



Rozwiązanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Źródło: cottonbro, dostępny w internecie: <https://pexels.com/>.

Bartek i Tomek mają razem 780 zł oszczędności. Jednak Tomek ma o 250 zł więcej od Bartka.

Jak policzyć ile oszczędności ma każdy z chłopców?

Czy jest tylko jedna prawidłowa odpowiedź na to pytanie?

W tym materiale zajmiemy się pojęciem rozwiązania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

Twoje cele

- Sformułujesz definicję rozwiązania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.
- Sprawdzisz, czy dane liczby są rozwiązaniem układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.
- Przedstawisz graficzną ilustrację układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Odczytasz liczbę rozwiązań układu równań na podstawie jego ilustracji graficznej.

Przeczytaj

Definicja: Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Układ taki przyjmuje postać:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

gdzie:

x oraz y – oznaczają niewiadome,

a_1, a_2, b_1 oraz b_2 – współczynniki przy niewiadomych x oraz y ,

c_1 i c_2 – nazywamy wyrazami wolnymi.

Przy czym współczynniki przy odpowiednich niewiadomych nie są równocześnie zerami.

Przykład 1

Znajdziemy dwie liczby naturalne, takie, że ich suma wynosi 10, a ich różnica 4.

Zapiszemy warunki podane w treści zadania za pomocą dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Pierwszą z liczb oznaczmy x , a drugą y .

Wtedy $x + y = 10$ i $x - y = 4$.

Warunki te możemy zapisać w postaci **układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi**

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}.$$

Łatwo odgadnąć, że szukane liczby to $x = 7$ i $y = 3$.

Sprawdzimy, czy spełniają one nasze równania, czyli czy po podstawieniu wartości $x = 7$ i $y = 3$ do równań w miejsca niewiadomych otrzymamy tożsamości.

Pierwsze równanie.

$$L_1 = x + y = 7 + 3 = 10 = P_1$$

A zatem para $(7, 3)$ spełnia to równanie.

Drugie równanie.

$$L_2 = x - y = 7 - 3 = 4 = P_2$$

A zatem para $(7, 3)$ spełnia to równanie.

Para $(7, 3)$ spełnia każde z równań, a więc spełnia układ tych równań $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$.

Definicja: Rozwiązanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Rozwiązaniem układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy każdą parę liczb spełniającą jednocześnie każde równanie danego układu równań.

Przykład 2

Sprawdzimy, która para liczb $(2, 3)$, $(-6, 9)$ jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 3 \\ \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{2}{7} = 2 \end{cases}$$

W przypadku takiego układu trudno jest odgadnąć rozwiązanie.

Musimy więc sprawdzić wartości liczbowe wyrażeń uzyskanych po prawej i lewej stronie każdego z równań układu, po podstawieniu w miejsce niewiadomych odpowiednich liczb.

Jeśli lewa strona równania będzie równa prawej ($L = P$), w każdym z dwóch równań, to para spełnia układ równań, a więc jest jego rozwiązaniem.

Para $(2, 3)$.

Pierwsze równanie.

$$L_1 = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 1 + 2 = 3 = P_1$$

A zatem para $(2, 3)$ spełnia to równanie.

Drugie równanie.

$$L_2 = \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{2}{7} = \frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{2}{7} \cdot 3 + \frac{2}{7} = \frac{2+6+2}{7} = \frac{10}{7} \neq 2 = P_2$$

A zatem para $(2, 3)$ nie spełnia tego równania.

Nie jest więc **rozwiązaniem układu równań**.

Para $(-6, 9)$.

Pierwsze równanie.

$$L_1 = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{1}{2} \cdot (-6) + \frac{2}{3} \cdot 9 = -3 + 6 = 3 = P_1$$

A zatem para $(-6, 9)$ spełnia to równanie.

Drugie równanie.

$$L_2 = \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{2}{7} = \frac{1}{7} \cdot (-6) + \frac{2}{7} \cdot 9 + \frac{2}{7} = \frac{-6+18+2}{7} = \frac{14}{7} = 2 = P_2$$

A zatem para $(-6, 9)$ spełnia to równanie.

