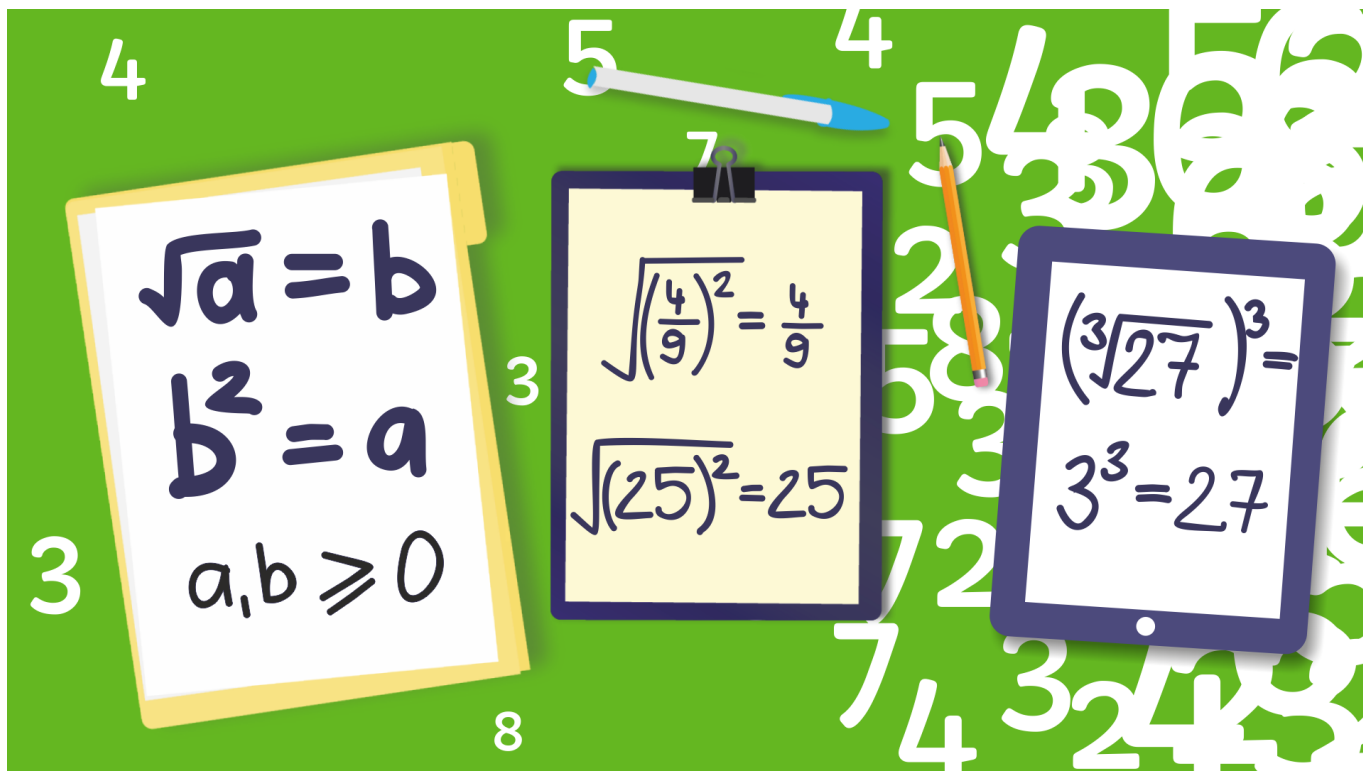
