



Przedział liczbowy ograniczony

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Przedział liczbowy ograniczony

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W matematyce rozróżniamy różnego rodzaju zbiory. Jednym z kryteriów rozróżniania zbiorów jest ich liczebność. Przypomnijmy, że zapis $\{1, 2, 3\}$ oznacza zbiór, którego jedynymi elementami są liczby 1, 2 i 3. Jest to przykład zbioru skończonego trzelementowego. Omówiliśmy już też przykłady zbiorów o nieskończonej liczbie elementów, np. zbiór liczb naturalnych $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$. Innym przykładem zbiorów nieskończonych są przedziały, które szczegółowo omówimy w tej lekcji.

Twoje cele

- Zapiszesz rozwiązanie nierówności podwójnej przy pomocy przedziału.
- Zilustrujesz rozwiązanie nierówności podwójnej na osi liczbowej.

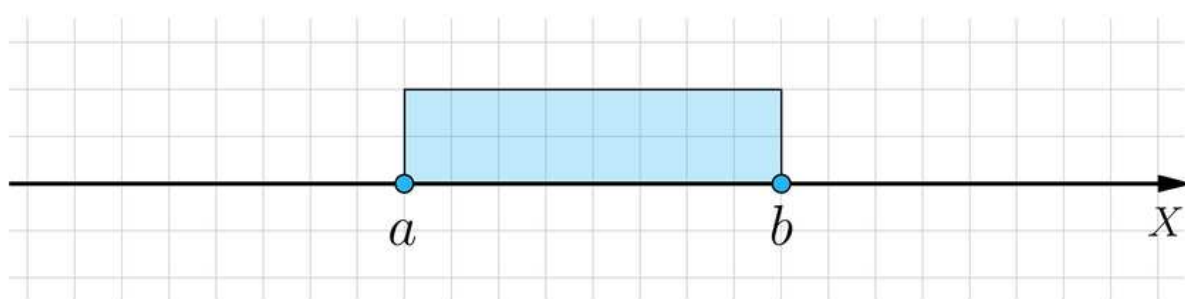
Przeczytaj

Ogólnie mówiąc przedziałem nazywamy pewien podzbiór zbioru liczb rzeczywistych o nieskończenie wielu elementach, który zawiera wszystkie liczby z podanego zakresu.

W tej lekcji skupimy się na omówieniu przedziałów ograniczonych. Wyróżniamy cztery ich rodzaje. Ustalmy najpierw dwie liczby rzeczywiste a i b , dla których zachodzi warunek $a < b$.

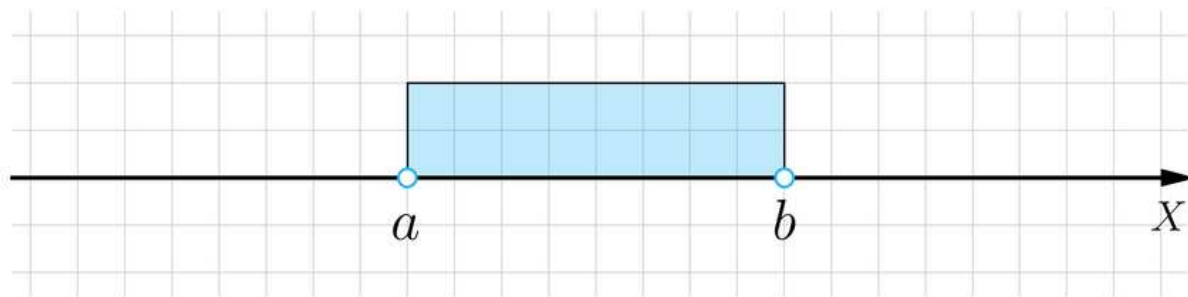
Przedziałem obustronnie domkniętym o końcach a i b nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , które spełniają warunek $a \leq x \leq b$. Fakt, że x należy do przedziału obustronnie domkniętego o końcach a i b możemy zapisać następująco $x \in \langle a, b \rangle$.

