



Zagadka Wież Hanoi

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Gra edukacyjna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zagadka Wież Hanoi

Źródło: Thuan Pham, domena publiczna.

Algorytmika pozwala rozwiązywać wiele problemów, łamigłówek czy zagadek. Wedle jednego z dawnych podań doprowadzi również do końca świata.

Mowa o zagadce Wież Hanoi. Jak głosi tybetańska legenda, mnisi w świątyni Brahmy przekładają 64 złote krążki między trzema słupkami. Gdy skończą, nastąpi koniec świata. Obliczenie, ile czasu zajmie im rozwiązanie tej łamigłówki, pozwoli nam się zorientować, czy powinniśmy już zacząć się martwić...

Do rozwiązania zagadki Wieży Hanoi przydatna może okazać się rekurencja ze względu na powtarzalność czynności w algorytmie.

Implementację omawianego algorytmu przedstawiamy w e-materiałach:

- [Zagadka Wież Hanoi w języku C++](#),
- [Zagadka Wież Hanoi w języku Java](#),
- [Zagadka Wież Hanoi w języku Python](#).

Więcej zadań? Sięgnij do [Zagadka Wież Hanoi – zadania maturalne](#).

Twoje cele

- Wyjaśnisz, na czym polega łamigłówka Wież Hanoi.

- Przeanalizujesz rozwiązanie problemu dla wybranego przypadku.
- Prześledzisz zapisany za pomocą pseudokodu algorytm rekurencyjnego rozwiązania zagadki Wież Hanoi.

Przeczytaj

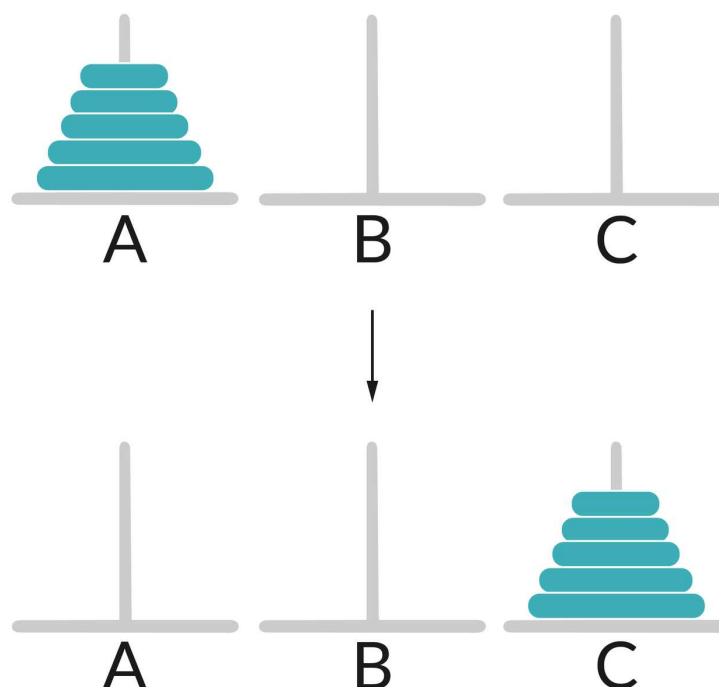
Popularyzatorem łamigłówki znanej jako Wieże Hanoi jest francuski matematyk Édouard Lucas. Zajmował się on m.in. badaniem właściwości ciągu Fibonacciego (podał wzór na jego n -ty wyraz) i opracował własną metodę sprawdzania, czy liczba naturalna jest liczbą pierwszą. Ideę Wież Hanoi Lucas przedstawił w 1883 roku.

Na czym polega zagadka Wież Hanoi?

Zagadka Wież Hanoi polega na przeniesieniu n krążków z jednego słupka na drugi. Musi jednak zostać spełnionych kilka warunków:

- krążki muszą mieć różne średnice,
- wszystkie krążki początkowo są nałożone na jeden ze słupków,
- krążki są ułożone w kolejności od krążka o największej średnicy (na dole słupka) do krążka o najmniejszej średnicy (na górze słupka),
- jednorazowo możemy przenieść tylko jeden krążek,
- nie można położyć większego krążka na mniejszym,
- mamy do dyspozycji dodatkowy, pomocniczy słupek, na który możemy tymczasowo nakładać krążki.

Gdy wszystkie krążki znajdą się na docelowym słupku, uznajemy problem za rozwiązany. Poniżej został zobrazowany stan początkowy – wszystkie krążki znajdują się na słupku A, a następnie stan końcowy – wszystkie krążki znajdują się na słupku C. Pomocniczym słupkiem jest słupek B.