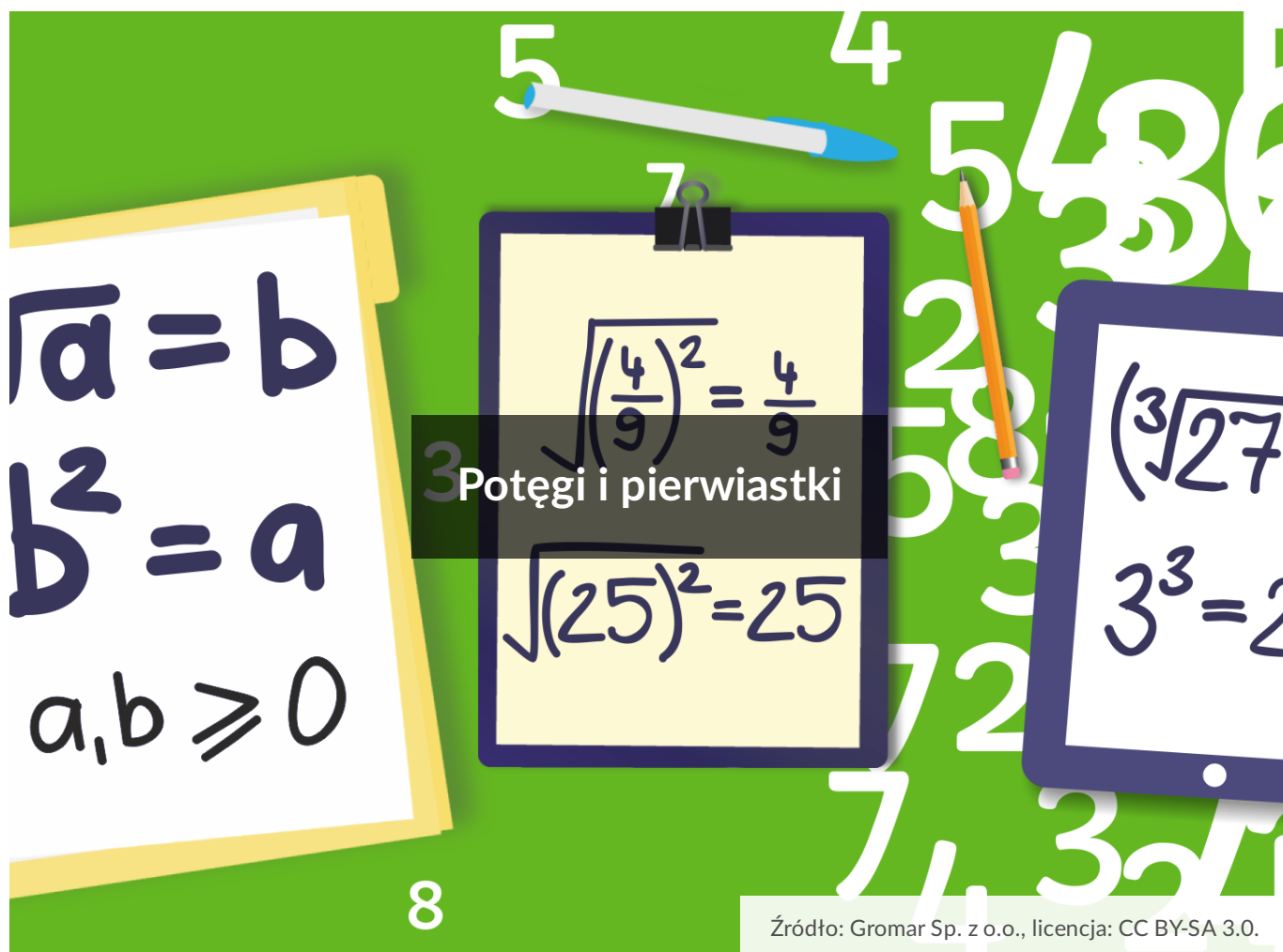