Przedział obustronnie domknięty możemy zilustrować na osi liczbowej pamiętając o umowie, że końce przedziału zaznaczamy wyraźnie zamalowanymi kółeczkami:



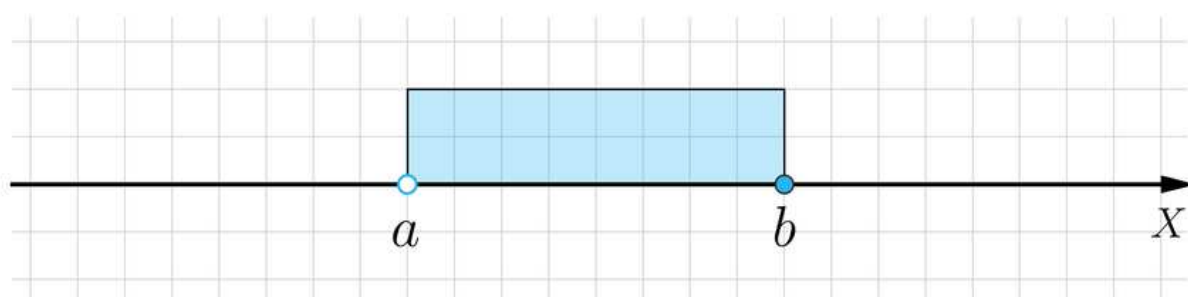
Przedziałem obustronnie otwartym o końcach a i b nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , które spełniają warunek $a < x < b$. Fakt, że x należy do przedziału obustronnie otwartego o końcach a i b możemy zapisać następująco $x \in (a, b)$.

Przedział obustronnie otwarty możemy zilustrować na osi liczbowej pamiętając o umowie, że końce przedziału zaznaczamy kółeczkami, które nie są zamalowane:



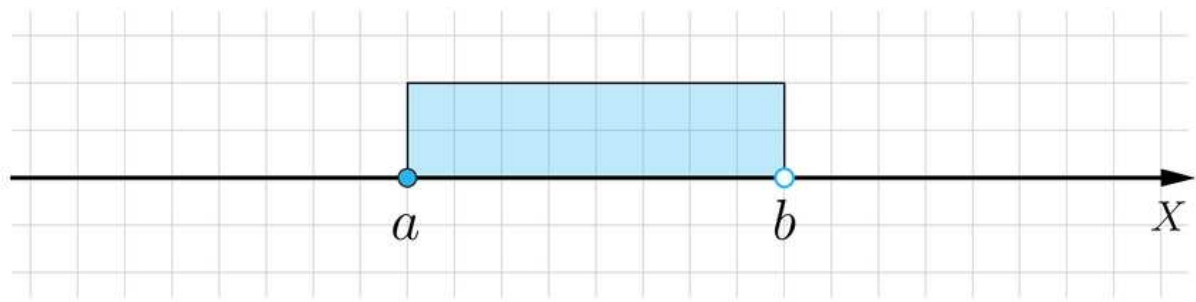
Przedziałem prawostronnie domkniętym i lewostronnie otwartym o końcach a i b nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , które spełniają warunek $a < x \leq b$. Fakt, że x należy do przedziału prawostronnie domkniętego i lewostronnie otwartego o końcach a i b możemy zapisać następująco $x \in (a, b]$.

Przedział lewostronnie otwarty i prawostronnie domknięty możemy zilustrować na osi liczbowej pamiętając o umowie, że lewy koniec przedziału zaznaczamy kółeczkiem, które nie jest zamalowane, zaś prawy – kółeczkiem, które jest zamalowane:



Przedziałem lewostronnie domkniętym i prawostronnie otwartym o końcach a i b nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , które spełniają warunek $a \leq x < b$. Fakt, że x należy do przedziału lewostronnie domkniętego i prawostronnie otwartego o końcach a i b możemy zapisać następująco $x \in [a, b)$.

