



Pole trójkąta

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



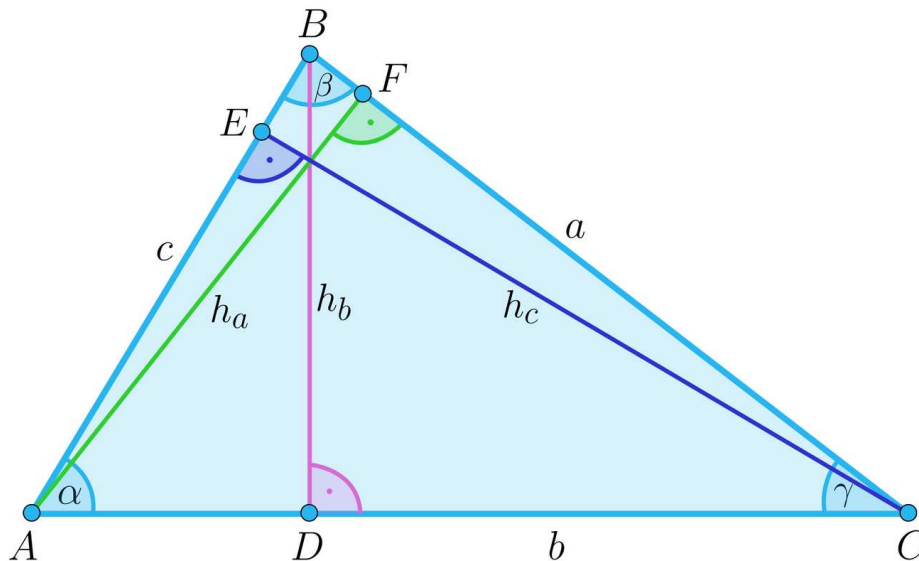
W materiale przedstawimy różne sposoby obliczania pola trójkąta. Wskażemy, że dobór właściwego wzoru na pole trójkąta ma ogromny wpływ na trudność rozwiązania. Zasygnalizujemy również związek między polem trójkąta a promieniami okręgu opisanego i wpisanego w trójkąt.

Twoje cele

- Zastosujesz najważniejsze wzory na pole trójkąta.
- Dobierzesz wzór do danych zawartych w zadaniu.
- Wykorzystasz fakt, że bez względu na wykorzystany wzór, pole trójkąta jest wartością stałą.

Przeczytaj

Pole trójkąta możemy obliczyć za pomocą szeregu dostępnych wzorów. Wybór wzoru jest uzależniony od danych zawartych w zadaniu.



W przypadku, gdy dysponujemy długością boku trójkąta oraz długością **wysokości** opuszczonej na ten bok, to możemy wykorzystać bardzo dobrze znany wzór:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot h_a.$$

Oczywiście wzór ten możemy zastosować dla innych boków trójkąta, bowiem:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$$

W przypadku, gdy dysponujemy długościami dwóch boków trójkąta i miarą kąta pomiędzy tymi bokami, to możemy wykorzystać wzór:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

Z kolei, gdy znamy długości wszystkich boków trójkąta oraz długość promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt, to pomocny jest wzór:

$$P = \frac{1}{2}r(a + b + c).$$

Gdy dysponujemy długościami boków trójkąta oraz długością promienia R okręgu opisanego na tym trójkącie stosujemy wzór:

$$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

Ważne!