Potęgi i pierwiastki

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Czy wiesz, że w notacji angielskiej symbol pierwiastka występuje bez kreski poziomej?

Dokładnie nie wiadomo kto i kiedy po raz pierwszy użył symbolu pierwiastka kwadratowego. Niektóre źródła historyczne podają, że symbol ten znali już Arabowie w XV wieku. Inni zaś twierdzą, że dopiero na przełomie XVI i XVII wieku zaczęto używać symbolu podobnego do stosowanego współcześnie.

Każdy pierwiastek kwadratowy można zapisać za pomocą ułamka łańcuchowego. Liczbom wymiernym odpowiadają ułamki skończone, liczbom niewymiernym – ułamki nieskończone.

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \dots}}}}}$$

W czwartym wieku p.n.e Platon rozważał problem związany z podwojeniem sześcianu, czyli zbudowaniu sześcianu o objętości dwa razy większej niż dany, który sprowadzał się do konstrukcji odcinka o długości $\sqrt[3]{2}$. Sposobami obliczania przybliżonych wartości pierwiastków stopnia trzeciego, zajmował się między innymi w III wieku grecki matematyk Heron z Aleksandrii.

Obecnie symbolika związana z pierwiastkami zmieniła się – pierwiastki zapisujemy w postaci ... potęg! Zgroza!

Twoje cele

- Rozwiniesz umiejętności związane z wykonywaniem działań na potęgach i pierwiastkach.
- Dokonasz samooceny własnej pracy.

Taksonomia celów nauczania według Blooma



Benjamin Bloom

Źródło: Yeruhamdavid, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 4.0.

W 1956 r. amerykański psycholog i pedagog Benjamin Bloom zaprezentował klasyfikację celów kształcenia (obecnie zwaną **taksonomią Blooma**), w oparciu o poziom zrozumienia niezbędny do osiągnięcia danego celu. Zaproponował 6 etapów poznawczych w procesie uczenia się



Cele kształcenia według B. Blooma

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Podpunkty	Treść
1. Wiedza	Umiejętność przywoływania lub pamiętania słów, faktów i pojęć, bez konieczności rozumienia.
2. Zrozumienie	Umiejętność rozumienia i interpretowania nabytych informacji.
3. Zastosowanie	Umiejętność wykorzystania nabytych informacji w nowych sytuacjach np. wykorzystania wiedzy do rozwiązania nowego problemu.
4. Analiza	Umiejętność rozłożenia informacji na elementy składowe np. odnajdywanie wewnętrznych powiązań i idei.
5. Synteza	Umiejętność łączenia poszczególnych elementów w całość.
6. Ocena (ewaluacja)	Umiejętność oceny wartości informacji ze względu na dany cel.

Przykłady zadań związanych z potęgami i pierwiastkami sformułowanych zgodnie z [taksonomią Blooma](#).

1. Wiedza.

Podaj definicję potęgi o wykładniku naturalnym.

2. Zrozumienie.

Wśród podanych liczb, wskaż liczby niewymierne

$$0, (7), \sqrt[3]{-27} \cdot \pi, 3\sqrt{4}, -\sqrt{11}.$$

3. Zastosowanie.

Zapisz liczbę $\sqrt[3]{7^2}$ w postaci potęgi o wykładniku wymiernym.

4. Analiza.

Zapisz w postaci jednej potęgi $\frac{0,5 \cdot \sqrt{2}}{2^{-3} \cdot 2}$.

5. Synteza.

Wykaż, że liczba $8^{10} + 2^{33}$ jest podzielna przez 9.

6. Ocena (ewaluacja).

Omów korzyści i trudności wynikające z zapisywania pierwiastków w postaci potęg o wykładnikach wymiernych.

Potrzebna teoria

Taksonomię Blooma wykorzystasz oceniając swoje umiejętności rozwiązywania zadań związanych z potęgami i pierwiastkami.

Poniżej zostały przedstawione najważniejsze pojęcia, które warto sobie przypomnieć, przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań.

Definicja: Definicja pierwiastka

Jeśli $n \geq 2$ i $a \geq 0$ to $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

Jeśli $m \geq 2$, m – jest liczbą nieparzystą i $a < 0$ to $\sqrt[m]{a} = -\sqrt[m]{|a|}$.