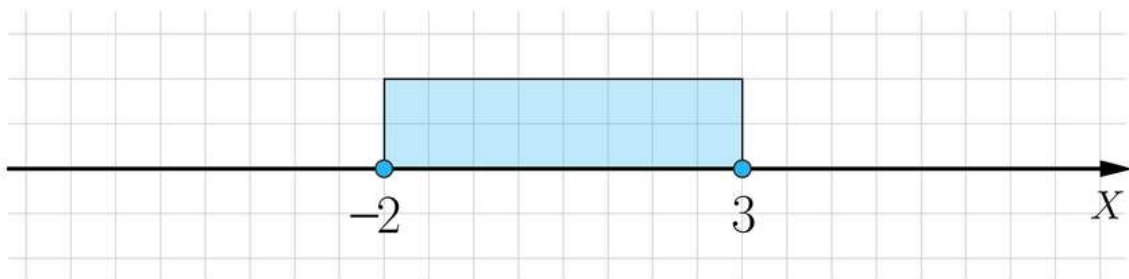
Przedział prawostronnie otwarty i lewostronnie domknięty możemy zilustrować na osi liczbowej pamiętając o umowie, że prawy koniec przedziału zaznaczamy kółeczkiem, które nie jest zamalowane, zaś lewy – kółeczkiem, które jest zamalowane:



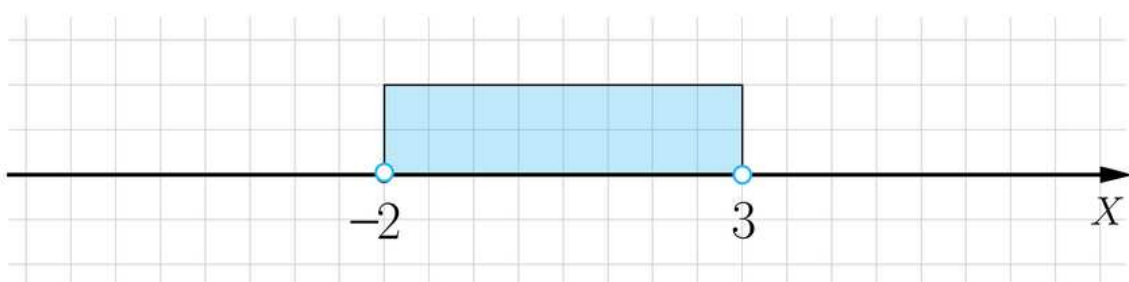
Zwróćmy jeszcze uwagę na pewne istotne rozróżnienie. Omawiane w tej lekcji przedziały z jednej strony są zbiorami nieskończonymi, co oznacza, że należy do nich nieskończenie wiele liczb, ale jednocześnie są zbiorami ograniczonymi. Mówimy, że zbiór A jest ograniczony, jeśli istnieją liczby m i M takie, że dla każdego elementu x zbioru A zachodzą warunki $m \leq x$ oraz $x \leq M$. Liczbę m nazywamy ograniczeniem dolnym zbioru A , zaś liczbę M - ograniczeniem górnym zbioru M . Widzimy zatem, że istnieją zbiory ograniczone i nieskończone jednocześnie. W następnych lekcjach poznasz przedziały nieograniczone.

Przykład 1

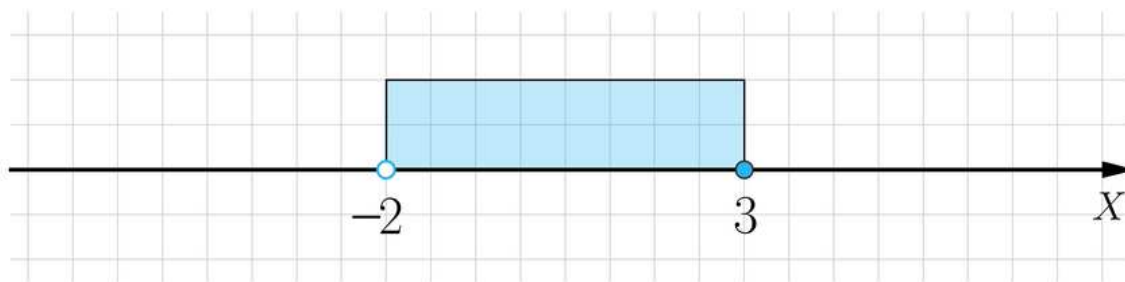
Przedział $\langle -2, 3 \rangle$ jest zbiorem wszystkich liczb większych lub równych (-2) i jednocześnie mniejszych lub równych 3 . Ten [przedział liczbowy](#) na osi można zilustrować następująco:



