



Układy równań – co to takiego?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Układy równań – co to takiego?

Źródło: Egor Myznik, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Kilka tysięcy lat temu, między Eufratem, a Tygrysem, rozwijała się prawdopodobnie najstarsza cywilizacja na świecie. To właśnie tam, w starożytnym Babilonie, żyli matematycy, którzy pierwsi rozwiązywali układy równań.



Podczas wykopalisk archeologicznych odnaleziono gliniane tabliczki. Układy równań zapisane są na nich pismem klinowym, nie przypominają używanych przez nas symboli matematycznych. Jednak używane przez starożytnych Babilończyków metody rozwiązywania układów równań są bardzo zbliżone do tych, które stosujemy obecnie.

Twoje cele

- Sformułujesz definicję układu równań.
- Sprawdzisz, czy dane liczby są rozwiązaniem układu równań.
- Sformułujesz definicję rozwiązania układu równań.
- Przedstawisz graficzną ilustrację układu równań pierwszego i drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Odczytasz liczbę rozwiązań układu równań na podstawie jego ilustracji graficznej.

Przeczytaj

Definicja: Układ równań

Układem równań nazywamy koniunkcję co najmniej dwóch równań.

Aby rozwiązać układ równań, należy znaleźć wszystkie układy liczb spełniające jednocześnie wszystkie równania składowe danego układu równań.

Lub ustalić, że takich liczb nie ma.

Przykład 1

Znajdźmy rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} z^2 + x + y = 12 \\ x - y = -2 \\ x^2 = 9 \end{cases}.$$

Z trzeciego równania możemy obliczyć $x = -3$ lub $x = 3$.

Drugie równanie przekształcamy równoważnie tak, aby wyznaczyć z niego y .

$$x - y = -2$$

$$y = x + 2$$

A wtedy $y = -3 + 2 = -1$ lub $y = 3 + 2 = 5$.

Teraz przekształcamy trzecie równanie i wyznaczamy z niego wartość zmiennej z .

$$z^2 + x + y = 12$$

$$z^2 = 12 - (x + y)$$

Stąd:

$$z^2 = 12 - (-3 - 1) = 12 + 4 = 16 \Rightarrow z = -4 \text{ lub } z = 4$$

lub

$$z^2 = 12 - (3 + 5) = 12 - 8 = 4 \Rightarrow z = -2 \text{ lub } z = 2.$$

A zatem otrzymaliśmy cztery trójki liczb, które są rozwiązaniami tego układu równań:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ z = -4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = -2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Co możemy też zapisać w postaci: $(-3, -1, 4), (-3, -1, -4), (3, 5, -2), (3, 5, 2)$

Definicja: Rozwiązanie układu równań

Rozwiązaniem układu równań nazywamy odpowiednio parę, trójkę, czwórkę itd. liczb spełniających każde z równań składowych danego układu równań.

Przykład 2

Sprawdzimy, które z czwórek liczb $(3, -2, 2, -1), (-3, 2, -2, -1), (3, -2, 2, 1)$ spełniają **układ równań**

$$\begin{cases} x + y + z + t^2 = 4 \\ t^2 + x = z - y \\ t^2 = 1 \\ x + z = y + 7 \end{cases}$$

Rozpatrzmy czwórkę liczb $(3, -2, 2, -1)$, czyli

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 2 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Sprawdzamy wartości liczbowe wyrażeń znajdujących się po lewej stronie kolejnych równań składowych i porównujemy je z wartościami liczbowymi znajdującymi się po prawej stronie tych równań.

$$L_1 = x + y + z + t^2 = 3 + (-2) + 2 + (-1)^2 = 4 = P_1 \Rightarrow L_1 = P_1$$

$$L_2 = t^2 + x = (-1)^2 + 3 = 4$$

$$P_2 = z - y = 2 - (-2) = 4 \Rightarrow L_2 = P_2$$

$$L_3 = t^2 = (-1)^2 = 1$$

$$P_3 = 1 \Rightarrow L_3 = P_3$$

$$L_4 = x + z = 3 + 2 = 5$$

$$P_4 = y + 7 = -2 + 7 = 5 \Rightarrow L_4 = P_4$$

A zatem układ liczb $(3, -2, 2, -1)$ jest rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} x + y + z + t^2 = 4 \\ t^2 + x = z - y \\ t^2 = 1 \\ x + z = y + 7 \end{cases}.$$

Sprawdzimy teraz czwórkę $(-3, 2, -2, -1)$, czyli

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \\ z = -2 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Sprawdzamy wartości liczbowe wyrażeń znajdujących się po lewej stronie kolejnych równań składowych i porównujemy je z wartościami liczbowymi znajdującymi się po prawej stronie tych równań.

$$L_1 = x + y + z + t^2 = -3 + 2 + (-2) + (-1)^2 = -2 \neq 4 = P_1 \Rightarrow L_1 \neq P_1$$

A zatem układ liczb $(-3, 2, -2, -1)$ nie spełnia pierwszego równania. W tej sytuacji nie musimy już sprawdzać pozostałych równań – czwórka liczb $(-3, 2, -2, -1)$ nie jest rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} x + y + z + t^2 = 4 \\ t^2 + x = z - y \\ t^2 = 1 \\ x + z = y + 7 \end{cases}.$$

