



Pojęcie silni

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W matematyce używamy różnych działań. Zapewne dotychczas najczęściej spotykałeś się z działaniami dwuargumentowymi czyli takimi, do których potrzebujemy dwóch liczb. Należą do nich: dodawanie (potrzebne są dwa składniki), odejmowanie (potrzebne są odjemna i odjemnik), mnożenie (potrzebne są dwa czynniki), dzielenie (potrzebne są dzielna i dzielnik), potęgowanie (potrzebne są podstawa i wykładnik). Znasz też już zapewne działania jednoargumentowe czyli takie, do których wykonania potrzebna jest jedna liczba. Należą do nich: zwiększanie o 1 (jedną liczbę x zwiększamy o 1 i otrzymujemy wynik $x + 1$), podwajanie (jedną liczbę x podwajamy i otrzymujemy wynik $2x$, wyznaczanie wartości bezwzględnej (aby obliczyć wartość bezwzględną $|x|$ wystarczy jedna liczba x), podnoszenie do kwadratu (wystarczy jedna liczba x , którą podnosimy do kwadratu i otrzymujemy wynik x^2). W tym rozdziale poznasz kolejne działanie jednoargumentowe, które można wykonać na dowolnej liczbie naturalnej.

Twoje cele

- Obliczysz silnię z liczby naturalnej.
- Wyznaczysz liczbę zer na końcu liczby zapisanej przy pomocy silni.

Przeczytaj

Kiedy w matematyce często pojawia się jakieś wyrażenie lub działanie, matematycy próbują uprościć zapis szukając jakiegoś skrótu lub wprowadzając nowy symbol. Okazuje się, że w kombinatoryce, analizie matematycznej, matematyce dyskretniej i innych działach matematyki pojawiają się wyrażenia typu: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33$, czyli iloczyny kolejnych liczb naturalnych, w których najmniejszym czynnikiem jest liczba 1. Christian Kramp (francuski lekarz i matematyk) uznał, że wprowadzenie nowego działania i oznaczenie go symbolem $!$ uprości zapis skomplikowanych mnożeń.

Definicja: silnia z liczby n (lub “silnia liczby n ”)

iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n . Oznaczamy ją $n!$ i czytamy “ n silnia”.

Z przyczyn praktycznych umawiamy się ponadto, że $0! = 1$.

Definicję [silni liczby naturalnej](#) n możemy również zapisać symbolicznie:

$$0! = 1$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}_+$$

Przydaje się również (zwłaszcza w informatyce) definicja rekurencyjna silni:

$$0! = 1$$

$$n! = (n - 1)! \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}_+$$

Przykład 1

Obliczmy silnie kilku liczb naturalnych:

$$0! = 1 \text{ (z definicji)}$$

$$1! = 1 \text{ (z definicji)}$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

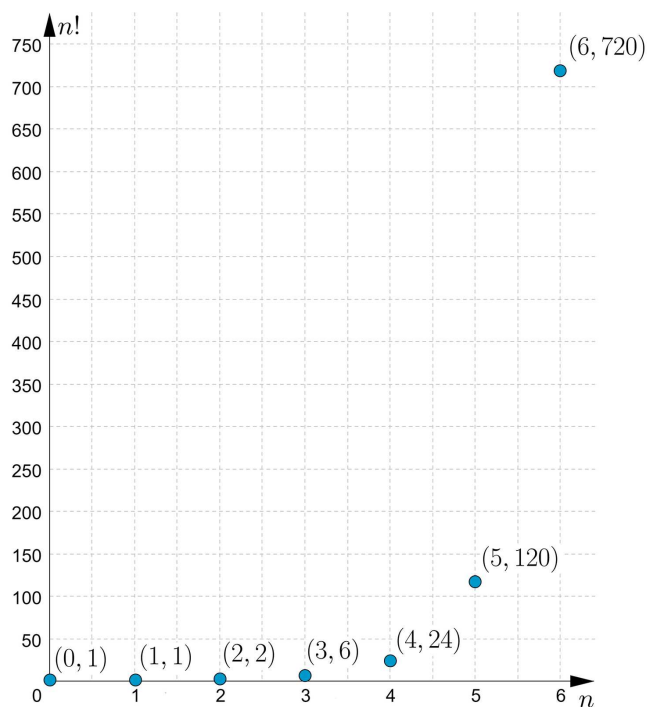
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Zwróć uwagę na to, jak szybko rosną liczby pod wpływem silni. Poniżej znajduje się wykres, który to obrazuje. Znajduje się tam kilka punktów, których drugie współrzędne są