Para $(-6, 9)$ spełnia każde z równań, a więc jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 3 \\ \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y = \frac{2}{7} = 2 \end{cases}$$

Przykład 3

Wróćmy teraz do problemu, który pojawił się na początku materiału.

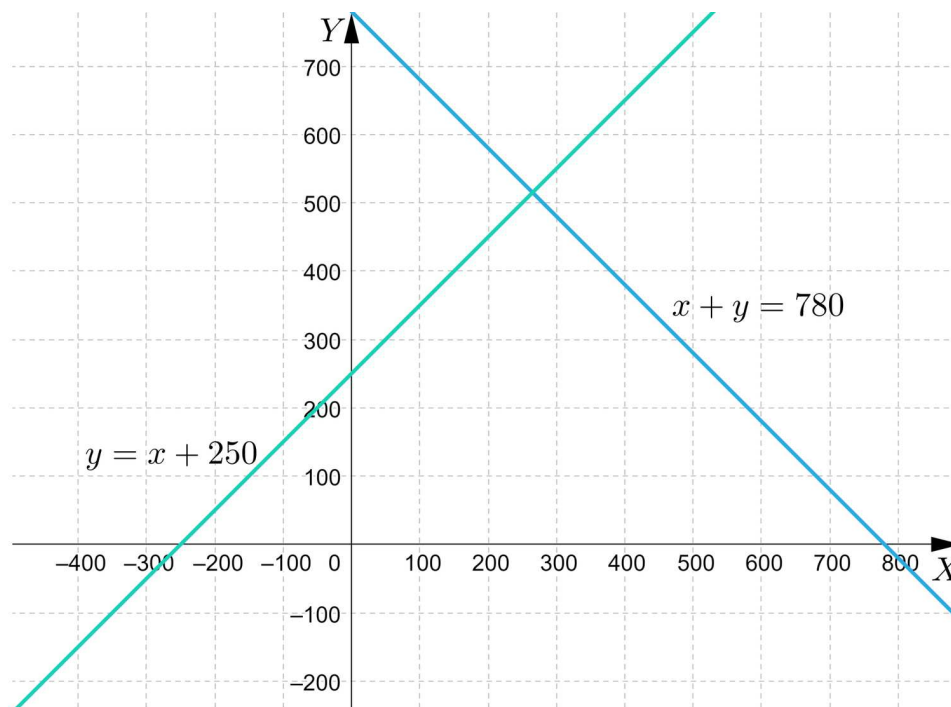
Bartek i Tomek mają razem 780 zł oszczędności. Jednak Tomek ma o 250 zł więcej od Bartka. Jak policzyć ile oszczędności ma każdy z chłopców? Czy jest tylko jedna prawidłowa odpowiedź na to pytanie?

Oznaczmy przez x oszczędności Bartka, a przez y oszczędności Tomka.

Warunki wynikające z treści zadania możemy zapisać w postaci układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} x + y = 780 \\ y = x + 250 \end{cases}$$

Aby odpowiedzieć, czy jest tylko jedna prawidłowa odpowiedź na to pytanie, możemy narysować wykresy równań i sprawdzić ile mają punktów wspólnych.



Widzimy, że wykresy mają jeden punkt wspólny, a więc istnieje tylko jedna para liczb, spełniająca jednocześnie obydwa równania, zatem istnieje tylko jedno rozwiązanie tego układu równań.

Aby je znaleźć, możemy łatwo zapisać układ równań w postaci jednego równania z jedną niewiadomą.

$$x + x + 250 = 780$$

$$2x = 780 - 250$$

$$x = 265$$

A wtedy korzystając z drugiego równania obliczymy y .

$$y = x + 250 = 265 + 250 = 515.$$

Możemy zatem odpowiedzieć na pytanie:

Bartek ma 265 zł oszczędności, a Tomek ma 515 zł.

