Kąty między odcinkami a płaszczyznami w stożku

Kąty między odcinkami a płaszczyznami w stożku

Źródło: Lucas George Wendt, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Umiesz już wykreślać przekroje stożka. W tym materiale dokonasz analizy zadań dotyczących kątów między odcinkami i płaszczyznami stożka. Nauczysz się kreślić rysunki pomagające zaplanować strategię rozwiązania takich zadań. Przekonasz się, że zadania geometrii przestrzennej możesz rozwiązywać wykorzystując podstawowe twierdzenia geometrii płaskiej.

Twoje cele

- Nauczysz się zaznaczać kąty między płaszczyznami a odcinkami w stożku.
- Wykorzystasz związki miarowe geometrii płaskiej oraz związki trygonometryczne do rozwiązywania zagadnień związanych z geometrią przestrzenną.

Przeczytaj

W tym materiale wykorzystamy definicję kąta między prostą i płaszczyzną. Przeanalizujemy zadania dotyczące kątów, jakie możemy wykreślić w stożku pomiędzy jego płaszczyzną podstawy a odpowiednim odcinkiem.

Zapoznaj się z apletem Geogebry, który przedstawia najbardziej charakterystyczne kąty w stożku.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1BhBAOKk

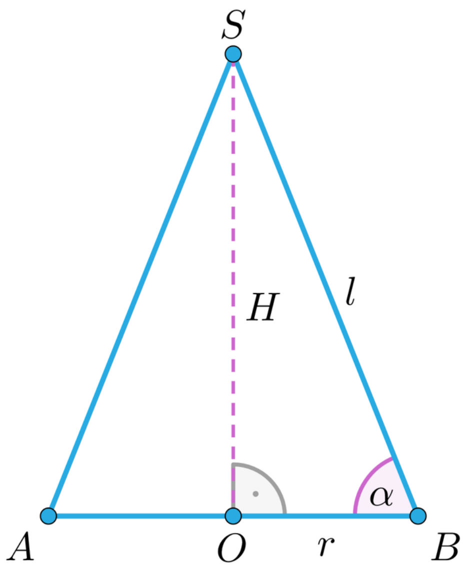
Zwróć uwagę, że do zaznaczenia kątów pomiędzy tworzącymi stożka a płaszczyzną podstawy wystarczy wykreślić przekrój osiowy stożka. Spostrzeżenie to pomoże nam zaplanować strategię rozwiązania zadania.

Przykład 1

Pole powierzchni przekroju osiowego stożka wynosi 80 cm^2. Kąt między tworzącą stożka a płaszczyzną podstawy stożka ma miarę α. Obliczmy objętość stożka.

Rozwiązanie

Wykreślmy przekrój osiowy stożka i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$H = |OS|$ - długość wysokości stożka
$l = |BS|$ - długość tworzącej stożka
$2r = |AB|$ - długość średnicy podstawy stożka
$|\sphericalangle ABS| = \alpha$ - miara kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy stożka

Z warunków zadania mamy układ zależności: $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot H = 80$ i $\frac{H}{r}$ =tg α.

Stąd $H = r\cdot$ tg α, zatem $r \cdot r\cdot$ tg $\alpha = 80$.

Stąd wynika, że $r = \sqrt{\frac{80}{\mathrm{tg}\alpha}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{\mathrm{tg}\alpha}}$ i $H = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{\mathrm{tg}\alpha}}\cdot$ tg $\alpha = 4\sqrt{5 \text{ tg } \alpha}$.