Rozwiązanie iteracyjne

Zastanówmy się, w jaki sposób rozwiązać zagadkę Wież Hanoi **iteracyjnie**.

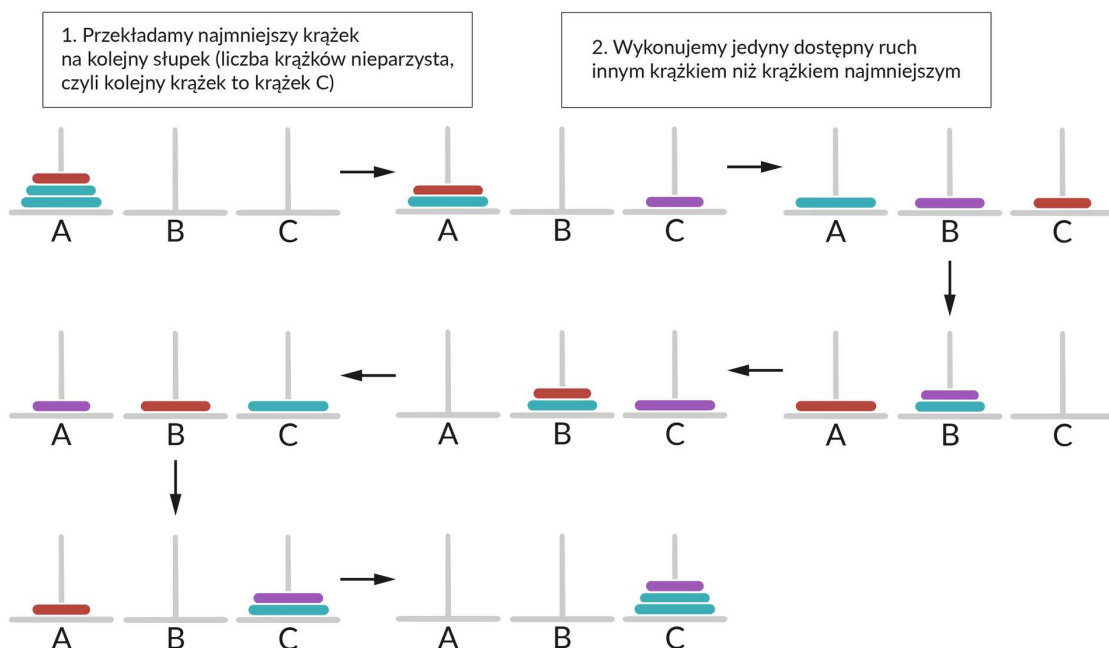
Aby rozwiązać problem, krążki musimy przekładać na zmianę. Pierwszym krokiem jest przeniesienie najmniejszego krążka ze słupka, na którym jest nałożony, na kolejny słupek. Kolejny słupek wyznaczamy w następujący sposób:

- Jeżeli liczba krążków jest parzysta, kolejnym słupkiem jest słupek po prawej stronie, czyli ze słupka A przenosimy na słupek B, ze słupka C na słupek A.
- Jeżeli liczba krążków jest nieparzysta, kolejnym słupkiem jest ten po lewej stronie, czyli ze słupka A przenosimy na słupek C itd.

Drugi krok polega na tym, że innym krążkiem wykonamy jedyny dostępny ruch, to znaczy taki, w którym nie położymy większego krążka na mniejszy.

Dwa powyższe kroki powtarzamy tak długo, aż wszystkie krążki znajdą się na słupku C.

Kolejne etapy rozwiązania zagadki Wież Hanoi dla trzech krążków zostały przedstawione poniżej. Na czerwono zostały oznaczone krążki, które będziemy przenosić, natomiast na fioletowo krążki, które zostały właśnie przeniesione.



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Jak widać na powyższym obrazku, wykonaliśmy siedem ruchów w celu przeniesienia trzech krążków.

Buddyjska legenda a informatyka

Dlaczego na lekcji informatyki w ogóle zajmujemy się układanką pochodzącą z czasów, gdy nie istniały jeszcze komputery? Otóż Wieże Hanoi zbudowane są podobnie do struktury danych zwanej [stosem](#), wykorzystywanej przez procesory podczas przetwarzania informacji.

Tak jak w przypadku krążków składających się na wieżę, w stosie dostępny jest tylko element znajdujący się na samym jego szczycie. Jediną różnicą jest to, że elementy stosu mają postać ciągów zer i jedynek, a nie krążków. Procesory albo odkładają dane na szczyt stosu, albo pobierają ze stosu odłożone tam elementy.