równe silniom z ich pierwszych współrzędnych.



Przykład 2

Zbadamy, ile kolejnych końcowych (licząc od rzędu jedności) zer ma liczba $24!$.

Z definicji silni wynika, że

$$24! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot \dots \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24$$

Zauważmy najpierw, że zero na końcu liczby bierze się z pomnożenia liczb 2 i 5 ($2 \cdot 5 = 10$). Każdy z czynników 10 i 20 wygeneruje jedno końcowe zero. Iloczyn liczb 15 i 4 (czyli 60) również spowoduje pojawienie się zera na końcu liczby. Zatem liczba $24!$ kończy się czterema zerami.

Zauważmy jeszcze, że aby uzyskać poprawny wynik, w iloczynie $2 \cdot 5$ liczbę 2 można zastąpić dowolną liczbą parzystą niepodzielną przez 5 występującą w rozkładzie $24!$. Podobnie w iloczynie $15 \cdot 4$ czynnik 4 możemy zastąpić przez dowolną liczbę parzystą niepodzielną przez 5 występującą w rozkładzie na czynniki liczby $24!$.

Przykład 3

Obliczymy wartości liczbowe wyrażeń zawierających silnie.

$$(5 - 3)! = 2! = 2$$

$$5! - 3! = 120 - 6 = 114$$

$$(6 - 2)! = 4! = 24$$

$$6! - 2! = 720 - 2 = 718$$

$$(3 + 2)! = 5! = 120$$

$$3! + 2! = 6 + 2 = 8$$

$$(4 + 2)! = 6! = 720$$

$$4! + 2! = 24 + 2 = 26$$

Czasami w matematyce używa się również tzw. **podwójnej silni**.

Definicja: podwójna silnia z liczby n

Iloczyn wszystkich liczb naturalnych dodatnich o tej samej parzystości co n nie większych od n . Oznaczamy ją $n!!$ i czytamy “ n podwójna silnia”. Ponadto wprowadzamy umowę, że $0!! = 1$.

Definicję podwójnej silni możemy zapisać następująco:

$$0!! = 1$$

$$1!! = 1$$

$$n!! = n \cdot (n - 2) \cdot (n - 4) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1, \text{ dla nieparzystych liczb naturalnych } n$$

$$n!! = n \cdot (n - 2) \cdot (n - 4) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2, \text{ dla parzystych liczb naturalnych } n$$

Podwójna silnia liczby naturalnej n ma też definicję rekurencyjną:

$$0!! = 1$$

$$1!! = 1$$

$$n!! = n \cdot (n - 2)!!, \text{ dla liczb naturalnych } n \text{ większych lub równych } 2$$

Przykład 4

Obliczmy:

$$5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$$

$$6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$$

Ważne!

Zauważmy, że liczba $n!!$ nie jest równa liczbie $(n!)!$.

Na przykład $4!! = 4 \cdot 2 = 8$, zaś $(4!)! = (24)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24$.