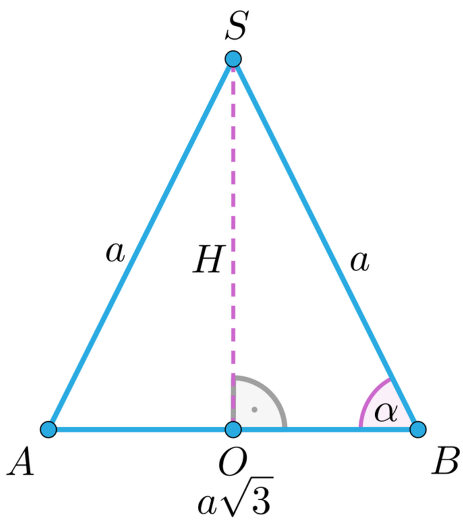
Objętość stożka obliczamy ze wzoru $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$, zatem
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{80}{\mathrm{tg}\alpha} \cdot 4\sqrt{5 \text{ tg } \alpha} = \frac{320\sqrt{5\mathrm{tg}\alpha}}{3\mathrm{tg}\alpha}\pi \text{ cm}^3$.

Przykład 2

Trójkąt równoramienny o bokach długości $a, a, a\sqrt{3}$ jest przekrojem osiowym stożka. Wyznaczmy miarę kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy stożka.

Rozwiązanie

Wykreślmy przekrój osiowy stożka i przyjmijmy oznaczenia.



$|AB| = a\sqrt{3}$ - długość średnicy podstawy stożka
$|BS| = a$ - długość tworzącej stożka
$|\sphericalangle ABS| = \alpha$ - miara kąta pomiędzy tworzącą stożka i płaszczyzną podstawy stożka

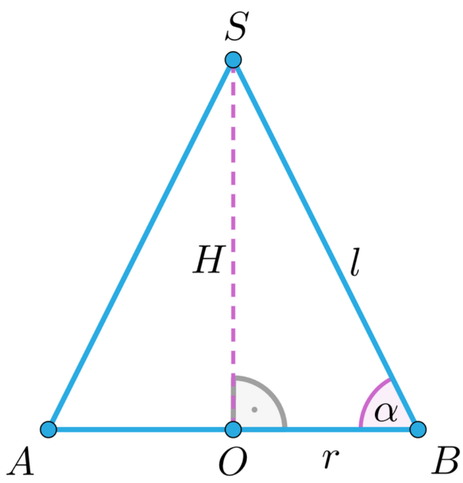
Zauważmy, że $\cos\alpha = \frac{|OB|}{|BS|} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, stąd mamy $\alpha = 30^\circ$.

Przykład 3

Długość tworzącej stożka jest o $4\ \text{cm}$ dłuższa od długości średnicy podstawy stożka. Tworząca stożka tworzy z płaszczyzną podstawy stożka kąt α, taki, że $\sin\alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$. Obliczmy pole powierzchni bocznej stożka.

Rozwiązanie

Wykreślamy przekrój osiowy stożka i przyjmujemy oznaczenia.



$|BS| = l$ - długość tworzącej stożka
$|BO| = r$ - długość promienia podstawy stożka
$|\sphericalangle ABS| = \alpha$ - kąt pomiędzy tworzącą stożka i płaszczyzną podstawy stożka

Z warunków zadania mamy układ zależności: $l = 2r + 4$ i $\cos\alpha = \frac{r}{l}$.

Korzystając z zależności $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, wyznaczymy wartość $\cos\alpha$.

Mamy zatem $\left(\frac{\sqrt{55}}{8}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$. Wiedząc, że kąt α jest kątem ostrym otrzymujemy $\cos\alpha = \frac{3}{8}$.

Podstawiając do naszego układu warunków otrzymujemy zależność: $\frac{3}{8} = \frac{r}{2r+4}$, stąd $3(2r+4) = 8r$, a stąd wynika, że $r = 6$ i $l = 16$.