Istnieje tylko jedna para liczb, będąca rozwiązaniem tego układu równań i spełniająca warunki zadania.

Definicja: Układ równań oznaczony

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązaniem jest dokładnie jedna para liczb, nazywamy układem oznaczonym.

Sprawdzimy, czy układ równań może mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

Na podstawie przykładu 2 widzimy, że liczba rozwiązań układu równań liniowych jest taka sama, jak liczba punktów wspólnych dwóch prostych, będących wykresami równań składowych rozpatrywanego układu.

A zatem mamy jeszcze tylko dwie możliwości – proste się pokrywają lub są równoległe i rozłączne.

Przykład 4

Znajdźmy rozwiązania układu równań liniowych

$$\begin{cases} \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}y + 1 - x \\ 5x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 2 + 4x \end{cases}$$

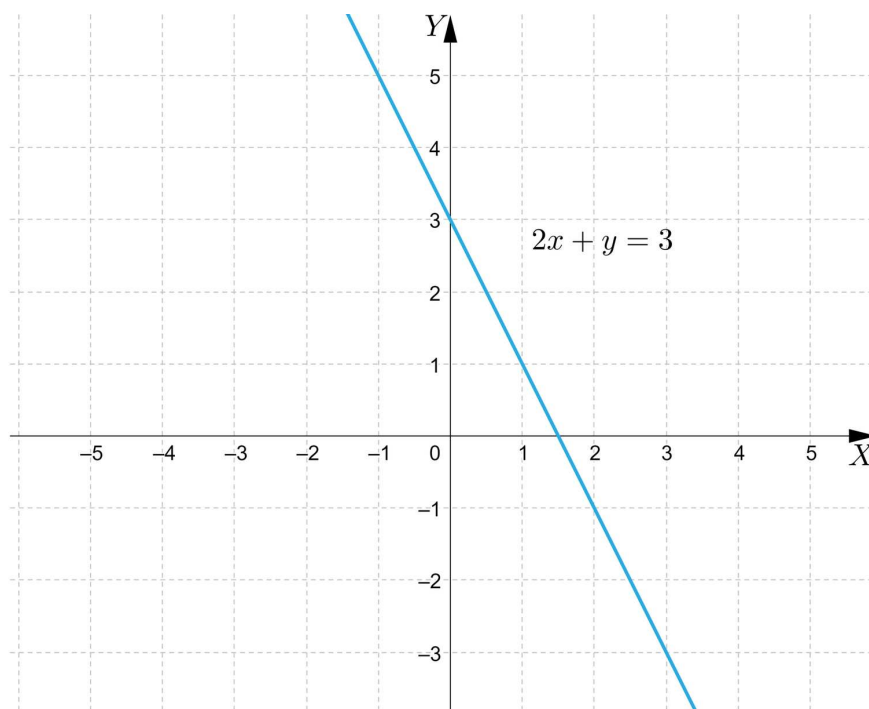
Każde z równań układu przekształcamy równoważnie doprowadzając do najprostszej postaci.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}y + 1 - x \quad | \cdot 3 \\ 5x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 2 + 4x \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - x = 1y + 3 - 3x \\ 10x + y + 1 = 4 + 8x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy takie same równania, a więc ich wykresy pokrywają się.



Proste mają zatem nieskończenie wiele punktów wspólnych, a ten układ równań spełnia nieskończenie wiele par liczb.

Pary te są tożsame ze współrzędnymi wszystkich punktów leżących na prostej o równaniu $y = -2x + 3$.

A zatem rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}y + 1 - x \\ 5x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 2 + 4x \end{cases}.$$

jest każda para liczb rzeczywistych postaci $(x, -2x + 3)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Definicja: Układ równań nieoznaczony

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązaniem jest nieskończenie wiele par liczb, nazywamy układem nieoznaczonym.