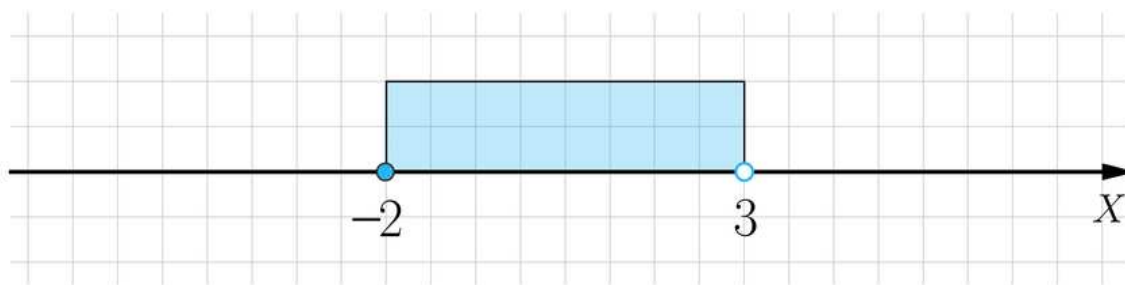
Przedział $(-2, 3)$ jest zbiorem wszystkich liczb większych od (-2) i jednocześnie mniejszych od 3 . Ten przedział na osi można zilustrować następująco:



Przedział $(-2, 3]$ jest zbiorem wszystkich liczb większych od (-2) i jednocześnie mniejszych lub równych 3. Ten przedział na osi można zilustrować następująco:



Przedział $[-2, 3)$ jest zbiorem wszystkich liczb większych lub równych (-2) i jednocześnie mniejszych od 3. Ten przedział na osi można zilustrować następująco:



Przykład 2

Rozwiążemy nierówność podwójną $3 \leq 2x - 1 < 5$.

Zauważmy, że jeśli do każdego z wyrażeń występujących w nierówności podwójnej dodamy 1, otrzymamy warunek równoważny:

$$3 + 1 \leq 2x - 1 + 1 < 5 + 1$$

$$4 \leq 2x < 6.$$

Zauważmy teraz, że po podzieleniu każdego wyrażenia występującego w powyższej nierówności podwójnej przez 2, również otrzymamy warunek równoważny:

$$\frac{4}{2} \leq \frac{2x}{2} < \frac{6}{2}$$

$$2 \leq x < 3.$$

Rozwiązanie powyższej nierówności możemy zapisać przy pomocy przedziału $x \in \langle 2, 3 \rangle$.

Przykład 3

Spośród liczb $\left\{ \sqrt{2}; \pi; 5, 5; \frac{20}{3}; 5, (3); \frac{10}{\sqrt{5}}; \sqrt[3]{63}; |1 - 2\pi| \right\}$ wybierzemy te, które należą do przedziału $\langle \sqrt{3}, 5 \rangle$.

Zauważmy najpierw, że do przedziału należą liczby większe lub równe $\sqrt{3} \approx 1,73$ i jednocześnie mniejsze lub równe 5. Wykonajmy przekształcenia, które ułatwią nam szacowanie wartości wskazanych liczb:

$$\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \approx 4,47$$

$$\sqrt[3]{63} < \sqrt[3]{64} = 4$$

$$|1 - 2\pi| = 2\pi - 1 \approx 5,28.$$

Zatem do przedziału $\langle \sqrt{3}, 5 \rangle$ należą liczby π , $\frac{10}{\sqrt{5}}$ oraz $\sqrt[3]{63}$. Pozostałe liczby nie należą do wskazanego przedziału, ponieważ:

$$\sqrt{2} < \sqrt{3}; 5, 5 > 5; \frac{20}{3} > 5; 5, (3) > 5; |1 - 2\pi| > 5.$$

Przykład 4

Wyznamy wartości parametru m , dla których do przedziału $(-4, m)$ należy dokładnie 8 liczb całkowitych.

Zauważmy najpierw, że jeśli $m \leq -4$, to przedział jest [zbiorem pustym](#).

Zatem $m > -4$.

Najmniejszą liczbą całkowitą ujemną, która może należeć do rozważanego przedziału jest liczba (-3) .

Jeśli do tego przedziału ma należeć jeszcze jakaś liczba całkowita, to musi być to liczba większa lub równa (-3) .

Najprościej będzie wymienić 8 kolejnych liczb całkowitych zaczynając od liczby (-3) .