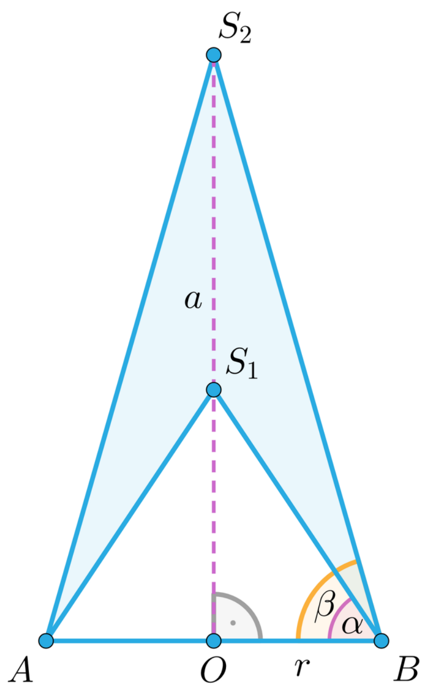
Pole powierzchni bocznej stożka wynosi $P_b = \pi r l = \pi \cdot 6 \cdot 16 = 96\pi \text{ cm}^2$.

Przykład 4

Na wspólnej podstawie zbudowano dwa stożki (jeden wewnątrz drugiego). Kąt pomiędzy tworzącą „niższego” stożka i płaszczyzną podstawy ma miarę α, a kąt pomiędzy tworzącą „wyższego” stożka i płaszczyzną podstawy ma miarę β. Różnica wysokości stożków jest równa a. Wyznaczmy objętość bryły zawartej pomiędzy powierzchniami bocznymi tych stożków.

Rozwiązanie

Wykreślmy przekrój osiowy tak zbudowanych stożków i przyjmijmy oznaczenia.



$|OS_1|$ - długość wysokości „niższego" stożka
$|OS_2|$ - długość wysokości „wyższego" stożka
$|OB| = r$ - długość promienia podstawy stożka

Objętość części zawartej pomiędzy powierzchniami bocznymi stożka obliczymy jako różnicę objętości odpowiednio stożka „wyższego" i „niższego". Mamy zatem:
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot |OS_2| - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot |OS_1| = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (|OS_2| - |OS_1|) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot a$

Wystarczy zatem wyznaczyć długość promienia podstawy stożka.

Zauważmy, że z trójkąta OBS_1 mamy zależność $\text{tg }\alpha = \frac{|OS_1|}{r}$, stąd $|OS_1| = r\cdot \text{ tg }\alpha$ i z trójkąta OBS_2 mamy zależność $\text{tg }\beta = \frac{|OS_2|}{r}$, stąd $|OS_2| = r\cdot \text{ tg }\beta$.

Z warunków zadania wiemy, że $a = |OS_2| - |OS_1|$, zatem $a = r\cdot \text{ tg }\beta - r\cdot \text{ tg }\alpha$.

Stąd $a = r(\text{tg }\beta - \text{ tg }\alpha)$, zatem $r = \frac{a}{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha}$.

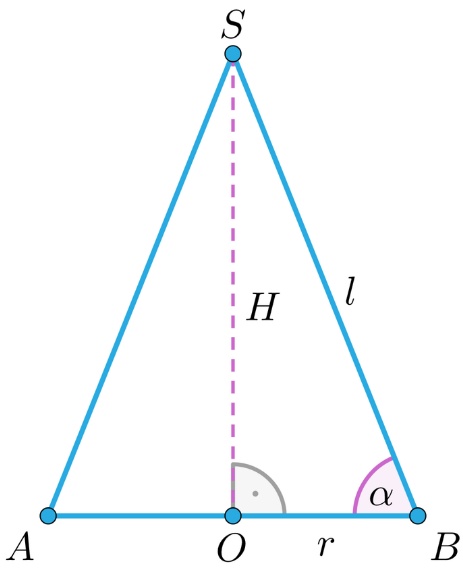
Szukana objętość wyraża się zatem wzorem
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{a}{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha}\right)^2 \cdot a = \frac{a^3\pi}{3(\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha)^2}$.

Przykład 5

Stosunek pola powierzchni całkowitej stożka do pola powierzchni bocznej stożka jest równy $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$. Wyznaczmy miarę kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.