Rozwiązanie rekurencyjne

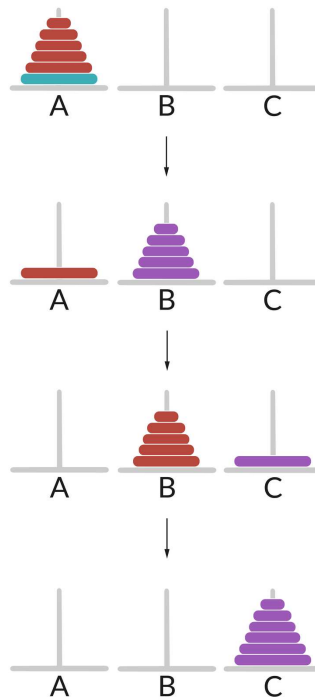
Zapisany za pomocą pseudokodu algorytm wykorzystujący [rekurencję](#) wygląda w następujący sposób:

```
1 funkcja wiezaHanoi(n, A, B, C)
2   jeżeli n > 0 wykonaj:
3       wiezaHanoi(n - 1, A, C, B)
4       wypisz: "Przeniesienie z" A "do" C
5       wiezaHanoi(n - 1, B, A, C)
```

Rekurencyjne rozwiązanie zagadki Wież Hanoi zawarte jest w trzech krokach:

1. W trzeciej linii pseudokodu wywołujemy rekurencyjnie funkcję `wiezaHanoi`. Ta wywołana rekurencyjnie funkcja zrealizuje nam przeniesienie $n - 1$ górnych krążków ze słupka A na słupek B. Na słupku A pozostanie n -ty, największy krążek. Reszta krążków będzie nałożona na słupku B.
2. W czwartej linii przenosimy n -ty krążek ze słupka A na słupek docelowy C.
3. W piątej linii ponownie wywołujemy rekurencyjnie funkcję `wiezaHanoi`, aby przenieść $n - 1$ krążków ze słupka B na słupek C, na którym położony jest już największy krążek.

Ilustracja przedstawia kroki algorytmu rekurencyjnego dla sześciu krążków.



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Złożoność obliczeniowa

Liczba przeniesień pojedynczego krążka, które należy wykonać, aby rozwiązać zagadkę Wież Hanoi wynosi:

$$2^n - 1$$

Na przykład dla trzech krążków liczba przeniesień wynosi:

$$2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

Zatem złożoność obliczeniowa algorytmu rozwiązania problemu Wież Hanoi to:

$$O(2^n)$$

Jest to **złożoność wykładnicza**, to znaczy rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem liczby krążków, czyli parametru wejściowego.

Słownik

funkcja rekurencyjna

funkcja, która wywołuje samą siebie aż do momentu osiągnięcia przypadku bazowego

iteracja

słowo pochodzące od łacińskiego *iteratio* (powtarzanie); oznacza powtarzanie w pętli tych samych instrukcji, aż do spełnienia pewnego warunku

myślenie rekurencyjne

myślenie, które polega na tym, że wartość pewnej wielkości obliczana jest poprzez odwołanie się do wielkości określonych dla mniejszych wartości parametrów

przypadek bazowy

warunek w funkcji rekurencyjnej, po spełnieniu którego funkcja nie wywołuje samej siebie po raz kolejny

przypadek rekurencyjny

warunek w funkcji rekurencyjnej, po spełnieniu którego funkcja ponownie wywołuje siebie samą

rekurencja

sytuacja, w której funkcja wywołuje samą siebie aż do napotkania przypadku podstawowego

stos

struktura danych, w której informacje pobierane są z wierzchołka i odkładane na wierzchołek; struktura typu LIFO (Last In, First Out – ostatni na wejściu, pierwszy na wyjściu)

zagadka Wież Hanoi

problem, polegający na przeniesieniu wieży z krążków z jednego słupka na drugi, przy czym można przenosić tylko po jednym krążku z wierzchu stosu; nie jest dozwolone położenie większego krążka na mniejszym

złożoność wykładnicza

złożoność, która jest określona za pomocą funkcji wykładniczej, rośnie w zależności od rozmiaru danych wejściowych n

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Sprawdź swoją wiedzę, biorąc udział w grze.



Test

Sprawdź swoją wiedzę o zagadce Wież Hanoi, biorąc udział w grze

Poziom trudności:

łatwy

Limit czasu:

7 min

Twój ostatni wynik:

-

Uruchom

Polecenie 2

Wybeirz jedno z zagadnień występujących w quizie i opisz je szczegółowo.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dokończ zdanie.

