



Rozwiązywanie równań i nierówności - zadania

Rozwiązywanie równań i nierówności - zadania. Interpretacja wyników na osi liczbowej. Przedziały liczbowe na osi liczbowej. Dowody. Zadania, w tym część zadań jest interaktywnych.

Rozwiązywanie równań i nierówności - zadania

Materiał zawiera przykłady rozwiązywania równań i nierówności, również tych z wartością bezwzględną. Rozwiązując zamieszczone tu ćwiczenia – sprawdzisz ukształtowane umiejętności.

Aby rozwiązać równanie, należy znaleźć taką liczbę x , która po podstawieniu do równania da po prawej i po lewej stronie równania taki sam wynik.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $5x - x - 1 = 2x + 5$.

W pierwszej kolejności uprościmy lewą stronę równania.

$$5x - x - 1 = 2x + 5$$

$$4x - 1 = 2x + 5$$

Teraz wyrażenie $2x$ przenosimy na drugą stronę równania, zmieniając znak na przeciwny.

$$4x - 1 - 2x = 5$$

$$2x - 1 = 5$$

Wyrażenie $2x$ zostawiamy po lewej stronie równania, a -1 przenosimy na prawą stronę równania (zmieniając znak na przeciwny).

$$2x = 5 + 1$$

$$2x = 6$$

Dzielimy obie strony równania przez liczbę 2, żeby po lewej stronie otrzymać tylko x .

$$x = 3$$

Otrzymujemy, że rozwiązaniem równania jest liczba $x = 3$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $|2x - 5| = 3$.

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, zapisujemy równanie w postaci alternatywy:

$$2x - 5 = 3 \text{ lub } 2x - 5 = -3.$$

Zatem

$$2x = 8 \text{ lub } 2x = 2$$

$$x = 4 \text{ lub } x = 1.$$

Pierwiastki tego równania to: $x = 4$ lub $x = 1$.

Ważne!

Przy rozwiązywaniu nierówności postępujemy analogicznie jak w przypadku rozwiązywania równań, ale jeżeli mnożymy lub dzielimy obie strony nierówności przez liczbę ujemną, to zmieniamy znak nierówności na przeciwny.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $x - 4x + 3 > 9$.

Postępujemy analogicznie jak w przykładzie 1.

$$-3x + 3 > 9$$

$$-3x > 9 - 3$$

$$-3x > 6$$

$$x < -2$$

Rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty, -2)$.

Ćwiczenie 1



Zaznacz zbiór rozwiązań nierówności $|x| < 3$.

☐ $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

☐ $(-3, 3)$

☐ $(-\infty, -3) \cup \langle 3, +\infty)$

☐ $\langle -3, 3 \rangle$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Które liczby spełniają równanie $|x - 3| = 7$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ -4 oraz 10

☐ 4 oraz 10

☐ -6 oraz 6

☐ -3 oraz 3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Zaznacz zbiór rozwiązań nierówności $|x + 4| \leq 6$.

☐ $[-10, 2]$

☐ $(-10, 2)$

☐ $[-2, 10]$

☐ $\langle -2, 10 \rangle$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Uzupełnij zdanie. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, a następnie wybierz prawidłową nierówność.

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-3, 5)$.

- ☐ $|x - 3| < 5$
- ☐ $|x + 3| < 5$
- ☐ $|x + 1| < 4$
- ☐ $|x - 1| < 4$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Do którego przedziału należy liczba spełniająca równanie $-2x + 4 = 1$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

- ☐ $(-\frac{3}{2}, -1)$
- ☐ $(1, \frac{3}{2})$
- ☐ $\langle -\frac{3}{2}, -1 \rangle$
- ☐ $\langle 1, \frac{3}{2} \rangle$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Który warunek spełnia liczba $x = (\frac{1}{3})^{-2}$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

- ☐ $2x - 3 > x + 7$
- ☐ $2x - 3 \geq x + 7$
- ☐ $2x - 3 \geq x + 6$
- ☐ $2x - 3 > x + 6$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Który przedział jest rozwiązaniem nierówności $(x + 1)^2 \geq x^2$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

- ☐ $\langle -\frac{1}{2}, \infty \rangle$
- ☐ $\langle \frac{1}{2}, \infty \rangle$
- ☐ $(-\infty, -\frac{1}{2})$
- ☐ $(-\infty, \frac{1}{2})$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Dane są liczby $a = 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$ oraz $b = 1, (6) - 3\sqrt{2}$. Zaznacz, do którego przedziału należy liczba $a + b$.