Rozwiązanie

Wykreślmy przekrój osiowy stożka i przyjmijmy oznaczenia.



$|BS| = l$ - długość tworzącej stożka
$|BO| = r$ - długość promienia podstawy stożka
$|\sphericalangle ABS| = \alpha$ - miara kąta pomiędzy tworzącą stożka i płaszczyzną podstawy stożka

Z warunków zadania mamy: $\frac{P_c}{P_b} = \frac{\pi r(r+l)}{\pi rl} = \frac{r+l}{r} = \frac{r}{l} + 1$.

Zauważmy, że $\frac{r}{l} = \cos\alpha$, zatem $\frac{r}{l} + 1 = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$, stąd $\frac{r}{l} = \frac{\sqrt{3}+2}{2} - 1$.

Stąd wynika, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zatem $\alpha = 30^\circ$.

Słownik

przekrój osiowy stożka

przekrój stożka płaszczyzną zawierającą oś obrotu stożka; przekrój osiowy stożka jest trójkątem równoramiennym

kąt pomiędzy prostą i płaszczyzną

kąt między prostą a jej rzutem prostopadłym na płaszczyznę

Aplet

> **Polecenie 1**
> Jak zwinąć stożek z wycinka koła? Czy kąt środkowy wycinka koła, z którego tworzymy stożek, jest kątem rozwarcia stożka lub kątem nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy? Zapoznaj się z poniższym apletem i na jego podstawie postaraj się odpowiedzieć na te pytania.

Zauważ, że pole wycinka koła jest równe polu powierzchni bocznej stożka.

> **Polecenie 2**
> Powierzchnia boczna stożka o wierzchołku S, po rozwinięciu jest wycinkiem koła o kącie środkowym miary 120°. Oblicz cosinus kąta α nachylenia tworzącej l stożka do płaszczyzny podstawy.

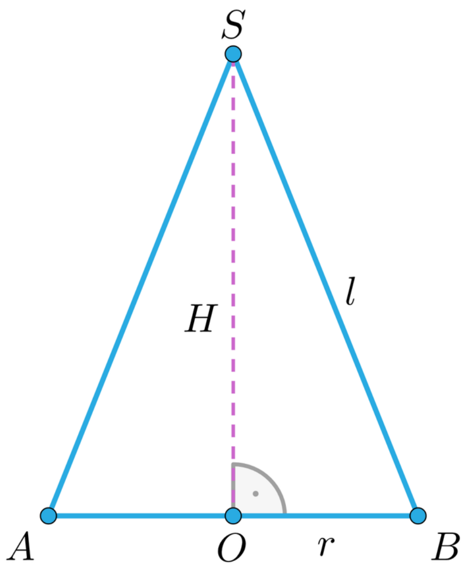
> **Polecenie 3**
> Z wycinka koła o kącie środkowym α zwinięto stożek, w którym tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Udowodnij, że $\cos\beta = \frac{\alpha}{360^\circ}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

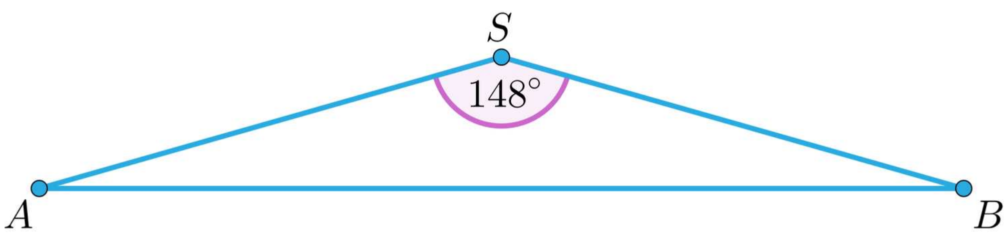
Ćwiczenie 1

Na rysunku wykreślono przekrój osiowy stożka. Przeciągnij poprawną odpowiedź.