Przykład 5

Poszukajmy teraz rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} 6x - 2y - 3 = 4x - 1 \\ 0,5x - 0,5y + 2,5 = 2 \end{cases}.$$

Każde z równań układu przekształcamy równoważnie doprowadzając do najprostszej postaci.

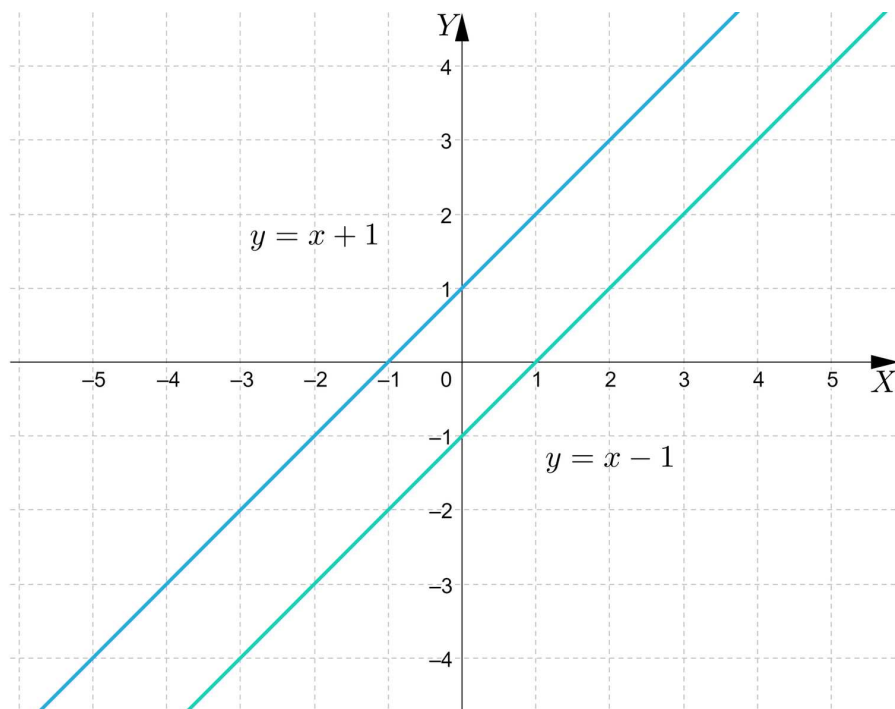
$$\begin{cases} 6x - 2y - 3 = 4x - 1 \\ 0,5x - 0,5y + 2,5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 2 \quad |:2 \\ 0,5x - 0,5y = -0,5 \quad |\cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy dwa równania, których wykresy są równoległe i nie mają punktów wspólnych.



Układ równań nie ma zatem rozwiązania.

Definicja: Układ równań sprzeczny

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, który nie posiada rozwiązań, nazywamy układem sprzecznym.

Słownik

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

układ równań liniowych (współczynniki przy odpowiednich zmiennych nie są równocześnie zerami) postaci:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

rozwiązanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

para liczb spełniających jednocześnie każde z równań składowych w tym układzie

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj animację, a następnie wykonaj umieszczone pod nią polecenia.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DMknjKKFs>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej rozwiązania układu równań liniowych z dwoma niewiadomymi.

Polecenie 2

Uzupełnij układ równań

$$\begin{cases} \dots x + 3y = 5 \\ 2x - \dots y = 7 \end{cases}$$

wpisując w wy kropkowanych miejscach liczby tak, aby para $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ była jego rozwiązaniem.

Polecenie 3

Sprawdź, czy para liczb $(-100, 250)$ jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 4x + 0,2y = -350 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y = 75 \end{cases}$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz parę liczb spełniającą układ równań

$$\begin{cases} -2x + 12y = 80 \\ 15x + 10y = -100 \end{cases}$$

☐ $\begin{cases} x = 10 \\ y = -5 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = -20 \\ y = -10 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = -10 \\ y = 5 \end{cases}$

Ćwiczenie 2



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Rozwiązaniem układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi może być trójka liczb $(-1, 12, -144)$.