☐ $\left(4\frac{1}{2}, 5\right)$

☐ $\left(3, 3\frac{1}{2}\right)$

☐ $\left(3\frac{1}{2}, 4\right)$

☐ $\left(4, 4\frac{1}{2}\right)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Rozwiąż nierówności, a następnie połącz w pary z rozwiązaniem.

$$\sqrt{2}x + 6 < 7 + \sqrt{8}x$$

$$x > \frac{9(8\sqrt{3}+6\sqrt{2})}{20}$$

$$\sqrt{7}x - 3 \leq 7 + \sqrt{21}x$$

$$x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2(-\sqrt{3}x - 6) \leq 3\sqrt{3}x + 4$$

$$x \geq -\frac{16\sqrt{3}}{15}$$

$$\sqrt{5}x - 6 > 7 - 2\sqrt{5}x$$

$$x \geq -\frac{5(\sqrt{21}+\sqrt{7})}{7}$$

$$\frac{\sqrt{2}x+7}{4} < \frac{2\sqrt{3}x-3}{6}$$

$$x \geq -\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{6}x + 4 \leq 7 + \sqrt{12}x$$

$$x > \frac{13\sqrt{5}}{15}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Połącz przedziały z odpowiadającymi im warunkami.

$$3 < x \leq \sqrt{7}$$

$$(-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$$

$$x \geq \sqrt{13}$$

$$\langle -4, 10 \rangle$$

$$-7 \leq x \leq 8$$

$$\langle \sqrt{13}, +\infty \rangle$$

$$x < 2\sqrt{2}$$

$$\langle -7, 8 \rangle$$

$$x \geq 1 + \sqrt{3}$$

$$(-\infty, 2\sqrt{2})$$

$$x \leq -3 \text{ lub } x > 5$$

$$\langle 1 + \sqrt{3}, +\infty \rangle$$

$$x \geq -4 \text{ i } x < 10$$

$$(3, \sqrt{7})$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Zapisz za pomocą układu nierówności zbiór wszystkich liczb, które należą do przedziału. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz odpowiednią liczbę bądź znak.

a) $(42, 43)$

x

<

≤

43

<

42

≤

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

b) $\langle -126, -116 \rangle$

x

≤

<

≤

-126

-116

<

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

c) $(-2^{15}, 2^{10})$

x

2^{10}

-2^{15}

≥

≤

<

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

d) $\langle 5 - \sqrt{6}, 5 - \sqrt{2} \rangle$

x

$5 - \sqrt{2}$

<

$5 - \sqrt{6}$

<

≤

≤

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

e) $(-\infty, 5^{18})$

x

-5^{18}

≥

≤

<

5^{18}

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

f) $\langle -\sqrt{7}, +\infty \rangle$

x

<

≥

$\sqrt{7}$

≤

>

$-\sqrt{7}$

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

g) $(-\infty, 5) \cup (9, +\infty)$

x

x

≤

≥

<

i

5

lub

9

Zródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Rozwiąż równania, przeciągnij w lukę wartości rozwiązań.

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{3}$$

$x = 3\frac{3}{4}$

$x = -5\frac{7}{8}$

$x = 2\frac{1}{4}$

$x = -9$

$x = -2\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{6}$

$x = -4\frac{1}{8}$

$x = \frac{5}{6}$

$$\left|x + 5\frac{3}{4}\right| = 3\frac{1}{4}$$

$$\left|5 + x\right| = \frac{7}{8}$$

$$\left|3 - x\right| = \frac{3}{4}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Wyznacz liczby spełniające poniższe równania. Zaznacz poprawne odpowiedzi dla każdego równania.

$$|x + 3,2 \cdot 10^{-15}| = 4 \cdot 10^{-15}$$

☐ $x = -7,2 \cdot 10^{-15}$

☐ $x = -8 \cdot 10^{-15}$

☐ $x = 10 \cdot 8^{-16}$

☐ $x = 8 \cdot 10^{-16}$

☐ $x = -7,5 \cdot 10^{-15}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$|x - 2, (32)| = 2$$

☐ $x = 32, (32)$

☐ $x = -4, (32)$

☐ $x = 0, (32)$

☐ $x = 4, (32)$

☐ $x = 2, (32)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$|x + 4| = 2, (21)$$

☐ $x = -6, (21)$

☐ $x = 1, (76)$

☐ $x = -1, (21)$

☐ $x = -1, (78)$

☐ $x = 6, (21)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału wszystkie liczby spełniające podany układ warunków

a. $-3 < x < 3$ i $x \geq \frac{3}{2}$ i $x < \sqrt{3}$,

b. $|x| > 5$ i $-7 \leq x \leq 10$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.