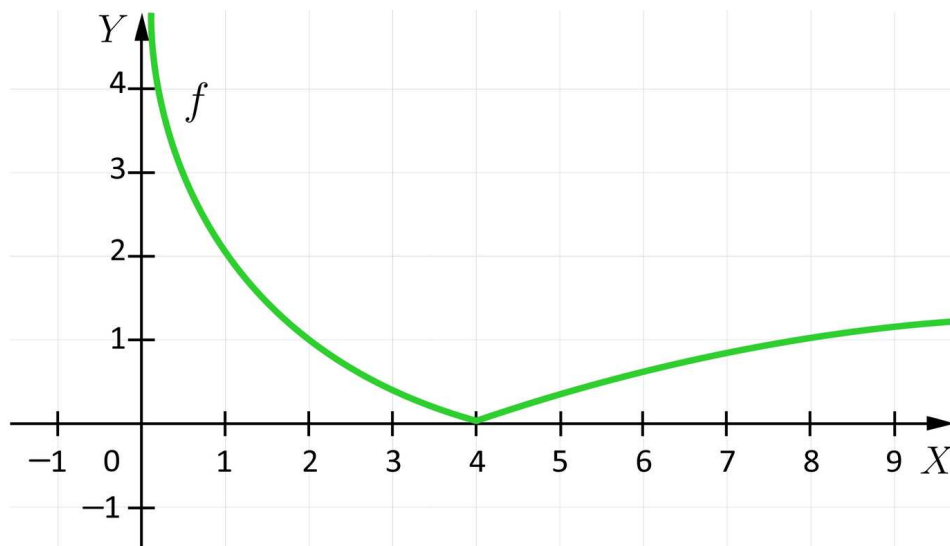
Rozwiązaniem równań są odpowiednio liczby $a = \sqrt{5}$ lub $a = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Funkcja może być w związku z tym opisana za pomocą wzorów $f(x) = |\log_{\sqrt{5}} x|$ lub $f(x) = \left| \log_{\frac{\sqrt{5}}{5}} x \right|$.

$$\text{Zatem } f\left(\frac{1}{5}\right) = \left| \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5} \right| = 2 \text{ lub } f\left(\frac{1}{5}\right) = \left| \log_{\frac{\sqrt{5}}{5}} \frac{1}{5} \right| = 2.$$

Przykład 4

Na wykresie przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = |\log_2 x + q|$.



Wyznamy:

a) wartość q ,

b) zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości większe od 1.

Rozwiązanie:

a) Do wykresu funkcji należą punkty o współrzędnych $(2, 1)$ i $(8, 1)$.

W celu wyznaczenia wartości q rozwiążemy równanie:

$$1 = |\log_2 2 + q|, \text{ zatem } 1 = |1 + q|.$$

Stąd $q = 0$ lub $q = 2$.

Dla $q = 0$ punkt o współrzędnych $(8, 1)$ nie należy do wykresu tej funkcji, bo $f(8) = |\log_2 8| = 3 \neq 1$, zatem funkcja jest określona za pomocą wzoru $f(x) = |\log_2 x + 1|$.

b) Z wykresu możemy odczytać, że $f(x) > 1$ dla $x \in (0, 2) \cup (8, \infty)$.

Słownik

funkcja logarytmiczna

funkcja określona wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ oraz $x > 0$