Prawa działań na pierwiastkach, gdy $a, b \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Definicja: Definicja potęgi

$$a^0 = 1, \text{ gdy } a \neq 0$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \text{ gdy } a \neq 0$$

$$a^1 = a$$

$$a^n = a \cdot \underbrace{\dots\dots\dots}_{n\text{-czynników}} \cdot a, n \in \mathbb{N}_+$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ gdy } a \geq 0, n, m \in \mathbb{N}_+, n > 1$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \text{ gdy } a > 0, m, n \in \mathbb{N}_+, n > 1$$

Działania na potęgach, gdy $a, b \in \mathbb{R}_+ - \{0\}, m, n \in \mathbb{R}$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{nm}$$

Słownik

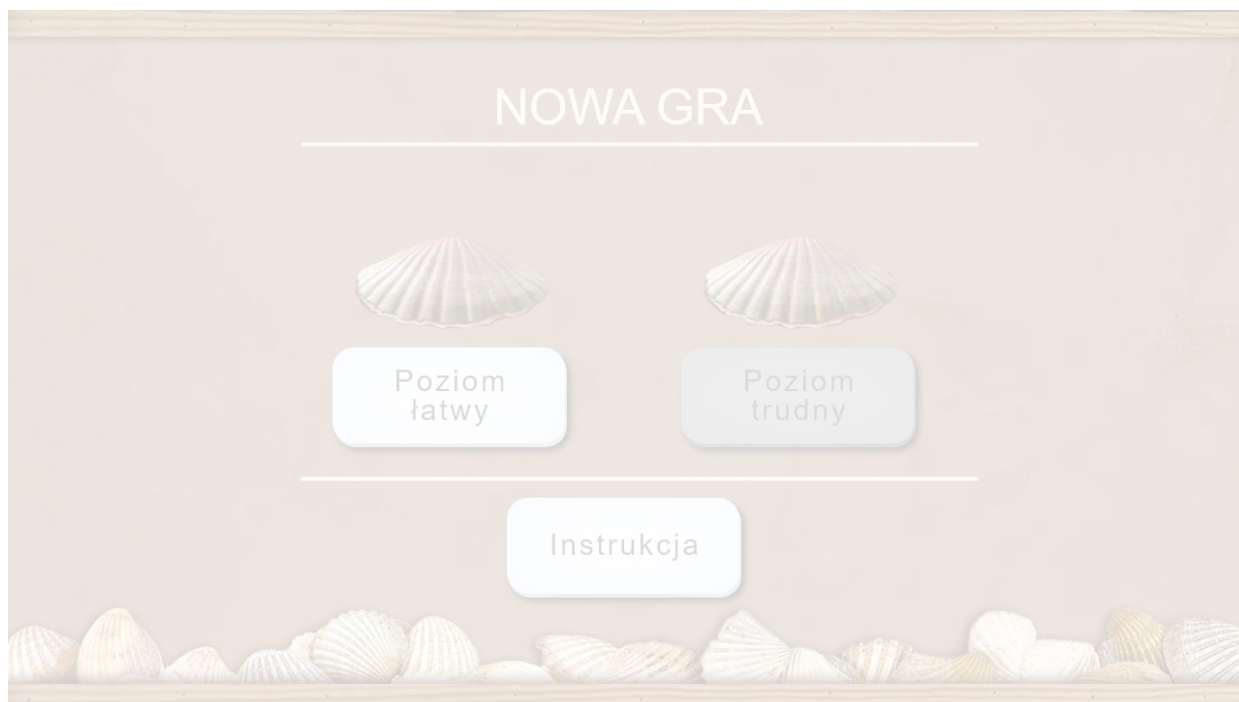
taksonomia Blooma

klasyfikacja celów nauczania, autorstwa B. Blooma

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Ułóż domino matematyczne. Staraj się większość obliczeń wykonywać w pamięci.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D5mUxFgxm>

Polecenie 2

Korzystając z przykładów zapisanych na kartach, ułóż 3 zadania. Daj je do rozwiązania koleżance lub koledze z klasy.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Przyporządkuj każde ze zadań do odpowiedniej kategorii w taksonomii Blooma.
Rozwiąż zadania, sprawdź odpowiedzi i oceń swoje umiejętności.

