



Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych

Źródło: Markus Spiske, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Istnieje wiele różnych sposobów przedstawienia tej samej liczby rzeczywistej. Każdą liczbę wymierną można zapisać jako skończoną sumę różnych ułamków egipskich (czyli ułamków o liczniku równym 1) lub jako skończony ułamek łańcuchowy o licznikach równych 1 (np. $\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}$). Liczby niewymierne zdają się być “trudniejsze do uchwycenia”.

Pitagorejczycy wierzyli, że wszystko na świecie można opisać liczbami, ale ponieważ dobrze znali tylko liczby wymierne, długość przekątnej kwadratu uznali za coś tak dziwnego, że (podobno pod groźbą śmierci) zabroniono rozmawiać na ten temat z ludźmi spoza kręgu Pitagorasa.

W tej lekcji zajmiemy się przedstawieniami liczb wymiernych i niewymiernych w postaci rozwinięcia dziesiętnego mając na celu oswojenie się z ich “skomplikowaną” naturą.

Twoje cele

- Wyznaczysz rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych.
- Rozpoznasz rozwinięcia dziesiętne liczb niewymiernych.
- Przedstawisz ułamek okresowy w postaci ułamka zwykłego.

Przeczytaj

Rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych

Przypomnijmy, że aby wyznaczyć rozwinięcie dziesiętne liczby wymiernej, wystarczy przedstawić ją w postaci ułamka zwykłego (być może niewłaściwego), a następnie wykonać dzielenie licznika przez mianownik tego ułamka. Przy czym dzielenia nie kończymy w chwili, gdy pojawia się reszta z dzielenia. Wówczas w ilorazie stawiamy przecinek (separator) dziesiętny równocześnie dopisując zero po prawej stronie reszty i kontynuujemy dzielenie.

Rozważmy kilka przykładów.

Przykład 1

Obliczymy:

a)

$$\begin{array}{r} 50,6 \\ \hline 253 : 5 \\ - 25 \downarrow \\ \hline 3 \\ - 0 \\ \hline 30 \\ - 30 \\ \hline = = \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r}
 586,75 \\
 \hline
 2347 : 4 \\
 - 20 \downarrow \\
 \hline
 34 \downarrow \\
 - 32 \downarrow \\
 \hline
 27 \\
 - 24 \\
 \hline
 30 \\
 - 28 \\
 \hline
 20 \\
 - 20 \\
 \hline
 ==
 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r}
 7098,125 \\
 \hline
 56785 : 8 \\
 - 56 \downarrow \\
 \hline
 07 \downarrow \\
 - 0 \downarrow \\
 \hline
 78 \downarrow \\
 - 72 \downarrow \\
 \hline
 65 \\
 - 64 \\
 \hline
 10 \\
 - 8 \\
 \hline
 20 \\
 - 16 \\
 \hline
 40 \\
 - 40 \\
 \hline
 ==
 \end{array}$$

d)

Przykład 2

Rozważmy liczbę $1\frac{3}{20} = \frac{23}{20}$.

Ponieważ w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 20 występują tylko potęgi liczb 2 i 5 ($20 = 2^2 \cdot 5$), więc rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{23}{20}$ jest skończone.

Mianownik liczby $2\frac{5}{6} = \frac{17}{6}$ w rozkładzie na czynniki pierwsze zawiera liczbę 3 ($6 = 2 \cdot 3$) oraz ułamek ten jest nieskracalny.

Oznacza to, że jego rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone okresowe.

Przykład 3

Zamienimy liczby o podanym rozwinięciu dziesiętnym na ułamek zwykły.

a) $2,13 = 2\frac{13}{100}$ lub $2,13 = \frac{213}{100}$

b) $12,468 = 12\frac{468}{1000} = 12\frac{117}{250}$ lub $12,468 = \frac{12468}{1000} = \frac{3117}{250}$

Na przykładzie przypomnimy, w jaki sposób można liczby o rozwinięciach okresowych przedstawiać w postaci ułamków zwykłych. Więcej przykładów znajdziesz w animacji uzupełniającej lekcję.

Przykład 4

Przedstawimy podane liczby w postaci ułamków zwykłych.

$0,1(23)$

Niech $x = 0,123232323\dots$

Możemy pomnożyć obie strony równości przez potęgę dziesiątki o wykładniku, który jest równy długości okresu liczby $0,1(23)$, czyli przez $10^2 = 100$.

Otrzymamy wówczas równość

$$100x = 12,323232323\dots$$

Po odjęciu lewej strony pierwszej równości od lewej strony drugiej równości i prawej strony pierwszej równości od prawej strony drugiej równości, otrzymujemy

$$100x - x = 12,323232323\dots - 0,123232323\dots$$

$$99x = 12,2$$

$$x = \frac{12,2}{99}$$

$$x = \frac{122}{990}$$

$$x = \frac{61}{495}$$

Rozwinięcia dziesiętne liczb niewymiernych

Jest wiele sposobów znajdowania rozwinięć dziesiętnych liczb niewymiernych: komputery wykorzystują rozwinięcia funkcji w szereg Taylora (do tego potrzebne jest pojęcie pochodnej funkcji); istnieje algorytm pierwiastkowania pisemnego (nieco trudniejszy niż algorytm dzielenia pisemnego) oparty na dość elementarnych wzorach algebraicznych.