Są to kolejno: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Zatem największą liczbą całkowitą należącą do przedziału $(-4, m)$ jest liczba 4.

Zatem m może być równe 4 i może być “nieco” większe od 4, ale nie może być równe 5 (gdyby $m = 5$, to liczba 5 również należałaby do rozważanego przedziału i wówczas w przedziale znajdowałoby się 9, a nie 8 liczb całkowitych).

Zatem warunki zadania spełnia każda liczba m należąca do przedziału $\langle 4, 5)$.

Ważne!

Kolejność końców przedziału jest bardzo istotna.

Chociaż z definicji [przedziału ograniczonego](#) jeśli jego prawy koniec jest większy od lewego, to można wprowadzić umowę, że jeżeli oba końce przedziału obustronnie domkniętego są równe, wówczas przedział ten opisuje zbiór jednoelementowy.

Na przykład $\langle 5, 5 \rangle = \{5\}$.

Umowa ta jest rozszerzeniem tradycyjnej definicji przedziału i nie stoi z nią w sprzeczności.

Słownik

przedział liczbowy

spójny podzbiór liczb rzeczywistych

przedział liczbowy ograniczony

zbiór wszystkich liczb rzeczywistych zawartych między dwiema ustalonymi liczbami

zbiór pusty

zbiór, który nie zawiera żadnego elementu; jego symbolem jest przekreślone kółko lub przekreślone zero: $\emptyset$

Film samouczek

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w filmie samouczku. Na ich podstawie wykonaj Polecenie 2.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbrrpfP7Z2>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego przedziałów liczbowych ograniczonych.

Polecenie 2

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Przedział $(-2, 3)$ jest zdefiniowany przez warunek:

☐ $-2 < x \leq 3$

☐ $-2 \leq x < 3$

☐ $-1 < x + 1 \leq 4$

Przedział $(-5, 5)$ zawiera:

☐ 8 liczb całkowitych☐ 9 liczb całkowitych☐ 11 liczb całkowitych

Przedział $\langle -4, 7 \rangle$ jest:

☐ lewostronnie domknięty☐ prawostronnie domknięty☐ ograniczony

Przedział $\langle -4, 9 \rangle$:

☐ nie ma wartości najmniejszej☐ zawiera 13 liczb całkowitych☐ nie ma wartości największej

Rozwiązaniem nierówności podwójnej $-7 < 2x - 3 \leq 1$ jest przedział:

☐ $(-2, 2)$

☐ $\langle -2, 2 \rangle$

☐ $(-8, 8)$

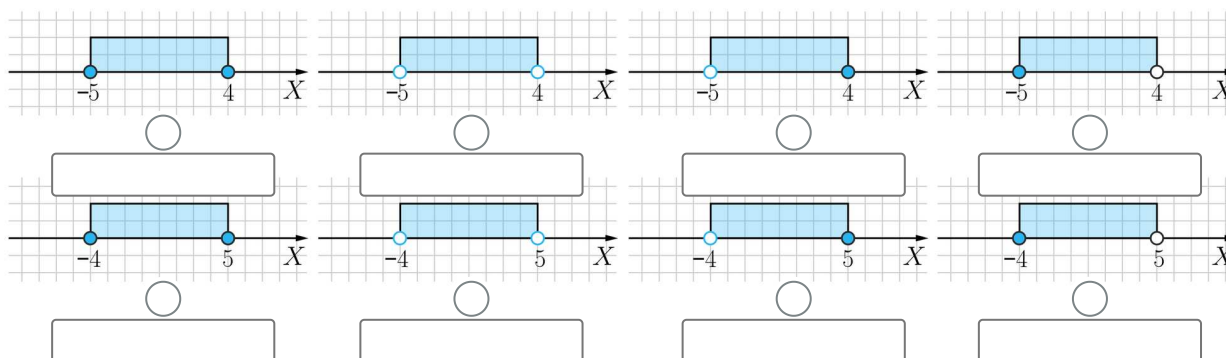
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Przyporządkuj przedziały ich ilustracjom na osi liczbowej. Przeciągnij i upuść.