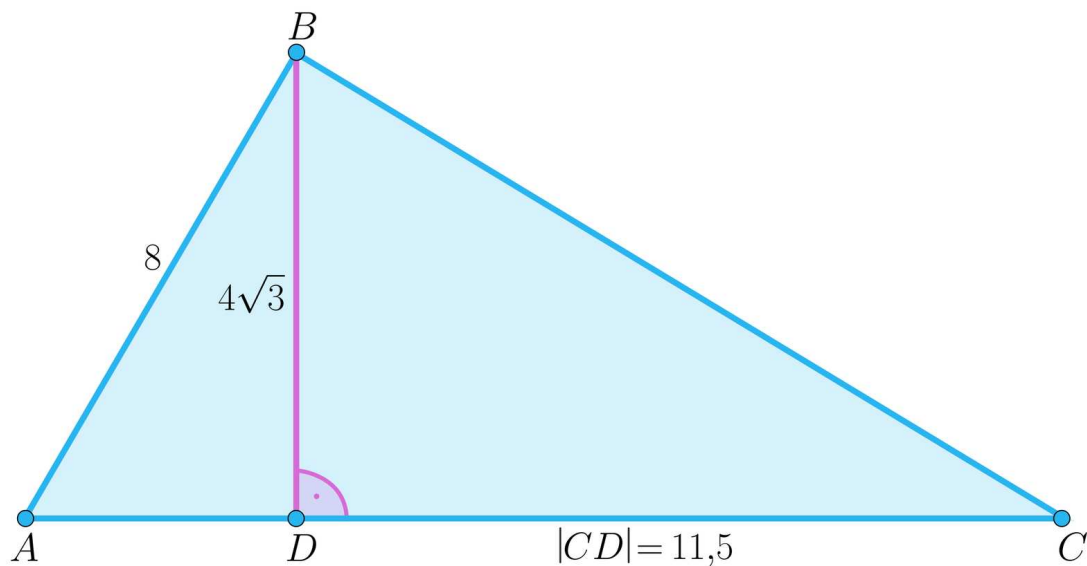
Pole trójkąta możemy obliczyć korzystając ze wzoru Herona:

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ oraz a, b, c są długościami boków trójkąta.

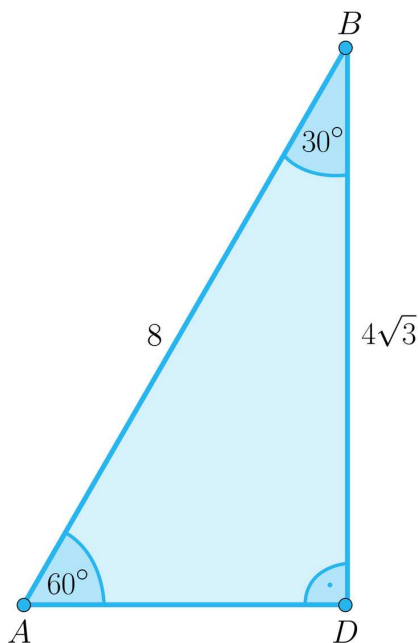
Przykład 1

Rozważmy trójkąt taki, jak na rysunku,



gdzie kąt przy wierzchołku A ma miarę 60° . Niestety żaden z zaproponowanych wzorów nie pozwala na obliczenie pola trójkąta ABC w bezpośredni sposób. Zauważmy jednak, że pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów ABD oraz BCD .

Obliczmy zatem pole trójkąta ABD .



Wiemy, że kąt ABD ma miarę 30° , bowiem suma kątów w trójkącie wynosi 180° . Możemy teraz łatwo obliczyć pole trójkąta ABD korzystając ze wzoru

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma.$$

Podstawiamy dostępne wartości i dostajemy

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 8\sqrt{3}.$$

Z kolei do obliczenia pola trójkąta BDC możemy wykorzystać podstawowy, znany ze szkoły podstawowej wzór

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

bowiem bok BD jest wysokością opuszczoną na bok CD . Mamy zatem

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 11,5 = 23\sqrt{3}.$$

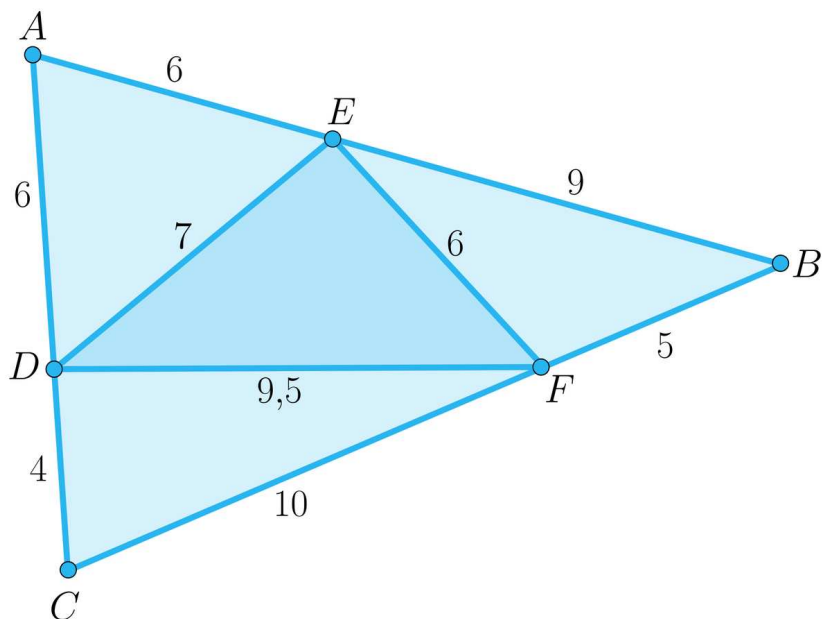
Ostatecznie pole trójkąta ABC wynosi $P = 23\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 31\sqrt{3}$.