☐

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi może mieć dokładnie jedno rozwiązanie.

☐

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi może mieć dokładnie dwa rozwiązania.

☐

Rozwiązaniem układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi może być para liczb $(-1, 12)$.

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wskaż takie liczby m i n , aby układ $\begin{cases} -2x + 21 = 9y \\ 4x + my = n \end{cases}$ był nieoznaczony.

☐ $m = 36$ i $n = 42$

☐ $m = 42$ i $n = 18$

☐ $m = 42$ i $n = 36$

☐ $m = 18$ i $n = 42$

Ćwiczenie 4



Wskaż takie liczby m i n , aby układ $\begin{cases} 10x + 6y = m \\ 5x + ny = 60 \end{cases}$ był sprzeczny.

☐ $m = 120$ i $n = 3$

☐ $m = 12$ i $n = 3$

☐ $m = 120$ i $n = 12$

☐ $m = -12$ i $n = -3$

Ćwiczenie 5



Uzupełnij tabelkę dobierając drugie równanie tak, aby stworzyły one układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest jedna z podanych par liczb.

$$x - y = 5, x - y = -2$$

Równanie		Równanie		Para liczb spełniająca powstały układ równań
$x - y = 5$				
$x - y = -2$				

Ćwiczenie 6



Wskaż wszystkie układy równań, których rozwiązaniem jest para liczb $(-5, 3)$.

☐
$$\begin{cases} 4x - y = 17 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} 4x + y = -17 \\ -x + y = 8 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3, 5x - 2y = 5 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, 5y = 2 \\ -\frac{1}{3}x + y = 4\frac{2}{3} \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} -x + 4y = 17 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

Ćwiczenie 7



Sprawdź, która z par liczb $(-2, 3)$, $(2, -3)$ jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} \frac{x+y}{3} + \frac{2 \cdot (x-2)}{5} = -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \cdot (2x-1) + \frac{1}{3} \cdot (y-x) + \frac{1}{15} = -1 \end{cases}.$$

Ćwiczenie 8



Oblicz wartości parametrów a i b , występujących w układzie równań liniowych z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (x+y) - (a-1y) = 4 \\ a(x-y) + b(x+2y) = b+3 \end{cases}$$

wiedząc, że rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = -0,5 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}.$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

IV. Układy równań.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;

2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje definicję rozwiązania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi
- sprawdza, czy dane liczby są rozwiązaniem układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi
- przedstawia graficzną ilustrację układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

- odczytuje liczbę rozwiązań układu równań na podstawie jego ilustracji graficznej

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca indywidualna
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu przypominają sobie informacje na temat rozwiązań równań liniowych z dwiema niewiadomymi oraz pojęcia układów równań.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach omawiają przygotowane w domu informacje:
 - ile rozwiązań ma równanie liniowe z dwiema niewiadomymi,
 - jak wygląda graficzna interpretacja równania liniowego z dwiema niewiadomymi,
 - pojęcie układu równań.
2. Każda para próbuje następnie przeanalizować i rozwiązać przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.
3. Po upływie wyznaczonego przez nauczyciela czasu, uczniowie łączą się w sześcioosobowe grupy, porównują swoje rozwiązania, dzielą się uwagami, wspólnie wyjaśniają wątpliwości.
4. Uczniowie wspólnie oglądają animację.
5. Rozwiązują samodzielnie polecenia pod animacją, konsultują wątpliwości i rozwiązania z nauczycielem.

6. Uczniowie pracując indywidualnie, rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1 – 6, omawiają wątpliwości z nauczycielem.

Faza podsumowująca:

1. Przedstawiciele grup krótko omawiają trudności, na jakie natknęli się podczas rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 7, 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Układ równań z dwiema niewiadomymi – opisywanie związków między wielkościami za pomocą równań
- Liczba rozwiązań układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana przez uczniów jako pomoc przy rozwiązywaniu pracy domowej. Może być też przydatna na zajęciach poświęconych wyznaczaniu wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych.