



## Przykłady ciągów geometrycznych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Przykłady ciągów geometrycznych

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

W wielu zagadnieniach z teorii liczb i z geometrii spotykamy się z pojęciem ciągu (postępu) geometrycznego nieskończonego. Ciąg taki nie ma ostatniego wyrazu, ale ma wyraz pierwszy. Określony jest, podobnie jak ciąg skończony, poprzez pierwszy wyraz i iloraz ciągu.

W zastosowaniach praktycznych ograniczamy się z reguły do rozważania tylko początkowych wyrazów takiego ciągu, choć może ich być bardzo dużo...

W tym materiale będziemy rozważać właśnie takie sytuacje – z ciągów nieskończonych będziemy wybierać skończoną liczbę wyrazów i określać ich własności.

### Twoje cele

- Zapiszesz w postaci ciągu geometrycznego niektóre zależności liczbowe lub geometryczne.
- Podasz interpretację graficzną danych ciągów geometrycznych.
- Ustalisz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego określonego w różny sposób.
- Wykorzystasz wzory związane z ciągiem geometrycznym do rozwiązywania problemów geometrycznych i arytmetycznych.

# Przeczytaj

---

Podamy teraz przykłady ciągów geometrycznych nieskończonych. Nim przejdziemy do nowych zagadnień, przypomnienie definicji ciągu geometrycznego.

## Definicja: Ciąg geometryczny

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę  $q$ , zwaną ilorazem ciągu.

### Ważne!

Jeżeli  $(a_n)$  jest ciągiem geometrycznym o ilorazie  $q$ , to dla dowolnej liczby naturalnej  $n > 0$  prawdziwa jest równość:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

W tym materiale przyjmować będziemy, że ciąg geometryczny określony jest dla  $n \in \mathbb{N}_+$ , a w niektórych przypadkach dla  $n \in \mathbb{N}$ .

## Ciąg geometryczny potęg liczb naturalnych

Rozważmy na początek przykłady ciągów geometrycznych, których wyrazy są kolejnymi naturalnymi potęgami tej samej liczby naturalnej.

Ciągi te mają postać:

$$p^0, p^1, p^2, p^3, p^4, \dots,$$

gdzie:

$$p \in \mathbb{N}_+$$

Możemy je też zapisać następująco:

$$1, p, p^2, p^3, p^4, \dots$$

gdzie:

$$p \in \mathbb{N}_+$$

Zauważmy, że pierwszy wyraz takiego ciągu to liczba 1, a iloraz jest równy  $p$ .

### Przykład 1

Rozważmy ciąg  $(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  kolejnych naturalnych potęg liczby 2 i ciąg sum kolejnych wyrazów tego ciągu.

Kolejne wyrazy ciągu	Kolejne wyrazy sumy	Postać ciągu	Suma częściowa ciągu
$2^0$	1	$1 = 2^1 - 1$	$S_1 = 1$
$2^1$	+2	$1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$	$S_2 = 3$
$2^2$	+4	$1 + 2 + 4 = 7 = 2^3 - 1$	$S_3 = 7$
$2^3$	+8	$1 + 2 + 4 + 8 = 15 = 2^4 - 1$	$S_4 = 15$
$2^4$	+16	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 = 2^5 - 1$	$S_5 = 31$
$2^5$	+32	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 = 2^6 - 1$	$S_6 = 63$
...	+ ...	= ...	...

Na podstawie tabelki możemy wywnioskować, że suma  $S_n$  kolejnych  $n$  wyrazów ciągu, którego wyrazami są kolejne naturalne potęgi liczby 2, jest równa

$$S_n = 2^{n+1} - 1, \text{ gdy } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Możemy więc szybko na przykład obliczyć sumę początkowych kolejnych dziesięciu wyrazów takiego ciągu.

$$S_{10} = 2^{11} - 1 = 2047.$$

## Przykład 2

Rozważmy ciąg  $(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  kolejnych naturalnych potęg liczby 3 i ciąg sum kolejnych wyrazów tego ciągu.

Kolejne wyrazy ciągu	Kolejne wyrazy sumy	Postać ciągu	Suma częściowa ciągu
$3^0$	1	$1 = \frac{3^1-1}{2}$	$S_1 = 1$
$3^1$	+3	$1 + 3 = 4 = \frac{3^2-1}{2}$	$S_2 = 4$
$3^2$	+9	$1 + 3 + 9 = 13 = \frac{3^3-1}{2}$	$S_3 = 13$
$3^3$	+27	$1 + 3 + 9 + 27 = 40 = \frac{3^4-1}{2}$	$S_4 = 40$
$3^4$	+81	$1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121 = \frac{3^5-1}{2}$	$S_5 = 121$

Kolejne wyrazy ciągu	Kolejne wyrazy sumy	Postać ciągu	Suma częściowa ciągu
$3^5$	+243	$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364 = \frac{3^6-1}{2}$	$S_6 = 364$
...	+...	= ...	...

Na podstawie tabelki możemy wywnioskować, że suma  $S_n$  kolejnych  $n$  wyrazów ciągu, którego wyrazami są kolejne naturalne potęgi liczby 3, jest równa

$$S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}, \text{ gdy } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Możemy więc szybko na przykład obliczyć sumę początkowych kolejnych dziesięciu wyrazów takiego ciągu.

$$S_{10} = \frac{3^{11}-1}{2} = 88573.$$

## Ciąg geometryczny odwrotności potęg liczb naturalnych

Następnym przykładem ciekawych ciągów, są ciągi geometryczne odwrotności potęg naturalnych liczb naturalnych.

Z reguły ciągi te mają postać:

$$1, \frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p^3}, \frac{1}{p^4}, \dots$$

lub

$$\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p^3}, \frac{1}{p^4}, \dots$$

gdzie:

$$p \in \mathbb{N}_+$$

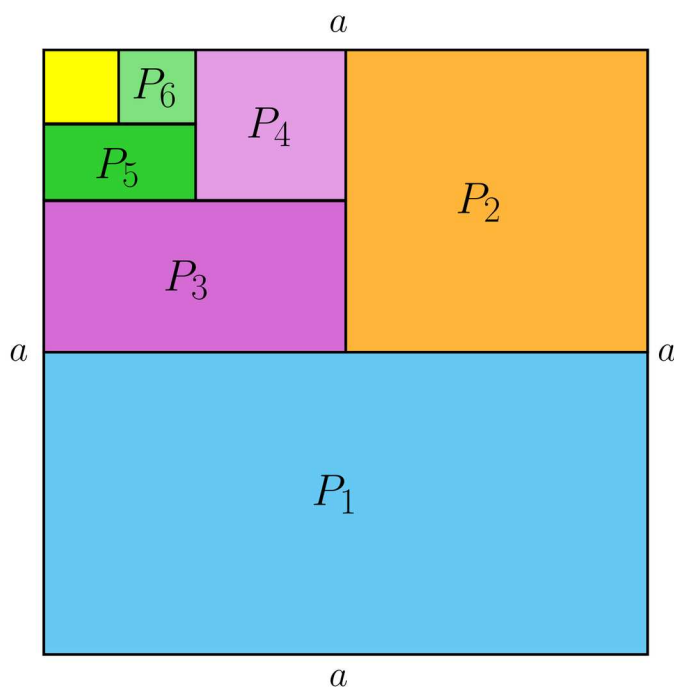
Zatem pierwszy wyraz takich ciągów to 1 lub  $\frac{1}{p}$ , a iloraz jest równy  $\frac{1}{p}$ .

Poniżej przykłady obliczania sum  $n$  początkowych wyrazów takich ciągów.

- $1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2-2^{-n}}{1}$
- $1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{3-3^{-n}}{2}$
- $1 + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \dots + \frac{1}{4^n} = \frac{4-4^{-n}}{3}$

### Przykład 3

Kwadrat o boku  $a$  rozcięto na dwa prostokąty o równych polach. Jeden z tych prostokątów rozcięto na dwa jednakowe kwadraty, z których jeden rozcięto znowu na dwa prostokąty o równych polach itd.



W ten sposób otrzymano ciąg figur – na przemian prostokątów i kwadratów o polach:

$$P_1 = \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{1}{2}a^2$$

$$P_2 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$$

$$P_3 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{8}a^2$$

$$P_4 = \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{16}a^2$$

$$P_5 = \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{8}a = \frac{1}{32}a^2$$

...

Ciąg liczb określających pola tych figur:

$$\frac{1}{2}a^2, \frac{1}{4}a^2, \frac{1}{8}a^2, \frac{1}{16}a^2, \frac{1}{32}a^2, \dots, \frac{1}{2^n}a^2, \dots$$

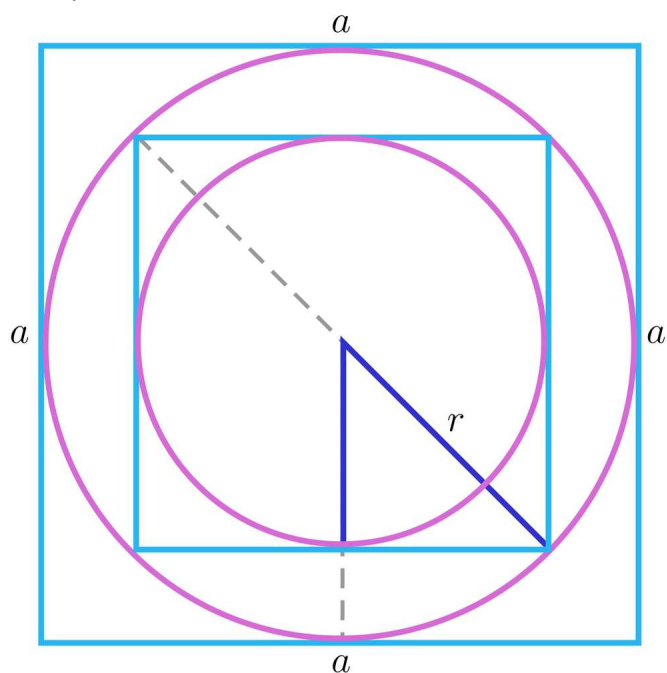
jest ciągiem geometrycznym nieskończonym o pierwszym wyrazie  $\frac{1}{2}a^2$  i ilorazie  $q = \frac{1}{2}$ .

Zauważmy, że gdybyśmy dodali dowolnie dużo tych wyrazów do siebie, np. sto tysięcy, to i tak otrzymana suma nie będzie większa od  $a^2$  (wszystkie figury mieszczą się w kwadracie o boku  $a$ ).

#### Przykład 4

W kwadrat o boku  $a$  wpisano koło. W koło to wpisano kwadrat, w który znów wpisano koło, itd. W ten sposób określony został ciąg kwadratów. Obliczymy długość boku i pole

dziesiątego z tak otrzymanych kwadratów.



Niech  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  będzie ciągiem, którego wyrazami są długości boków kolejnych kwadratów.

Zauważmy, że promień  $r$  koła wpisanego w  $n$ -ty kwadrat równy jest połowie przekątnej  $(n + 1)$ -go kwadratu.

Wynika z tego, że;

$$a_1 = a$$

$$a_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{\sqrt{2}} = \frac{a}{4}$$

$$a_6 = \frac{a_5}{\sqrt{2}} = \frac{a}{4\sqrt{2}}$$

...

Wnioskujemy, że ciąg, którego wyrazami są długości boków kolejnych kwadratów, to:

$$a, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4\sqrt{2}}, \dots$$

Jest on ciągiem geometrycznym, którego pierwszy wyraz jest równy  $a$ , natomiast iloraz ciągu jest równy  $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Wzór ogólny ciągu można więc zapisać w postaci

$$a_n = \frac{a}{(\sqrt{2})^{n-1}}$$

Obliczamy dziesiąty wyraz tego ciągu, czyli długość boku dziesiątego kwadratu.

$$a_{10} = \frac{a}{(\sqrt{2})^9} = \frac{a}{16\sqrt{2}}$$

Niech  $(b_1, b_2, b_3, \dots)$  będzie ciągiem liczb określających pola kolejnych kwadratów.

Zatem:

$$b_1 = a^2$$

$$b_2 = \frac{a^2}{2}$$

$$b_3 = \frac{a^2}{4}$$

$$b_4 = \frac{a^2}{8}$$

$$b_5 = \frac{a^2}{16}$$

$$b_6 = \frac{a^2}{32}$$

...

Ciąg liczb określających pola kolejnych kwadratów

$$a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{8}, \frac{a^2}{16}, \frac{a^2}{32}, \dots, \frac{a^2}{2^{n-1}}, \dots$$

stanowi **ciąg geometryczny** nieskończony o pierwszym wyrazie  $a^2$  i ilorazie  $q = \frac{1}{2}$ .

Wnioskujemy, że wzór ogólny ciągu  $(b_n)$  można zapisać w postaci

$$b_n = \frac{a^2}{2^{n-1}}$$

Obliczamy pole dziesiątego z tak otrzymanych kwadratów.

$$b_{10} = \frac{a^2}{2^9} = \frac{a^2}{512}$$

Odpowiedź:

Długość boku dziesiątego kwadratu jest równa  $\frac{a}{16\sqrt{2}}$ , a pole  $\frac{a^2}{512}$ .

## Ułamki dziesiętne okresowe

Niektóre ułamki zwykłe mają rozwinięcia dziesiętne okresowe. Na przykład:

$$\frac{1}{9} = 0,11111\dots$$

$$\frac{2}{3} = 0,6666\dots$$

$$\frac{17}{6} = 2,8333\dots$$

$$\frac{5}{37} = 0,135135135\dots$$

Każdą z tych liczb można zapisać z wykorzystaniem sumy wyrazów odpowiedniego ciągu geometrycznego niekończonego.

$$\frac{1}{9} = 0,(1) = 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots$$

$$\frac{2}{3} = 0,(6) = 0,6 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + \dots$$

$$\frac{17}{6} = 2,8(3) = 2,8 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$$

$$\frac{5}{37} = 0,(135) = 0,135 + 0,000135 + 0,000000135 + \dots$$

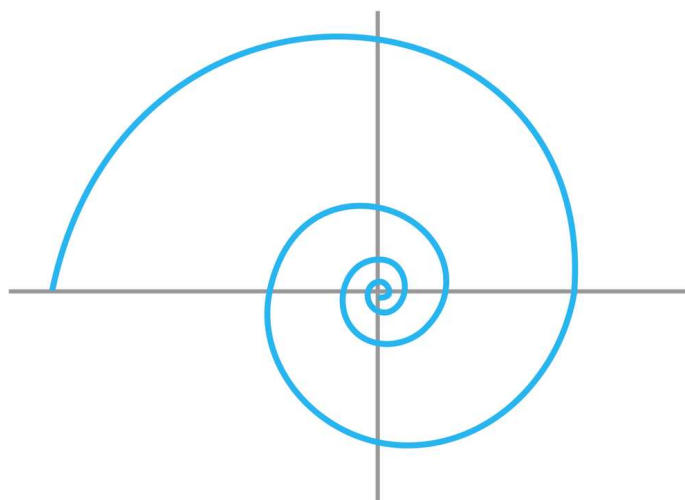
## Przykłady innych ciągów geometrycznych

Bardzo często w interpretacji zagadnień związanych z ciągami geometrycznymi, pomagają rysunki.

Poniżej dwa klasyczne zadania tego typu.

### Przykład 5

Spirala (patrz rysunek) składa się z siedmiu półokręgów o średnicach odpowiednio równych 250, 150, 90, 54, ...



Obliczmy długość tej spirali.

Zauważmy, że długości średnic półokręgów, z których składa się spirala, tworzą siedmiowyrazowy ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 250 i ilorazie

$$\frac{150}{250} = \frac{3}{5}.$$

Zatem i długości półokręgów, z których zbudowana jest spirala, będą tworzyły pewien **ciąg geometryczny**, oznaczmy go  $(d_n)$ .

Przy czym pierwszy wyraz tego ciągu będzie równy  $\frac{250\pi}{2} = 125\pi$ , a iloraz będzie nadal równy  $\frac{3}{5}$ .

Obliczmy kolejne wyrazy ciągu  $(d_n)$ .

$$d_1 = 125\pi$$

$$d_2 = \frac{3}{5} \cdot 125\pi = 75\pi$$

$$d_3 = \frac{3}{5} \cdot 75\pi = 45\pi$$

$$d_4 = \frac{3}{5} \cdot 45\pi = 27\pi$$

$$d_5 = \frac{3}{5} \cdot 27\pi = 16,2\pi$$

$$d_6 = \frac{3}{5} \cdot 16,2\pi = 9,72\pi$$

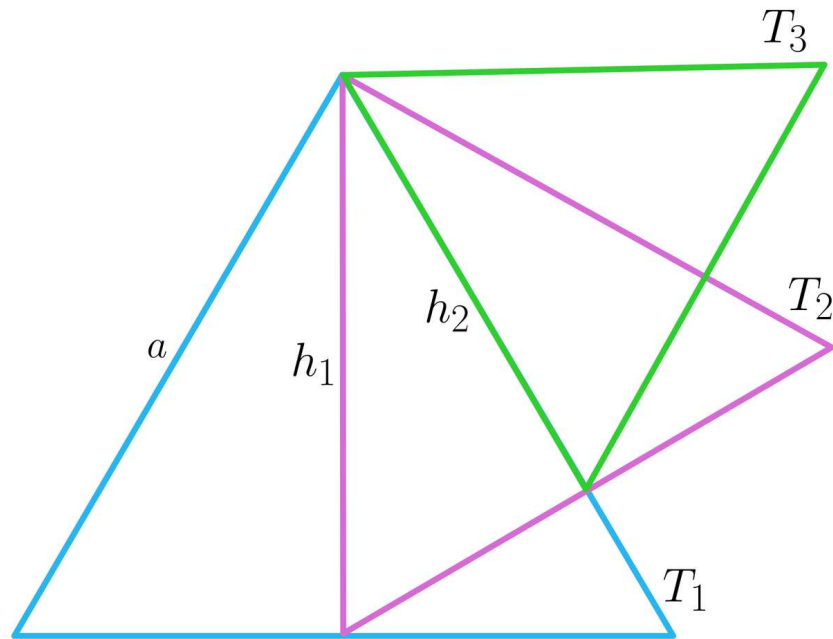
$$d_7 = \frac{3}{5} \cdot 9,72\pi = 5,832\pi$$

Długość spirali wynosi:

$$125\pi + 75\pi + 45\pi + 27\pi + 16,2\pi + 9,72\pi + 5,832\pi = 303,752\pi.$$

### **Przykład 6**

Dany jest trójkąt równoboczny  $T_1$  o boku długości  $a$ . Rysujemy kolejno trójkąty równoboczne  $T_2, T_3, T_4, \dots$  tak, że długość boku kolejnego trójkąta jest równa wysokości poprzedniego trójkąta. Obliczmy pole dziesiątego tak utworzonego trójkąta.



Aby obliczyć długości boków kolejnych trójkątów, korzystamy ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego o boku  $a$ :  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Oznaczmy:

$a_1, a_2, a_3, \dots$  – długości boków kolejnych trójkątów,

$h_1, h_2, h_3, \dots$  – wysokości kolejnych trójkątów.

Wtedy:

$$a_1 = a$$

$$a_2 = h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$a_3 = h_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}a$$

$$a_4 = h_3 = \frac{3}{4}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}a$$

...

Zauważmy, że długości boków kolejnych trójkątów tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie  $a$  i ilorazie  $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Obliczamy długość boku trójkąta  $T_{10}$ .

$$a_{10} = a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9$$

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta równobocznego, obliczamy pole trójkąta  $T_{10}$ .

$$P_{10} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[ a \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^9 \right]^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^9 \cdot a^2$$

$$P_{10} = \frac{19683\sqrt{3}}{1048576} \cdot a^2$$

Odpowiedź:

Pole dziesiątego trójkąta jest równe  $\frac{19683\sqrt{3}}{1048576} \cdot a^2$ .

## Słownik

### ciąg geometryczny

ciągami geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę  $q$ , zwaną ilorazem ciągu

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, a następnie rozwiąż Polecenie 2.

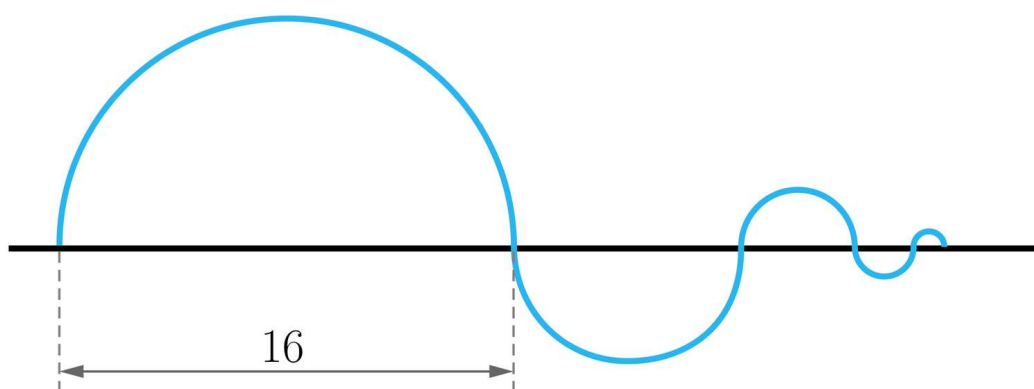
Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D77U6DIO5>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej ciągów geometrycznych.

---

## Polecenie 2

Na rysunku przedstawiono fragment „fali” utworzonej z nieskończenie wielu półokręgów, przy czym średnica każdego następnego półokręgu jest równa połowie średnicy poprzedniego półokręgu. Długość średnicy pierwszego półokręgu jest równa 16. Oblicz długość „fali” utworzonej z 5 początkowych kolejnych półokręgów.



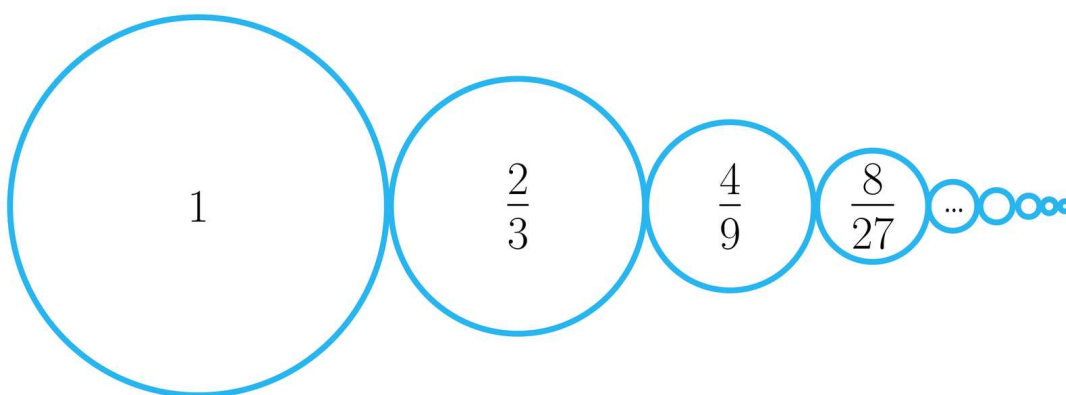
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



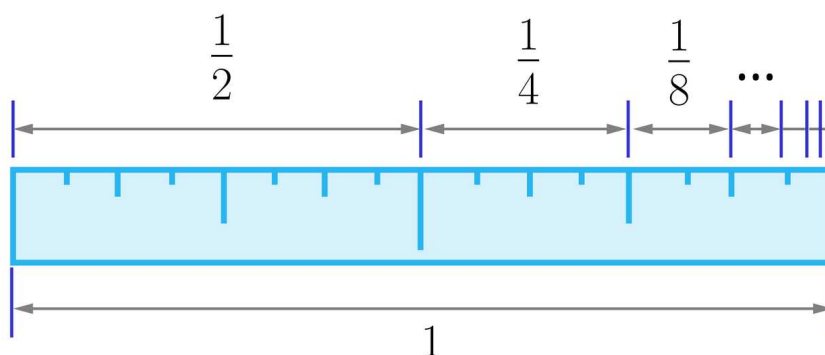
Zapoznaj się z poniższym rysunkiem. Na rysunku przedstawiono okrąg o promieniu 1. Następnie narysowano okręgi  $O_2, O_3, O_4, \dots$  o promieniach odpowiednio równych  $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$ . Ile będzie równy promień dziewiątego okręgu z tak utworzonych okręgów?



## Ćwiczenie 2



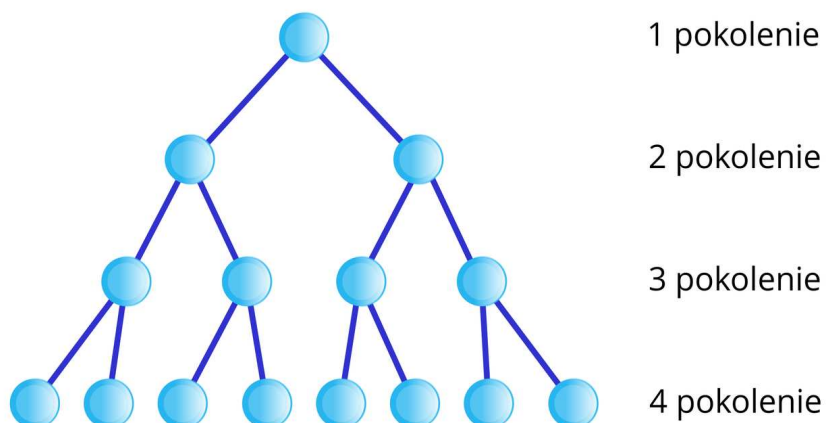
Na rysunku poniżej przedstawiona jest graficzna interpretacja nieskończonej sumy odwrotności naturalnych potęg liczby dwa (począwszy od  $(\frac{1}{2})^1$ ).



### Ćwiczenie 3



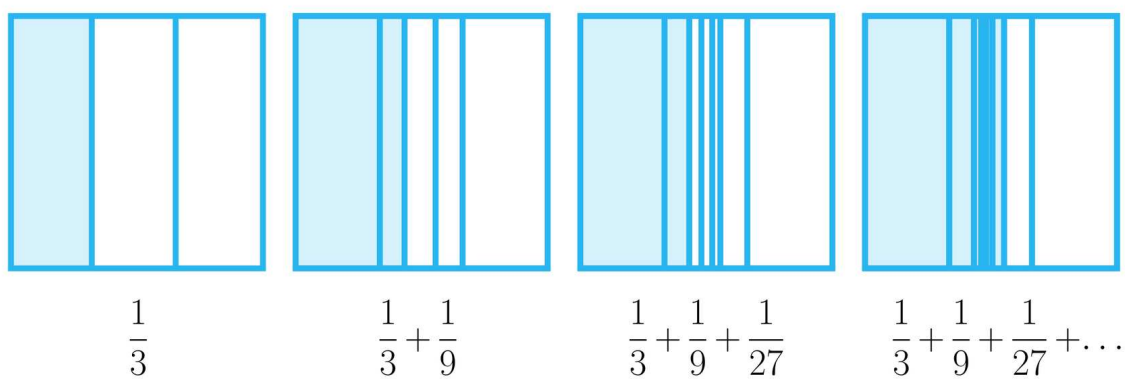
Oto graficzna interpretacja rozrastania się kolonii pewnych bakterii.



### Ćwiczenie 4



Na podstawie rysunku zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.





## Ćwiczenie 6



Uzupełnij tabelkę kilku kolejnych naturalnych potęg liczby 5 i sum tych kolejnych potęg. Wpisz odpowiednie liczby.

$5^0$	$5^1$	$5^2$	$5^3$	$5^4$	...	Kolejne wyrazy ciągu
1	+5	+25	+125	+625	+...	Kolejne wyrazy sumy
= 1						$1 = \frac{5^1 - 1}{4}$
	= 6					$1 + 5 = \frac{5^2 - 1}{4}$ ..... .....
		=	.....			$1 + 5 + 25 = \frac{5^3 - 1}{4}$ .....
			= 156			$1 + 5 + 25 +$ ..... .....
				=	.....	$1 + 5 + 25 + 125 + 625 = \frac{\quad - 1}{4}$

## Ćwiczenie 7



Sumy liczb w kolejnych poziomych wierszach trójkąta Pascala tworzą pewien ciąg geometryczny.

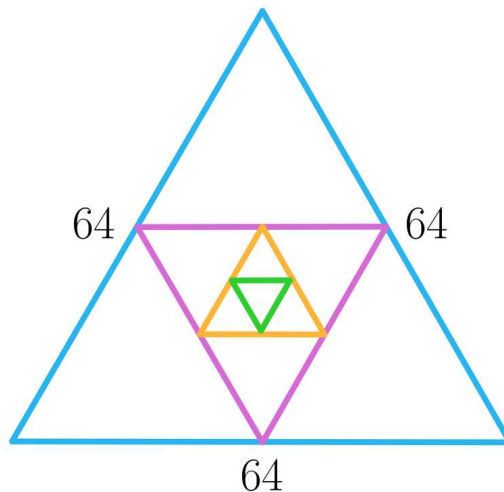
0										1								
1									1	1								
2									1	2	1							
3									1	3	3	1						
4									1	4	6	4	1					
5									1	5	10	10	5	1				
6									1	6	15	20	15	6	1			
7									1	7	21	35	35	21	7	1		
8									1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9									1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Wypisz sześć początkowych wyrazów tego ciągu i podaj wzór ogólny ciągu.

## Ćwiczenie 8



Dany jest trójkąt równoboczny  $T_1$  o boku długości 64. Rysujemy kolejno trójkąty równoboczne  $T_2, T_3, T_4, \dots$  tak, że wierzchołek kolejnego trójkąta jest zarazem środkiem odpowiedniego boku poprzedniego trójkąta.



Oblicz pole siódmego tak utworzonego trójkąta.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Przykłady ciągów geometrycznych

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa II lub III, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) stosuje wzór na  $n$ -ty wyraz i na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zapisuje w postaci ciągu geometrycznego niektóre zależności liczbowe lub geometryczne
- podaje interpretację graficzną danych ciągów geometrycznych
- ustala pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego określonego w różny sposób
- wykorzystuje wzory związane z ciągiem geometrycznym do rozwiązywania problemów geometrycznych i arytmetycznych

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

## **Metody i techniki nauczania:**

- technika Ishikawy
- porównania binarne
- wyścig biedronek

## **Formy pracy:**

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie, pracując w grupach, korzystając z techniki Ishikawy przedstawiają uzyskane dotychczas wiadomości na temat ciągu geometrycznego. Przy czym na głównych „ośiach” powinny być zanotowane kluczowe informacje – na mniejszych „ośiach” wynikające z nich wnioski.
2. Przedstawiciele grup krótko przedstawiają rezultaty prac grup.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie w parach pracują metodą porównań binarnych, starając się na podstawie znanych im informacji o ciągach (w szczególności o ciągu arytmetycznym) opracować kilka przykładów graficznego i arytmetycznego przedstawienia ciągów geometrycznych.
2. Przy czym każda para powinna znaleźć co najmniej dwa przykłady (w tym co najmniej jeden przykład ciągu geometrycznego nieskończonego) i opracować tabelę porównań tych przykładów.
3. Po wypełnieniu tabeli, pary konfrontują swoje zapisy z przykładami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. I ewentualnie modyfikują swoje ustalenia. Następnie analizują animację i opracowują po jednym zadaniu podobnego typu, bazując na wytworzonych wcześniej przykładach ciągów
4. Ochotnicy przedstawiają rezultaty swojej pracy – zwracają uwagę na popełnione błędy, ale też nieszablonowe pomysły, dzielą się przemyśleniami na temat trafności prezentowanych propozycji.

### **Faza podsumowująca:**

1. Podsumowaniem zajęć jest wyścig biedronek. Uczniowie pracują nadal w parach, rozwiązując na przemian ćwiczenia interaktywne. Każda „biedronka” posiada początkowo 5 kropek. Jeśli dobrze rozwiąże zadanie, nie traci kropek, ale za każde błędne rozwiązanie traci jedną kropkę. Uczniowie którzy po zakończonym wyścigu nadal posiadają 5 kropek, mogą być nagrodzeni dobrymi ocenami.
2. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
3. Końcowy element to refleksje nauczyciela na temat pracy uczniów i ocena prac par.

### **Praca domowa:**

Zadaniem uczniów jest zapoznanie się z paradoksem Zenona z Elei (informacji o paradoksie muszą poszukać w dostępnych źródłach) i zinterpretować go na gruncie teorii związanej z ciągiem geometrycznym.

### **Materiały pomocnicze:**

[Ciąg arytmetyczny i geometryczny zastosowanie](#)

### **Wskazówki metodyczne:**

Animacja jest dobrym materiałem do wprowadzenia w tematykę związaną z szeregami geometrycznymi.