Uwaga!

Do obliczenia pola trójkąta ABD można było również wykorzystać podstawowy wzór, jednak niezbędne byłoby wyznaczenie długości odcinka AD ze wzoru Pitagorasa.

Przykład 2

Rozważmy sytuację przedstawioną na rysunku.



Naszym celem jest obliczenie pól wszystkich widocznych na rysunku trójkątów i wskazanie trójkąta o największym polu (trójkąta ABC nie bierzemy pod uwagę). Zauważmy, że dysponujemy długościami wszystkich boków, nie posiadamy jednak informacji o żadnym z kątów. Możemy co prawda wyznaczyć wartości miar poszczególnych kątów korzystając chociażby z twierdzenia cosinusów, jednak w tym przypadku mniej pracochłonne wydaje się zastosowanie wzoru Herona.

Zanim zastosujemy wzór Herona udowodnimy, że możemy go wyrazić w nieco innej postaci. Oznaczmy:

a, b, c – długości boków trójkąta,

p – połowa obwodu trójkąta.

Wówczas

$$P = \frac{\sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a-b+c) \cdot (b+c-a)}}{4}.$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \\ &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) \left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) \left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)} \end{aligned}$$

po sprowadzeniu wyrażen w poszczególnych nawiasach do wspólnego mianownika otrzymujemy

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \left(\frac{a+b+c-2a}{2}\right) \left(\frac{a+b+c-2b}{2}\right) \left(\frac{a+b+c-2c}{2}\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \left(\frac{b+c-a}{2}\right) \left(\frac{a+c-b}{2}\right) \left(\frac{a+b-c}{2}\right)} = \sqrt{\frac{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}{16}} = \\ &= \frac{\sqrt{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}}{4}. \end{aligned}$$

W przypadku trójkąta ADE mamy zatem

$$P = \frac{\sqrt{(6+6+7) \cdot (6+7-6) \cdot (6+7-6) \cdot (6+6-7)}}{4} = \frac{\sqrt{19 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 5}}{4} = \frac{\sqrt{4655}}{4}.$$

Dla trójkąta CDF pole wynosi

$$P = \frac{\sqrt{23,5 \cdot 4,5 \cdot 3,5 \cdot 15,5}}{4} = \frac{\sqrt{5736,9375}}{4}.$$

W trójkącie BEF pole wynosi

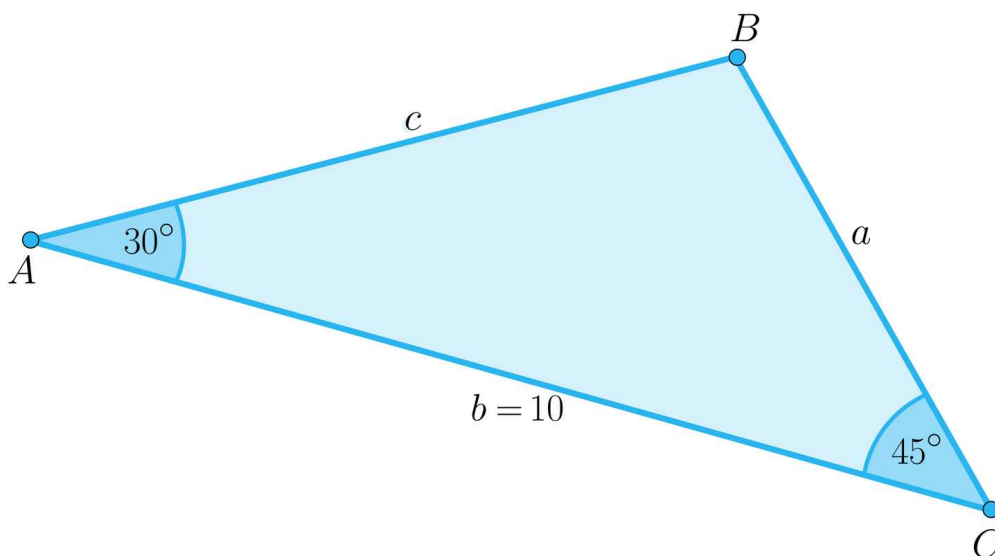
$$P = \frac{\sqrt{20 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 8}}{4} = \frac{\sqrt{3200}}{4} = \frac{40\sqrt{2}}{4} = 10\sqrt{2}.$$

I ostatecznie w trójkącie DEF obliczamy pole z tego samego wzoru

$$P = \frac{\sqrt{22,5 \cdot 3,5 \cdot 10,5 \cdot 8,5}}{4} = \frac{\sqrt{7028,4375}}{4}.$$

Wynika stąd, że największe pole ma trójkąt DEF . Aby się upewnić możemy skorzystać z kalkulatora.

Przykład 3



Dla trójkąta przedstawionego na rysunku wyznaczmy długości promienia okręgu opisanego i wpisanego w ten trójkąt.

Na początku wykorzystamy twierdzenie sinusów w celu wyznaczenia długości boku a . Suma miar kątów w trójkącie wynosi 180° , stąd otrzymujemy, że $\sphericalangle ABC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

Mamy zatem

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\sin 105^\circ}.$$

Stąd

$$a \cdot \sin 105^\circ = 10 \cdot \sin 30^\circ.$$

Korzystamy ze wzoru redukcyjnego dla $\sin 105^\circ$, zatem

$$\sin 105^\circ = \sin(180^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ.$$

Następnie ze wzoru na sumę kątów funkcji sinus otrzymujemy

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Po podstawieniu wartości sinusów dla odpowiednich kątów mamy

$$a \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 5$$

stąd

$$a = \frac{20}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 5(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Ostatecznie

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{12} - 2}{2} = 25 \cdot \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{2} =$$

$$= 25(\sqrt{3} - 1).$$

Obliczymy długość boku c korzystając z twierdzenia sinusów:

$$\frac{b}{\sin 105^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}$$

$$\frac{10}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$c = 10 \cdot \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \cdot (\sqrt{3} - 1).$$

Obliczymy długość promienia [okręgu opisanego na tym trójkącie](#).

W tym celu skorzystamy ze wzoru na pole trójkąta zawierającego promień okręgu opisanego na danym trójkącie, czyli

$$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

Po podstawieniu dostępnych danych otrzymujemy równanie

$$25(\sqrt{3} - 1) = \frac{5(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot 10 \cdot 10(\sqrt{3}-1)}{4R},$$

z którego wyliczamy nieznaną wartość R . Mamy zatem

$$4R \cdot 25(\sqrt{3} - 1) = 500 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - 1),$$

skąd

$$R = 5(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Obliczymy długość promienia [okręgu wpisanego w ten trójkąt](#).

Podobnie jak poprzednio wykorzystamy odpowiednią wersję wzoru na pole trójkąta zawierającą informacje o promieniu okręgu wpisanego w trójkąt, czyli

$$P = \frac{1}{2}r(a + b + c).$$

Po podstawieniu dostępnych danych otrzymujemy równanie

$$25(\sqrt{3} - 1) = \frac{1}{2}r(5(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 10 + 10(\sqrt{3} - 1)).$$

Po uproszczeniu możemy to równanie wyrazić jako

$$50(\sqrt{3} - 1) = r(5\sqrt{6} - 5\sqrt{2} + 10\sqrt{3}).$$

Stąd

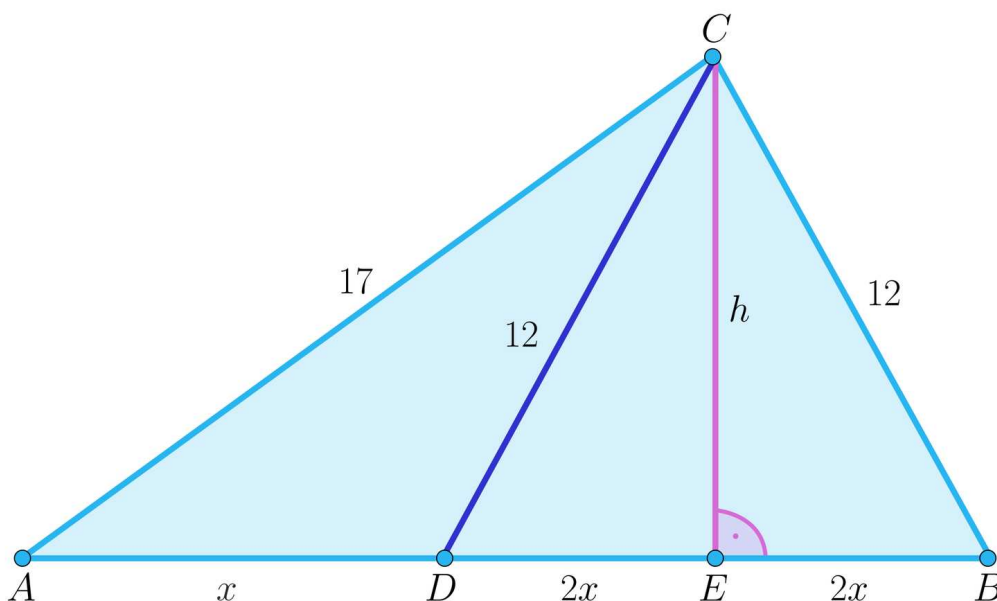
$$\begin{aligned}
r &= \frac{50(\sqrt{3}-1)}{5(\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{3})} = \frac{10(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{10(\sqrt{3}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3})} = \\
&= \frac{10(\sqrt{3}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{6+\sqrt{12}-2\sqrt{18}-\sqrt{12}-2+2\sqrt{6}+2\sqrt{18}+2\sqrt{6}-12} = \frac{10(3\sqrt{2}+\sqrt{6}-6-\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{4\sqrt{6}-8} = \\
&= \frac{10(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-6)}{4\sqrt{6}-8} = \frac{20(\sqrt{2}+\sqrt{3}-3)}{4(\sqrt{6}-2)} = \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3}-3)}{\sqrt{6}-2} \cdot \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}+2} = \\
&= \frac{5(\sqrt{12}+2\sqrt{2}+\sqrt{18}+2\sqrt{3}-3\sqrt{6}-6)}{6-4} = \frac{5(\sqrt{4\cdot 3}+2\sqrt{2}+\sqrt{9\cdot 2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{6}-6)}{2} = \\
&= \frac{5(2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{6}-6)}{2} = \frac{5(4\sqrt{3}+5\sqrt{2}-3\sqrt{6}-6)}{2}.
\end{aligned}$$

Przykład 4

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 12$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 1 : 4$ oraz $|DC| = 12$. Obliczmy pole trójkąta ABC .

Rozwiązanie

Stworzymy odpowiedni rysunek.



Z podanego stosunku w treści zadania wiemy, że istnieje taka liczba x , że $|AD| = x$ oraz $|DB| = 4x$. Zauważmy, że trójkąt DBC jest równoramienny zatem wysokość podzieli odcinek DB równo na połowę. Oznaczmy spodek wysokości literą E . Zatem $|DE| = |EB| = 2x$.

Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DEC oraz AEC . Otrzymujemy wówczas

$$h^2 + 4x^2 = 144 \text{ oraz } h^2 + 9x^2 = 289.$$

Przekształcamy obydwa równania

$$h^2 = 144 - 4x^2 \text{ oraz } h^2 = 289 - 9x^2 .$$

Stąd otrzymujemy, że

$$144 - 4x^2 = 289 - 9x^2 ,$$

$$5x^2 = 145,$$

$$x^2 = 29,$$

$$x = \sqrt{29}.$$

Wyznamy długość podstawy $|AB| = 5x = 5\sqrt{29}$ oraz wysokość $h = \sqrt{144 - 4 \cdot 29} = \sqrt{144 - 116} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

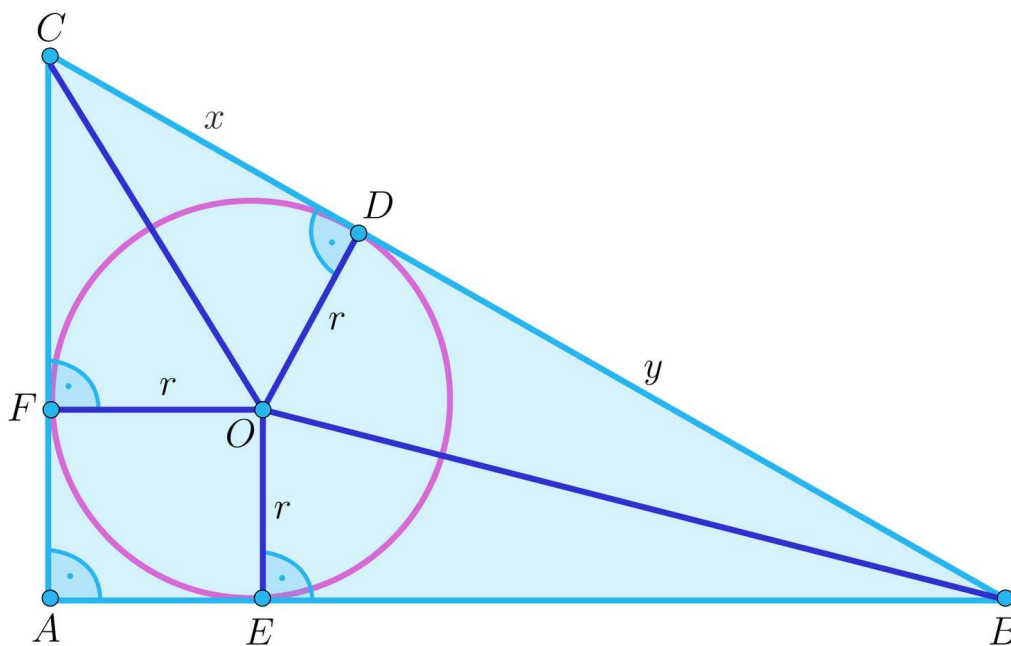
$$\text{Zatem } P = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{29} \cdot 2\sqrt{7} = 5\sqrt{203}.$$

Przykład 5

W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości x oraz y . Wykaż, że pole trójkąta jest równe xy .

Rozwiązanie

Na podstawie treści zadania stworzymy odpowiedni rysunek.



Z podobieństwa trójkątów CFO oraz COD wynika, że $|CF| = x$. Podobnie z podobieństwa trójkątów EBO oraz BDO wynika, że $|EB| = y$. Zatem $|AC| = x + r$ oraz $|AB| = y + r$.

Możemy zapisać pole trójkąta jako $P = \frac{1}{2} \cdot (x + r) \cdot (y + r)$ oraz $P = pr = (x + y + r) \cdot r$.

Przyrównujemy otrzymane wyrażenia i dostajemy w ten sposób równanie

$$(x + y + r) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot (x + r) \cdot (y + r).$$

Przekształcamy je w następujący sposób

$$2xr + 2yr + 2r^2 = xy + xr + yr + r^2,$$

$$xr + yr + r^2 = xy,$$

$$(x + y + r) \cdot r = xy,$$

$$P = xy.$$

Zatem udowodniliśmy tezę z treści zadania.

Słownik

wysokość trójkąta

to odcinek poprowadzony z wierzchołka opuszczony pod kątem prostym na prostą zawierającą przeciwległy bok

okrąg wpisany w trójkąt

to okrąg, który jest styczny do wszystkich boków trójkąta. Środek tego okręgu leży w punkcie przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta

okrąg opisany na trójkącie

to okrąg, na którym leżą wszystkie wierzchołki trójkąta. Jego środek leży w punkcie przecięcia symetralnych boków trójkąta

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami w galerii zdjęć interaktywnych i na ich podstawie wykonaj polecenia poniżej.




Polecenie 2

Oblicz długość podstawy trójkąta równoramiennego, w którym stosunek długości podstawy do długości ramienia wynosi $2 : 3$, jeśli pole trójkąta równoramiennego wynosi $\sqrt{20}$.

Polecenie 3

Oblicz pole oraz długość ramienia i podstawy w trójkącie równoramiennym, w którym ramię jest dwa razy dłuższe od podstawy, jeśli suma długości promienia okręgu opisanego i długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi $\sqrt{30}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