Ćwiczenie 2

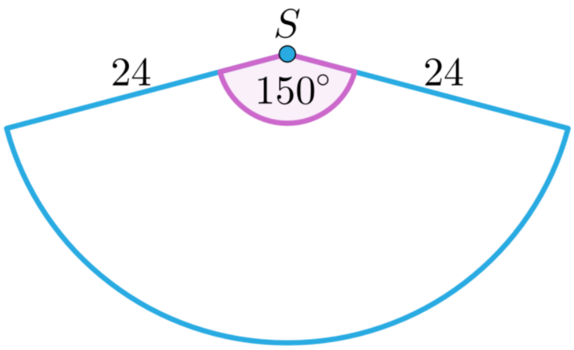
Uzupełnij zdanie.



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Na rysunku wykreślono wycinek koła, z którego zwinięto stożek o kącie nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy miary α.



Ćwiczenie 5

Tworząca stożka ma długość $10\ \text{cm}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

Ćwiczenie 6

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoramienny o polu powierzchni równym $25\sqrt{15}\ \text{cm}^2$. Cosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{1}{4}$. Wyznacz pole powierzchni całkowitej stożka.

Ćwiczenie 7

Pole powierzchni bocznej stożka jest cztery razy większe od pola powierzchni przekroju osiowego stożka. Wyznacz sinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy. W obliczeniach przyjmij $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Ćwiczenie 8

Na wspólnej podstawie zbudowano dwa stożki (jeden wewnątrz drugiego). Kąt pomiędzy tworzącą „niższego” stożka i płaszczyzną podstawy ma miarę α, a kąt pomiędzy tworzącą „wyższego” stożka i płaszczyzną podstawy ma miarę 2α. Długość wysokości „niższego” stożka wynosi b. Wyznacz stosunek objętości „wyższego” stożka do objętości „niższego” stożka.

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Bochenek

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty między odcinkami a płaszczyznami w stożku

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria

Uczeń:
6) oblicza objętość i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka, kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje kąt pomiędzy tworzącą stożka i płaszczyzną podstawy stożka;
- bada związki miarowe między odcinkami na wykreślonym przekroju osiowym stożka;
- przeprowadza proste rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja w oparciu o ćwiczenia interaktywne
- pokaz

- analiza pomysłów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat: „Kąty między odcinkami i płaszczyznami w stożku” i cele zajęć.
2. Ustala wraz z uczniami kryteria sukcesu po przeprowadzonej lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla uczniom aplet i czyta pytania z Polecenia 1. Wybrani uczniowie odpowiadają na nie.
2. Nauczyciel dzieli klasę na 5 grup i przydziela każdej grupie jedno polecenie z sekcji „Przeczytaj”. Uczniowie przygotowują rozwiązania i wspólnie omawiają sposób rozwiązania zadania umieszczonego w danym poleceniu na forum klasy.
3. Uczniowie w grupach dzielą się na mniejsze podgrupy i przygotowują rozwiązania ćwiczeń od 1 do 7 z sekcji „Sprawdź się”.
4. Wyznaczony przez nauczyciela uczeń omawia rozwiązanie zadania na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel podsumowuje lekcję – wskazuje mocne i słabe strony uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w parach ćwiczenie 8 z sekcji „Sprawdź się” oraz Poleceie 2 i Polecenie 3 z sekcji „Aplet”.

Materiały pomocnicze:

- Siatka stożka, pole powierzchni stożka
- Przypomnienie wiadomości dotyczących wycinka koła

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel wykorzystuje aplet do zaakcentowania związku pomiędzy wycinkiem koła i płaszczyzną boczną stożka. Podkreśla związek pomiędzy kątem środkowym wycinka koła a kątem nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy. Może go również wykorzystać przy realizacji tematu „Siatka stożka”.