Ćwiczenie 1



Liczba x spełniająca warunek $24^{20} = \frac{12^{40}}{x}$ jest równa

☐ 6^{20}

☐ 2^{20}

☐ $\left(\frac{1}{2}\right)^{40}$

☐ 2^{40}

Ćwiczenie 2



Odwrotnością liczby $\left(2^{1-\sqrt{3}}\right)^{1+\sqrt{3}}$ jest liczba

☐ 4

☐ $\frac{1}{4}$

☐ -4

☐ $\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 3



Przyjmijmy, że prędkość światła jest równa $3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Krok olbrzyma ma 30 m długości. Ile kroków musiałby wykonać olbrzym, aby przebyć drogę, równą odległości jaką pokonuje światło w ciągu minuty?

☐ $6 \cdot 10^9$

☐ $6 \cdot 10^8$

☐ 10^6

☐ $6 \cdot 10^7$

Ćwiczenie 4



Wskaż liczby uporządkowane rosnąco.

☐ $3^{-\frac{3}{2}}, -3^{\frac{1}{2}}, 3^{0,5}, (\sqrt{3})^{-1}$

☐ $3^{0,5}, (\sqrt{3})^{-1}, -3^{\frac{1}{2}}, 3^{-\frac{3}{2}}$

☐ $-3^{\frac{1}{2}}, 3^{-\frac{3}{2}}, (\sqrt{3})^{-1}, 3^{0,5}$

Ćwiczenie 5



Liczba $a = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}}$ spełnia warunek

☐ $0 < a < 2$

☐ $-2 < a < -1$

☐ $-1 < a < 0$

☐ $-3 < a < -2$

Ćwiczenie 6



Przedstaw liczbę $\frac{(125)^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{1}{5})^{-2} \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{5})^{-1}}$ w postaci a^n , gdzie a jest liczbą naturalną.

Ćwiczenie 7



Wykaż, że liczba $10^{2020} + (\sqrt{18} - \sqrt{8})^2$ jest podzielna przez 3.

Ćwiczenie 8



Zapisz wyrażenie $(x - 2\sqrt{7})^2 + (x - 2\sqrt{7}) \cdot (x + 2\sqrt{7}) + 4x\sqrt{7}$ w prostszej postaci i oblicz jego wartość dla $x = \sqrt{\sqrt{7}\sqrt{49}}$.

Ćwiczenie 9



Połącz w pary liczbę z jej odwrotnością.

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} - 1$$

$$(\sqrt{2} - 1)^2$$

$$\sqrt{2} + 1$$

$$\sqrt{2} - 1$$

$$2^{-4}$$

$$(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

$$3 + 2\sqrt{2}$$

Ćwiczenie 10



Rozwiąż równanie i przeciągnij w odpowiednie miejsce liczbę, będącą jego rozwiązaniem.

$$x\sqrt{3} = x\sqrt{2} + \sqrt{3} , \quad \boxed{}$$

$$x\sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} , \quad \boxed{}$$

$$x - \sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{3}} , \quad \boxed{}$$

$$3 - x\sqrt{3} = x\sqrt{3} + \sqrt{3} , \quad \boxed{}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

$$x = 3 + \sqrt{6}$$

$$x = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Potęgi i pierwiastki

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste.

Uczeń:

4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwija umiejętności związane z wykonywaniem działań na potęgach i pierwiastkach
- dokonuje samooceny własnej pracy
- ocenia stopień trudności zadań i klasyfikuje je, korzystając z teorii Blooma
- rozważa różne strategie rozwiązania zadania, w zależności od celu, który chce osiągnąć

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- gra edukacyjna
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów, aby w ramach pracy domowej zapoznali się z opisami i klasyfikacją zadań zamieszczanych na arkuszach maturalnych, zwracając uwagę na przyporządkowanie ich do określonych kategorii wiedzy i umiejętności.