$$x \in (-4, 5)$$

$$x \in \langle -5, 4 \rangle$$

$$x \in (-5, 4)$$

$$x \in \langle -4, 5 \rangle$$

$$x \in (-4, 5)$$

$$x \in (-5, 4)$$

$$x \in \langle -4, 5 \rangle$$

$$x \in \langle -5, 4 \rangle$$

Ćwiczenie 2



Połącz w pary nierówności podwójne i opisujące je przedziały.

$$-\sqrt{3} < x < \sqrt{2}$$

$$x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{2} \rangle$$

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$$

$$x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{2} \rangle$$

$$-\sqrt{3} \leq x < \sqrt{2}$$

$$x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$$-\sqrt{2} < x \leq \sqrt{3}$$

$$x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{2})$$

$$-\sqrt{3} < x \leq \sqrt{2}$$

$$x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{3} \rangle$$

$$-\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$$

$$x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{2})$$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{3} \rangle$$

Ćwiczenie 3



Rozwiąż nierówność podwójną. Rozwiązanie zapisz w postaci przedziału.

a) $-3 < 2x + 3 \leq 5$,

b) $-5 \leq 2x - 5 < 7$.

Ćwiczenie 4



Zaznacz warianty prawdziwe.

Przedział A	Liczba x	Czy liczba x należy do przedziału A ?
$(0, 3)$	$3 - \pi$	☐
$(-5, 0)$	$2 - \sqrt{5}$	☐
$\langle 1, \sqrt{3} \rangle$	$\frac{3}{\sqrt{3}}$	☐
$(0, 1)$	$ 1 - \sqrt{2} $	☐
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	☐
$(-1, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{\pi}$	☐

Ćwiczenie 5



Przyjmijmy umowę, że “przedział” obustronnie domknięty $\langle a, a \rangle$ zawiera dokładnie jeden element, którym jest liczba a . Zatem $\langle a, a \rangle = \{a\}$. Dla podanych poniżej przedziałów podaj zbiór wartości parametru m , dla których są one zbiorami niepustymi.

Przeciągnij i upuść.

Przedział A	Warunek definiujący wartości parametru m , dla których przedział A nie jest pusty
$(-4, m)$	
$\langle -4, m \rangle$	
$(m, -4)$	
$\langle m, -4 \rangle$	
$\langle -4, m \rangle$	
$\langle m, -4 \rangle$	

$m \leq -4$

$m < -4$

$m > -4$

$m \geq -4$

$m > -4$

$m < -4$

Ćwiczenie 6



Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których przedział $\langle -4, 2m \rangle$ zawiera dokładnie 10 liczb całkowitych.

Ćwiczenie 7



W każdym przypadku podaj całkowitą wartość parametru m , dla której w danym przedziale znajduje się wskazana liczba liczb całkowitych. Wpisz poprawną liczbę.

Przedział	Liczba liczb całkowitych należących do przedziału	Całkowita wartość parametru m
$(5, m)$	4	
$\langle 5, m)$	5	
$(5, m\rangle$	6	
$\langle 5, m\rangle$	7	

Ćwiczenie 8



Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Przedział $(-2, 2m)$ nie jest zbiorem pustym wtedy i tylko wtedy, gdy:

$m \geq 0$ ☐

$m \geq -1$ ☐

$m > -1$ ☐

Do przedziału $(-m, m)$ należy dokładnie 8 liczb całkowitych dla:

$m = 4$ ☐

$m = 5$ ☐

żadnego m ☐

Do przedziału $(-m, 2m)$ należy dokładnie 8 liczb całkowitych dla:

$m = 3$ ☐

$m = 2$ ☐

żadnego m ☐

Zbiór wszystkich liczb spełniających nierówność $|x| < 3$ jest przedziałem:

$(0, 3)$ ☐

$(-3, 3)$ ☐

$\langle 0, 3)$ ☐

Zbiór wszystkich liczb spełniających nierówność $x^2 < 9$ jest przedziałem:

$(0, 3)$ ☐

$(-3, 3)$ ☐

$\langle 0, 3)$ ☐

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przedział liczbowy ograniczony

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisze rozwiązanie nierówności podwójnej przy pomocy przedziału;
- zilustruje rozwiązanie nierówności podwójnej na osi liczbowej.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Przedziały liczbowe](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Film samouczek” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Przedział liczbowy ograniczony”.