W praktyce wykorzystujemy dziś kalkulator, komputer lub tablice matematyczne.

Zanotujmy początki rozwinięć dziesiętnych wybranych liczb niewymiernych:

$$\pi = 3,14159264\dots$$

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508\dots$$

$$\sqrt{5} = 2,23606797\dots$$

$$\sqrt{6} = 2,44948974\dots$$

$$\sqrt{7} = 2,64575131\dots$$

$$\sqrt{10} = 3,1622776\dots$$

$$\sqrt{11} = 3,3166247\dots$$

$$\sqrt{13} = 3,60555127\dots$$

$$\sqrt{14} = 3,74165738\dots$$

$$\sqrt{15} = 3,87298334\dots$$

Na przykładzie liczby $\sqrt{5}$ prześledźmy, jak kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego przybliżają jej wartość. Przypomnijmy, że pierwiastek kwadratowy z liczby nieujemnej a to taka liczba b , która podniesiona do kwadratu równa się liczbie a .

| Przybliżenie liczby $\sqrt{5}$ | Kwadrat przybliżenia |
|--------------------------------|----------------------|
| 2 | 4 |
| 2, 2 | 4, 84 |
| 2, 23 | 4, 9729 |
| 2, 236 | 4, 999696 |

| Przybliżenie liczby $\sqrt{5}$ | Kwadrat przybliżenia |
|--------------------------------|----------------------|
| 2, 23606 | 4, 9999643236 |
| 2, 236067 | 4, 999995628489 |
| 2, 2360679 | 4, 99999965341041 |

Rozwinięcie dziesiętne liczby $\sqrt{5}$ jest nieskończone i nieokresowe – im więcej cyfr weźmiemy, tym dokładniejsze będzie przybliżenie.

Przykład 5

Wyznamy rozwinięcia dziesiętne wskazanych liczb niewymiernych z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx \frac{1,4142-1}{2} = \frac{0,4142}{2} = 0,2071 \approx 0,207$$

$$\frac{\sqrt{7}+1}{2} \approx \frac{2,6457+1}{2} = \frac{3,6457}{2} = 1,82285 \approx 1,823$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \approx 2 \cdot 1,73205 = 3,4641 \approx 3,464$$

Podsumujmy powyższe rozważania w postaci twierdzenia.

Twierdzenie: Liczba wymierna i niewymierna

Liczba jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jej rozwinięcie dziesiętne jest skończone lub okresowe.

Liczba jest niewymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jej rozwinięcia dziesiętne jest nieskończone i nieokresowe.

Słownik

okres

grupa cyfr w określonej kolejności, która powtarza się w rozwinięciu dziesiętnym liczby wymiernej

długość okresu

liczba cyfr w okresie

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w animacji. Na ich podstawie wykonaj polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dhpl4CHss>

Filmik dotyczący rozwinięcia dziesiętnego.

Polecenie 2

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci rozwinięcia dziesiętnego okresowego.

Tak Nie Nie można stwierdzić jednoznacznie

Liczba $\frac{1}{5}$ jest równa:

0, 2 0, 1(9) $\sqrt{0,04}$

Rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{2\sqrt{3}+3}{2}$ z dokładnością do trzech cyfr po przecinku to:

3, 23 3, 233 3, 232

Rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{8}{7}$ jest równe:

11, (142858) 1, (142856) 1, (142857)

Kwadrat rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{6}$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku jest równy:

5, 992704 5, 997601 6, 0025

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

Przedstaw liczbę $0, (37)$ w postaci ułamka zwykłego.



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5

Częścią całkowitą (lub podłogą) liczby x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x . Część całkowitą liczby x oznaczamy $[x]$.



Na przykład:

$$[4] = 4$$

$$[3, 14] = 3$$

$$[\sqrt{2}] = 1$$

$$[-1, 5] = -2$$

$$[-\pi] = -4$$

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8



Częścią ułamkową (mantysą) liczby x nazywamy liczbę $\{x\} = x - [x]$,

gdzie:

$[x]$ – oznacza część całkowitą liczby x .

Przykłady:

$$\{\pi\} = \pi - [\pi] = \pi - 3 = 0,141592653589732\dots$$

$$\{2,123\} = 2,123 - [2,123] = 2,123 - 2 = 0,123$$

$$\{-4,3\} = -4,3 - [-4,3] = -4,3 - (-5) = -4,3 + 5 = 0,7$$

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Wyznaczysz rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych.

- Rozpoznasz rozwinięcia dziesiętne liczb niewymiernych.
- Przedstawisz ułamek okresowy w postaci ułamka zwykłego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda kosza i walizki;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie nr 1 w sekcji „Animacja” – „Przeanalizuj informacje zawarte w animacji. Na ich podstawie wykonaj polecenie.” – prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione – nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończony na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

[Zbiór liczb rzeczywistych. Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych”.