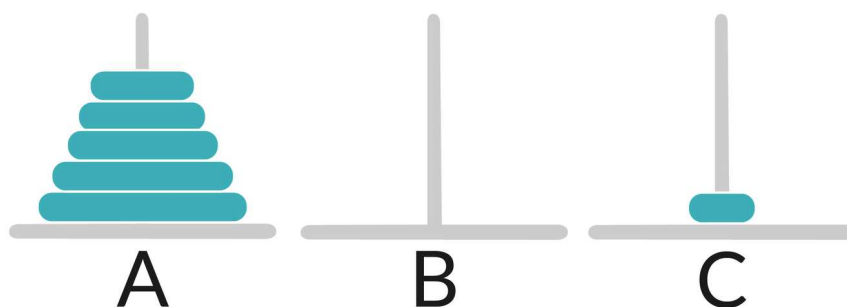
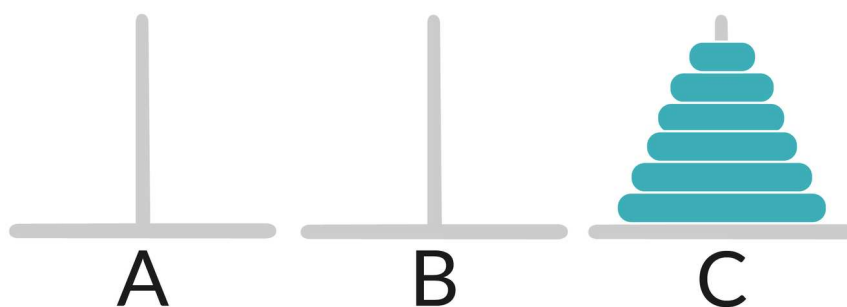
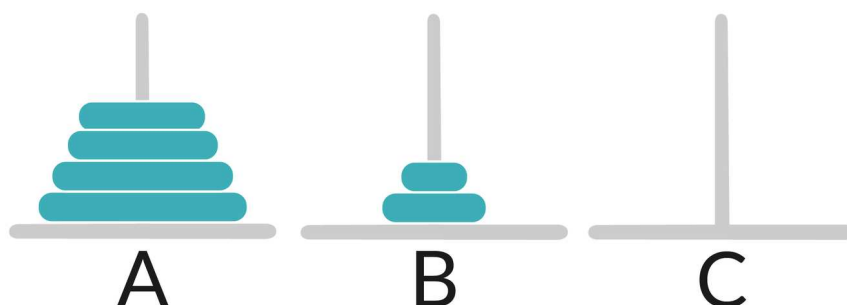
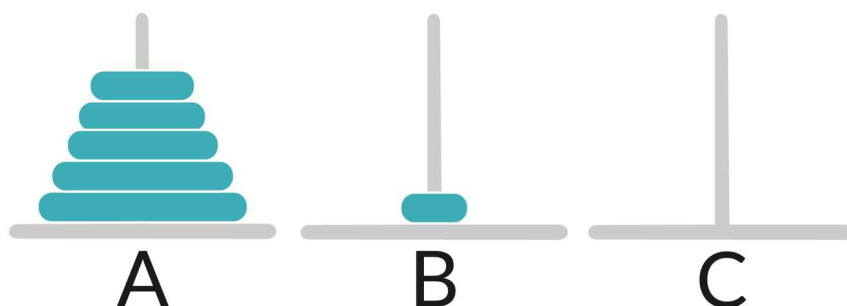
Algorytm rozwiązywania problemu Wież Hanoi kończy się, gdy...

- ☐ krążki będą ułożone w kolejności od największego do najmniejszego.
- ☐ przełożymy najmniejszy krążek na kolejny słup.
- ☐ słup pomocniczy zostanie wypełniony.
- ☐ wszystkie krążki znajdą się na docelowym słupku.

Ćwiczenie 2



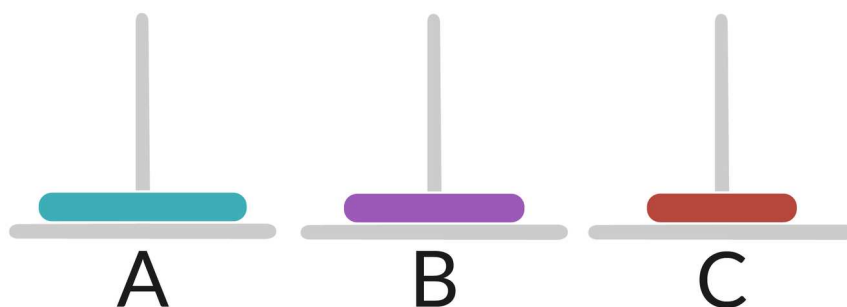
Wskaż, która ilustracja przedstawia sytuację po poprawnie wykonanym pierwszym kroku algorytmu rozwiązywania problemu Wież Hanoi dla sześciu krążków?