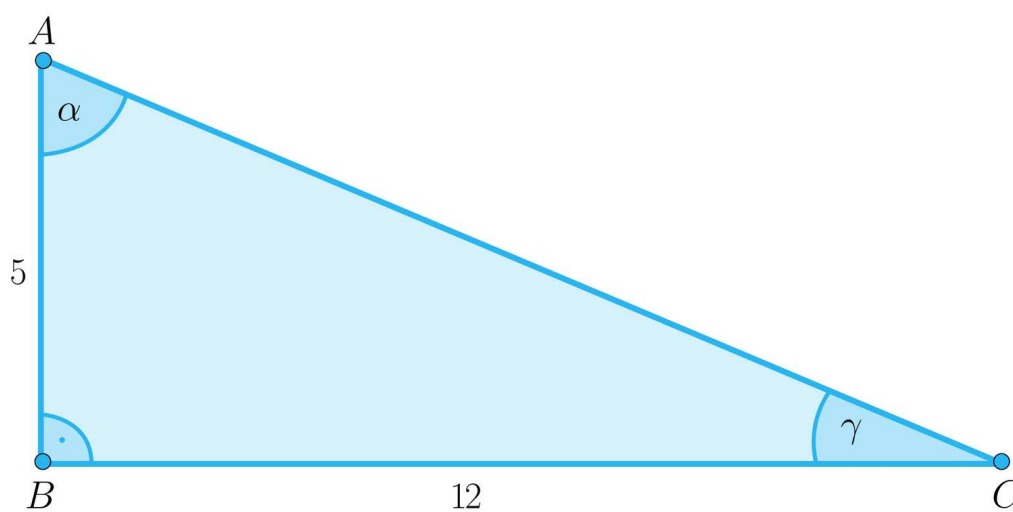
Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Dla danego trójkąta oblicz brakujące wartości, a następnie przenieś je w odpowiednie miejsca.



Ćwiczenie 5



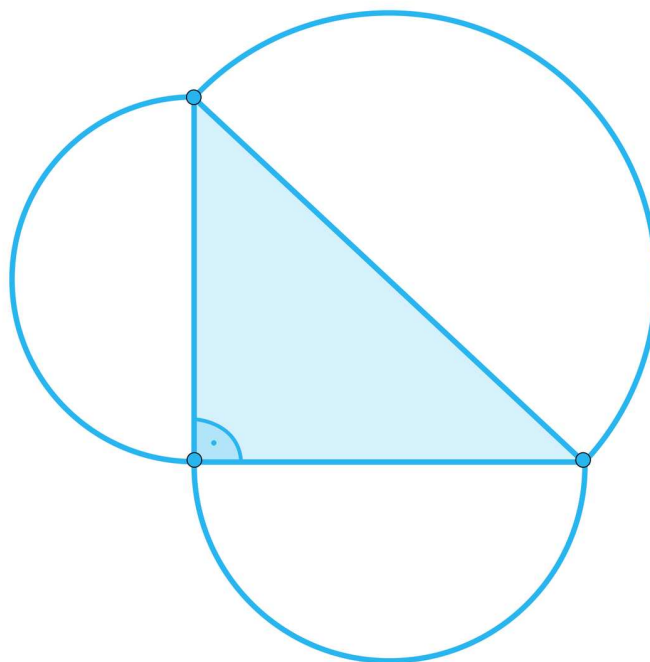
Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Dany jest równoramienny trójkąt prostokątny o polu 54.



Podaj pole sumy półkoli.

Ćwiczenie 8



Jeden z kątów trójkąta prostokątnego o obwodzie 12 ma miarę 60° . Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli stosunek ramion zawartych w podanym kącie wynosi 1 : 2.

Dla nauczyciela

Autor: Krystyna i Adam Kiersztyn

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole trójkąta

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza pole trójkąta w oparciu o dostępne informacje,
- znajduje boki trójkąta, dysponując jego polem i częściowymi informacjami o trójkącie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja,
- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w parach,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-material,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji, a następnie wraz z uczniami określa cele i kryteria sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w 5-osobowych grupach zapoznają się z informacjami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Każda z grup tworzy własną mapę myśli na temat wyznaczania pola trójkąta. Uczniowie porównują swoje prace i omawiają z nauczycielem różnice w interpretacji zagadnienia.
2. Uczniowie w parach analizują rozwiązanie przykładów w sekcji „Przeczytaj”.
3. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
5. Uczniowie wykonują samodzielnie ćwiczenie 6 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Pole trójkąta” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego

ucznia o podsumowanie.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 4, 7 i 8.

Materiały pomocnicze:

- [O twierdzeniu Snelliusa, czyli rozwiązywaniu trójkątów dowolnych](#)
- [Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania pola trójkąta](#)

Wskazówki metodyczne:

Galeria zdjęć interaktywnych może zostać wykorzystana jako materiał służący powtórzeniu przed sprawdzianem, ale również w lekcji „Okrąg opisany na trójkącie” .