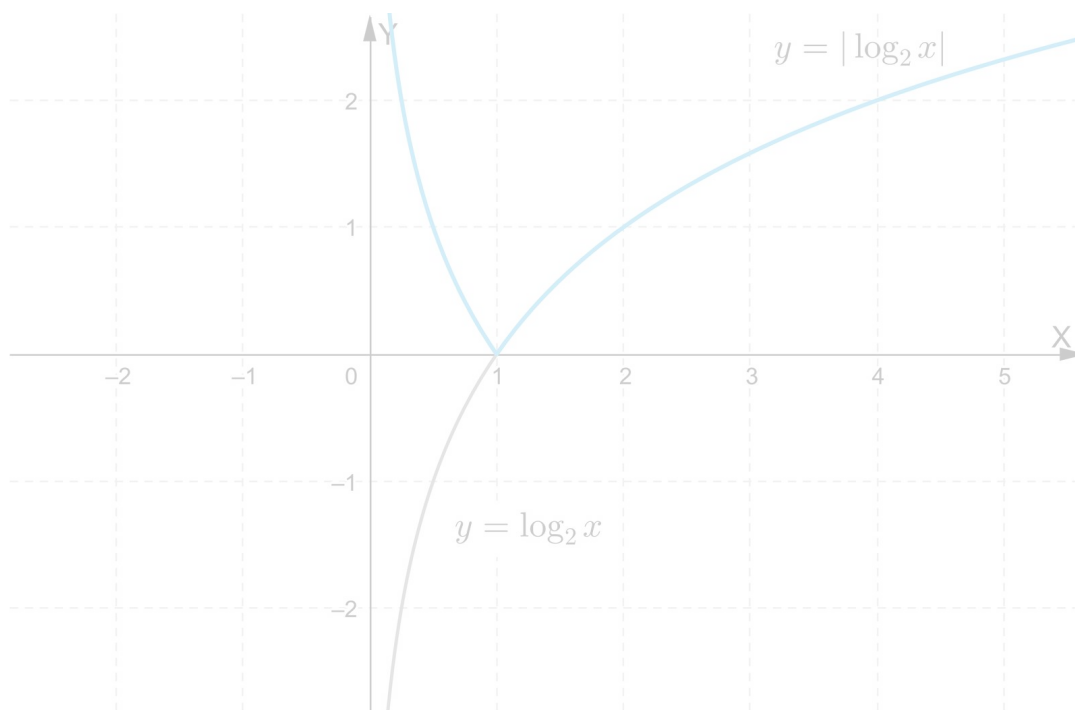
przekształcenie wykresu funkcji $|f(x)|$

odbicie symetryczne względem osi X tej części wykresu, która znajduje się pod osią X

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet dla funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_a x$, a następnie zaobserwuj, które własności funkcji logarytmicznej zmieniły się, gdy $y = |f(x)|$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Ds2fKxHUA>

Polecenie 2

Określmy funkcję f wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 2$. Niech $g(x) = |f(x)|$:

- naszkicuj wykres funkcji g ,
- wyznacz przedziały monotoniczności funkcji g .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Pogrupuj własności funkcji, zgodnie z opisem.

Własności funkcji określonej wzorem

$$f(x) = |\log_2 x - 1|:$$

Własności funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \left| \log_{\frac{1}{3}} x + 1 \right|:$$

miejscem zerowym jest liczba 3

funkcja jest malejąca
w przedziale $(0, 2)$

miejscem zerowym funkcji jest
liczba 2

do wykresu funkcji należy punkt
o współrzędnych $(9, 1)$

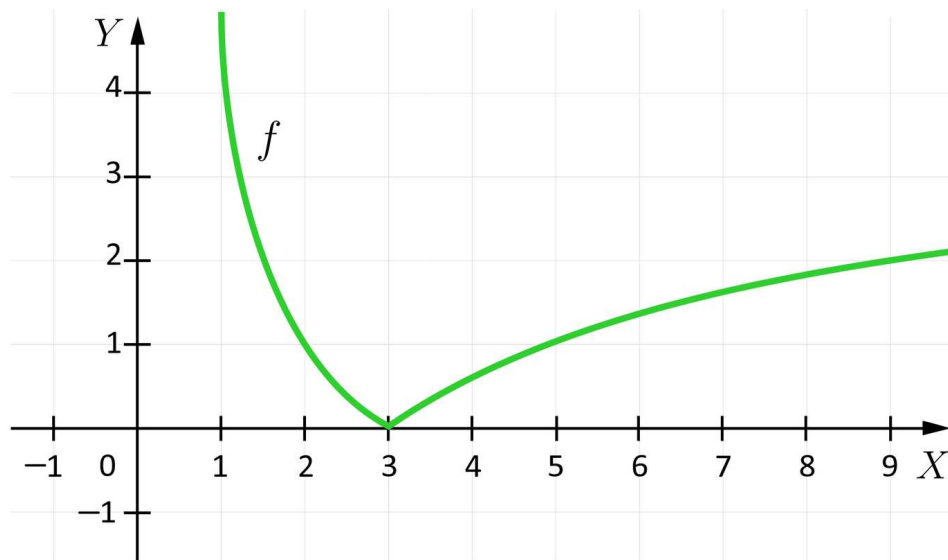
funkcja jest rosnąca w przedziale
 $(3, \infty)$

do wykresu funkcji należy punkt
o współrzędnych $(4, 1)$

Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = |\log_2(x - 1) - 1|$.



Liczba rozwiązań równania $f(x) = \sqrt{5}$ wynosi:

☐ 3

☐ 2

☐ 1

Ćwiczenie 3



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = |\log_2(x + 1) - 2|$.

Miejszem zerowym funkcji jest liczba .

Dla argumentu 1 funkcja przyjmuje wartość .

Funkcja przyjmuje wartość 2 dla dwóch argumentów: i .

Ćwiczenie 4



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Funkcja określona wzorem $f(x) = |\log_4(x - 1)|$:

- ☐ dla argumentów mniejszych od 5 przyjmuje wartości tylko większe od 1
- ☐ jest malejąca w przedziale $(1, 2)$
- ☐ przyjmuje tylko wartości niedodatnie

Ćwiczenie 5



Połącz w pary wzór funkcji ze współrzędnymi punktu, który należy do wykresu funkcji, określonej tym wzorem.

$$f(x) = |\log_2 x - 1|$$

$(1, 3)$

$$f(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \right|$$

$(3, 2)$

$$f(x) = \left| \log_{\frac{1}{3}} x - 3 \right|$$

$(8, 2)$

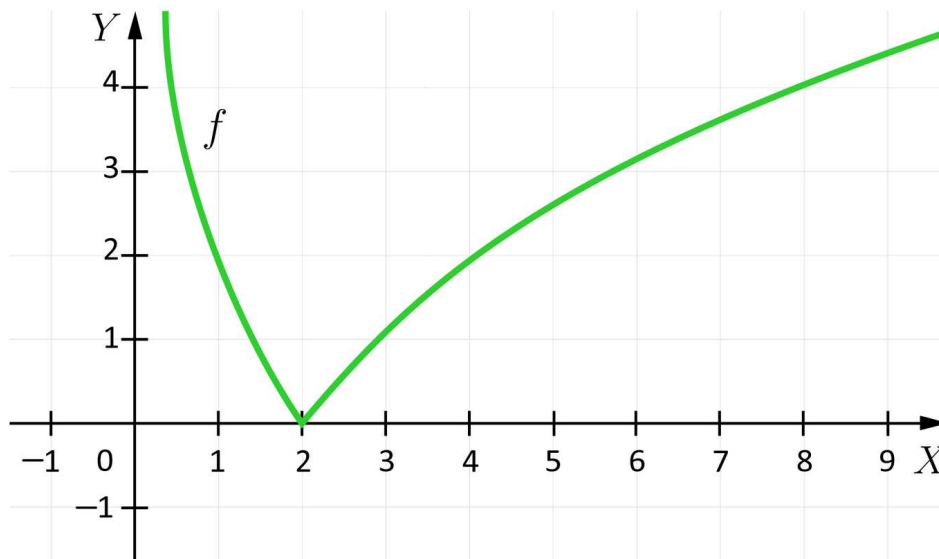
$$f(x) = |\log_3 x + 1|$$

$(1, 2)$

Ćwiczenie 6



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = |\log_{\sqrt{2}} x - 2|$.



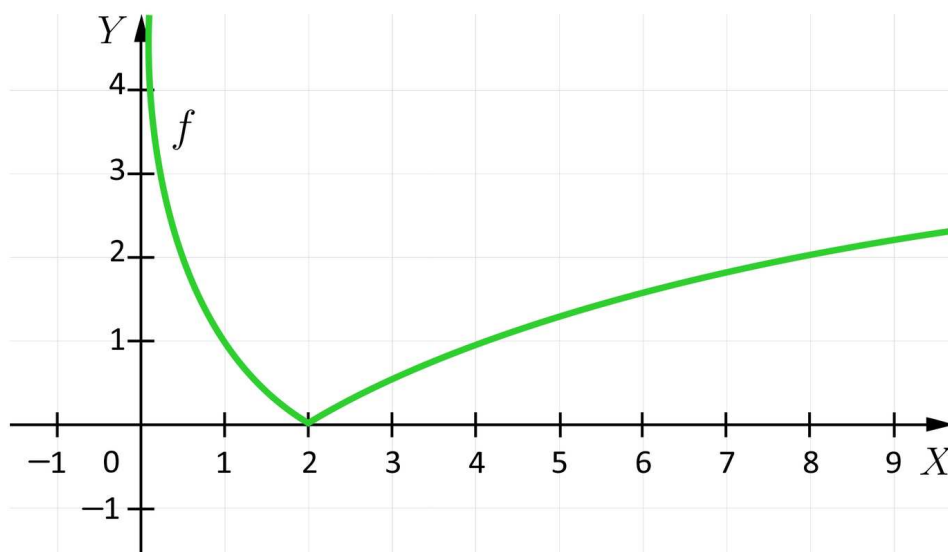
Wybierz wszystkie zdania, które są prawdziwe.

- ☐ Dla argumentów mniejszych od 4 funkcja przyjmuje tylko wartości mniejsze od 2.
- ☐ Równanie $f(x) = \sqrt{3}$ ma dwa rozwiązania.
- ☐ Funkcja jest rosnąca w przedziale $(0, 2)$.
- ☐ Miejscem zerowym funkcji jest liczba 2.

Ćwiczenie 7



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = |\log_2 x - 1|$.



Uzupełnij zdania.

Zbiorem wartości funkcji przedstawionej na wykresie jest przedział $\langle \text{ } , \infty \rangle$.

Do wykresu funkcji należy punkt o współrzędnych $(4, \text{ })$.

Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle \text{ } , \infty \rangle$.

Ćwiczenie 8



Określmy funkcję f wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x - 2$. Niech $g(x) = |f(x)|$.

Naszkicuj wykres funkcji g , a następnie określ liczbę rozwiązań równania $g(x) = m$ w zależności od parametru m , gdzie $m \in \mathbb{R}$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres i własności funkcji $y = |f(x)|$, gdzie $f(x) = \log_a x$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele nauczania – wymagania ogólne:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

14. posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zakres rozszerzony

1. na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych $f(x) = |\log_a x|$,
- odczytuje własności funkcji logarytmicznej określonej wzorem lub na podstawie wykresu;
- stosuje poznane własności do rozwiązywania problemów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do Internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji, dotyczące wykresu i własności funkcji $f(x) = |\log_a x|$.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego zapoznają się w grupach z materiałem w sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy są wspólnie omawiane i komentowane przez nauczyciela.

3. W kolejnym kroku uczniowie rozwiązują ćwiczenia numer 3, 4 i 5, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 6, a następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.
5. Kolejne ćwiczenia nr 6-8 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują na kartce problemy, które napotkali podczas rozwiązywania zadania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel prosi uczniów o podsumowanie zgromadzonej wiedzy.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wykres i własności funkcji $y = |f(x)|$, gdzie $f(x) = \log_a x$ ”).

Materiały pomocnicze:

- [Definicja logarytmu. Własności logarytmu.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał z sekcji „Aplet” można wykorzystać jako powtórzenie i utrwalenie wiadomości w tematyce przekształcania wykresów funkcji logarytmicznych.