Ćwiczenie 3



Zaznacz, które spośród operacji są zabronione na elementach przedstawionych na ilustracji.



☐ Przeniesienie z C do A

☐ Przeniesienie z B do C

☐ Przeniesienie z A do B

☐ Przeniesienie z A do C

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 4



Wskaż, ile ruchów potrzeba do rozwiązania zagadki Wież Hanoi dla 11 krążków.

☐ 15

☐ 3

☐ 2047

☐ 1024

☐ 21

☐ 1023

Ćwiczenie 5



Zdecyduj, jaka jest złożoność algorytmu rozwiązania problemu Wież Hanoi.

☐ kwadratowa

☐ wielomianowa

☐ logarytmiczna

☐ wykładnicza

Ćwiczenie 6



Uporządkuj kolejne kroki pseudokodu algorytmu rekurencyjnego rozwiązywania problemu Wież Hanoi.

wypisz: "Przeniesienie z" A "do" C

jeżeli $n > 0$

WieżaHanoi($n - 1$, B, A, C)

WieżaHanoi($n - 1$, A, C, B)

WieżaHanoi(n , A, B, C)

Ćwiczenie 7



Uporządkuj kolejne kroki algorytmu rekurencyjnego rozwiązania problemu Wież Hanoi dla dwóch krążków.

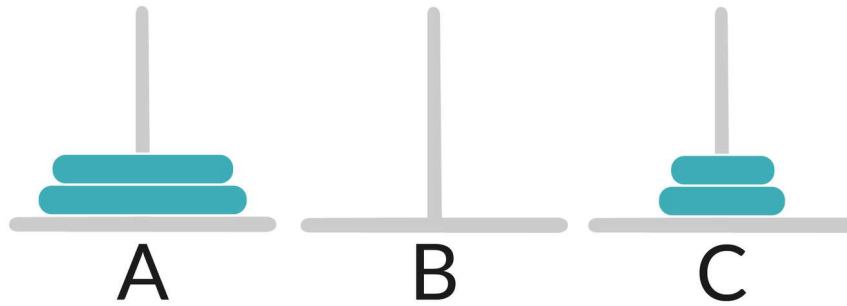


Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 8



Wskaż przeniesienie, które nastąpi jako kolejne w algorytmie problemu Wież Hanoi przedstawionym na ilustracji.



☐ z A do C

☐ z C do B

☐ z A do B

☐ z C do A

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Zagadka Wież Hanoi

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) objaśnia, a także porównuje podstawowe metody i techniki algorytmiczne oraz struktury danych, wykorzystując przy tym przykłady problemów i algorytmów, w szczególności:

b) rekurencję (do generowania ciągów liczb, potęgowania, sortowania liczb, generowania fraktali),

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Wyjaśnisz, na czym polega łamigłówka Wież Hanoi.

- Przeanalizujesz rozwiązanie problemu dla wybranego przypadku.
- Prześledzisz zapisany za pomocą pseudokodu algorytm rekurencyjnego rozwiązania zagadki Wież Hanoi.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Zagadka Wież Hanoi”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. **Rozpoznanie wiedzy uczniów.** Nauczyciel zadaje uczniom pytania:
 - na czym polega zagadka Wież Hanoi?
 - co to jest rekurencja?
 - co to jest iteracja?
 - na czym polega złożoność wykładnicza?
2. Nauczyciel wyświetla temat i cele zajęć. Prosi uczniów, by na podstawie wiadomości zdobytych przed lekcją zaproponowali kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach dyskutują na temat tego, czy zagadkę Wież Hanoi można rozwiązać i rekurencyjnie, i iteracyjnie. Chętne lub wybrane osoby uzasadniają swoje stanowisko.
2. **Praca z multimediami.** Uczniowie pracują w parach. Odpowiadają na pytania z sekcji „Gra edukacyjna”.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia nr 1-8 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie dzielą się wynikami swojej pracy z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

Praca domowa:

1. Poszukaj informacji na temat innych zagadek, które rozwiązać można, wykorzystując algorytmy iteracyjne lub rekurencyjne.

Wskazówki metodyczne:

- Uczniowie mogą wykorzystać multimedia w sekcji „Gra edukacyjna” do przygotowania się do lekcji powtórkowej.
- Uczniowie mogą przygotować notatkę na temat tego, jak zmienia się złożoność czasowa algorytmu w zależności od liczby krążków.