Faza wstępna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach. Każda z grup zapisuje na tablicy po 2 niedługie zadania matematyczne.
2. Teraz uczniowie wspólnie próbują przyporządkować każde z zadań do jednej z kategorii: wiedza, rozumienie, zastosowanie, analiza, synteza, ocena. Przy każdym z zadań zapisują ustalenia.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach. Każda z par zapoznaje się z materiałem teoretycznym zawartym w sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie wspólnie analizują zapisy przy zadaniach na tablicy (przyporządkowujące zadania do odpowiedniej kategorii), ustalają, dyskutując, ostateczne wersje.
3. Praca w parach – układanie domina matematycznego.
4. Każda z par uczniów układa 3 zadania matematyczne. Jedno z kategorii „niższych” (wiedza, zrozumienie), drugie z kategorii „średnich” (zastosowanie, analiza), jedno z kategorii najwyższych (synteza, ocena). Uczniowie mogą przy tym korzystać z poniższej tabelki.

Etapy	
poznawcze	Czasowniki operacyjne (wg. B. Blooma), źródło: > https://www.cerno.pl/blog/47-taksonomia-celow-szkoleniowych-ben
w procesie	
uczenia się (wg. B. Blooma)	

Etapy poznawcze w procesie uczenia się (wg. B. Blooma) Czasowniki operacyjne (wg. B. Blooma), źródło: https://www.cerno.pl/blog/47-taksonomia-celow-szkoleniowych-ben	
1. Wiedza	Definiować, opisywać, wyliczyć, znaleźć, nazwać, rozpoznać, pokazać, po zaprezentować, >odnieść, powtórzyć.
2. Zrozumienie	Powiązać, wyjaśnić, zakwalifikować, dostosować, opisać, rozróżnić, oszac uogólnić, rozpoznać, >zilustrować, przetłumaczyć, zinterpretować.
3. Zastosowanie	Wdrażać, obliczać, zmieniać, wybierać, budować, pokazywać, rozwijać, z iłustrować, >organizować, produkować, wybierać, rozwiązywać, używać, modyfikować.
4. Analiza	Analizować, ułożyć, rozbić, obliczać, kategoryzować, zaklasyfikować, porć powiązać, >przedyskutować, rozpoznać, rozdzielać, podkreślać, oddziela odnieść, zidentyfikować.
5. Synteza	Uzasadniać, komponować, kompilować, budować, rozwijać, wyjaśniać, for uogólniać, integrować, >modyfikować, organizować, planować, przygotov rekonstruować, podsumowywać, streszczać.
6. Ocena (ewaluacja)	Ocenić, oszacować, argumentować, porównać, konkludować, przekonać bronić, wyjaśniać >interpretować, polecać, osądzać, wspierać, przewidyw streszczać.

5. Pary uczniów wymieniają się rozwiązanymi zadaniami, rozmawiają wspólnie, czy poprawnie była określona kategoria zadania.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
2. Wybrani uczniowie dokonują samooceny własnej pracy.

Praca domowa:

Stworzenie w parach (lub grupach 3 – 4 osobowych) domina matematycznego składającego się z 20 kart, zawierającego pytania z teorii liczb i przyniesienie na następną lekcję w takiej postaci, aby inni mogli z niego korzystać (zadania na sztywnych, pociętych karteczkach).

Materiały pomocnicze:

Taksonomia Blooma

Wskazówki metodyczne:

Domino można wykorzystać jako mini – sprawdzian umiejętności uczniów w zakresie działań na potęgach i pierwiastkach. Przy czym uczniowie mogą pracować w parach lub indywidualnie.