Słownik

silnia liczby naturalnej n

iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n włącznie, oznaczamy ją $n!$ (czyt. “ n silnia”); przyjmujemy dodatkowo, że $0! = 1$

podwójna silnia liczby naturalnej n

iloczyn wszystkich liczb naturalnych o tej samej parzystości co n , od 1 do n włącznie, oznaczamy ją $n!!$ (czyt. “ n podwójna silnia”); przyjmujemy dodatkowo, że $0!! = 1$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, która przypomina definicję silni, a następnie rozwiąż zadania poniżej.

Polecenie 2

Połącz w pary wyrażenia zawierające silnie i ich wartości liczbowe.

$$(2 + 3)!$$

$$8$$

$$(2 \cdot 3)!$$

$$1$$

$$2! \cdot 3!$$

$$4$$

$$3! - 2!$$

$$720$$

$$(3 - 2)!$$

$$12$$

$$2! + 3!$$

$$120$$

Polecenie 3

Oblicz wartości wyrażeń. Wynik wpisz w postaci dziesiętnej.

Działanie	Wynik
$2! + 2! + 2!$	
$1! + 2! + 3!$	
$2! \cdot 4$	
$4! \cdot 2$	
$3! + 3! + 3!$	
$3! \cdot 3$	
$(3!)!$	
$(5 - 0)!$	
$5! - 0!$	

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż prawidłowy wynik.

☐ $1! = 1$

☐ $4! = 26$

☐ $0! = 0$

☐ $2! = 2$

☐ $3! = 6$

☐ $6! = 120$

☐ $5! = 120$

☐ $7! = 5040$

Ćwiczenie 2



Połącz w pary działanie i jego wynik.

$4! \cdot 5$

18

$5! \cdot 5$

600

$3! \cdot 3$

24

$2! \cdot 3 \cdot 4$

720

$4! \cdot 4$

120

$4! \cdot 5 \cdot 6$

96

Ćwiczenie 3



Oblicz i podaj wynik w postaci dziesiętnej.

$4! - 3! =$

$(4 - 3)! =$

$5! - 3! =$

$(5 - 3)! =$

$5! - 4! =$

$(5 - 2)! =$

Ćwiczenie 4



Połącz w pary działanie i jego wynik.

$$6! - 5!$$

119

$$5! + 3!$$

118

$$5! - 0!$$

600

$$5! - 2!$$

696

$$4! + 2!$$

126

$$6! - 4!$$

26

Ćwiczenie 5



Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby.

$$(4 + 1)!$$



$$7! - 2!$$



$$6! - 1!$$



$$4! + 1!$$



$$5! + 0!$$



$$2! + 3!$$



Ćwiczenie 6



Ile kolejnych zer ma na końcu (licząc od rzędu jedności) każda z liczb? Wpisz poprawną odpowiedź.

4!

9!

10!

11!

12!

13!

14!

15!

24!

25!

Ćwiczenie 7



Oblicz i podaj wynik w postaci dziesiętnej.

4!! =

10!! =

6!! =

9!! =

7!! =

8!! =

(2!)! =

(3!)! =

Ćwiczenie 8



Wybierz poprawną odpowiedź.

Ile kolejnych zer ma na końcu (licząc od rzędu jedności) liczba $8!!$? -

Ile kolejnych zer ma na końcu (licząc od rzędu jedności) liczba $15!!$? -

Liczba $3! + 4!$ jest równa liczbie $(3 + 4)!$ -

Liczba $3! \cdot 2!$ jest równa liczbie $(3 \cdot 2)!$ -

Liczba $3!!$ jest równa liczbie $(3!)!$ -

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pojęcie silni

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza silnię z liczby naturalnej,
- wyznacza liczbę zer na końcu liczby zapisanej przy pomocy silni.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Infografika” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Pojęcie silni” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w zespołach dwuosobowych zapoznają się z treścią polecenia nr 1 „Zapoznaj się z infografiką, która przypomina definicje silni, a następnie rozwiąż zadania poniżej” z sekcji „Infografika” i zawartym w niej materiałem.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych](#)
- [Reguła mnożenia, reguła dodawania](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Pojęcie silni”.