Przejdziemy teraz do sprawdzenia, czy czwórka $(3, -2, 2, 1)$ jest rozwiązaniem układu równań. Wiemy, że

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 2 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Sprawdzamy wartości liczbowe wyrażeń znajdujących się po lewej stronie kolejnych równań składowych i porównujemy je z wartościami liczbowymi znajdującymi się po prawej stronie tych równań.

$$L_1 = x + y + z + t^2 = 3 + (-2) + 2 + 1^2 = 4 = P_1 \Rightarrow L_1 = P_1$$

$$L_2 = t^2 + x = 1^2 + 3 = 4$$

$$P_2 = z - y = 2 - (-2) = 4 \Rightarrow L_2 = P_2$$

$$L_3 = t^2 = 1^2 = 1$$

$$P_3 = 1 \Rightarrow L_3 = P_3$$

$$L_4 = x + z = 3 + 2 = 5$$

$$P_4 = y + 7 = -2 + 7 = 5 \Rightarrow L_4 = P_4$$

A zatem układ liczb $(3, -2, 2, 1)$ jest rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} x + y + z + t^2 = 4 \\ t^2 + x = z - y \\ t^2 = 1 \\ x + z = y + 7 \end{cases}.$$

Przykład 3

Nie każdy układ równań posiada rozwiązanie.

Spróbujmy znaleźć rozwiązanie układu równań
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4. \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

Łatwo odgadnąć, że wspólnym rozwiązaniem dwóch pierwszych równań jest para liczb $(3, 2)$.

Jest to jedyne rozwiązanie układu tych równań.

Para ta nie spełnia jednak trzeciego równania składowego wyjściowego układu równań, a zatem nie jest jego rozwiązaniem.

Nie istnieje więc para, która spełnia jednocześnie wszystkie trzy równania składowe.

Układ ten nie ma zatem rozwiązania.

Taki układ równań nazywamy **układem sprzecznym**.

Przykład 4

Znajdźmy rozwiązania układu równań
$$\begin{cases} x^2 + 3y - 2 = 0 \\ 3x^2 + 9y = 6 \end{cases}.$$

Widzimy, że drugie równanie powstaje z pierwszego, przez pomnożenie obu stron równania przez 3.

Możemy też wyznaczyć y z pierwszego i drugiego równania.

$$x^2 + 3y - 2 = 0 \text{ i } 3x^2 + 9y = 6$$

$$3y = 2 - x^2 \mid : 3 \text{ i } 9y = 6 - 3x^2 \mid : 3$$

$$y = \frac{2-x^2}{3} \text{ i } 3y = 2 - x^2 \mid : 3$$

$$y = \frac{2-x^2}{3} \text{ i } y = \frac{2-x^2}{3}$$

Otrzymaliśmy to samo wyrażenie, więc **równania składowe** układu równań są równoważne.

Równanie $y = \frac{2-x^2}{3}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zatem układ równań $\begin{cases} x^2 + 3y - 2 = 0 \\ 3x^2 + 9y = 6 \end{cases}$ również ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci

$$\left(x, \frac{2-x^2}{3}\right), x \in \mathbb{R}.$$

Taki układ równań nazywamy **układem nieoznaczonym**.

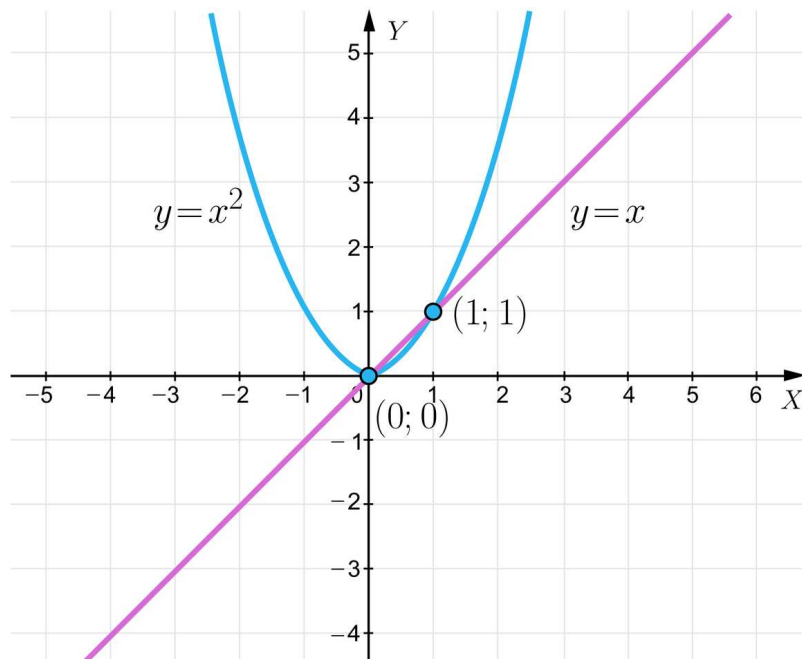
Przykład 5

Liczbę rozwiązań układu równań można łatwo określić, analizując interpretacje geometryczne poszczególnych równań wchodzących w skład tego układu równań.

Korzystamy tu z naszej wiedzy dotyczącej wykresów różnych równań lub na podstawie wzoru tworzymy tabelkę, a następnie odpowiedni wykres.

Znajdźmy interpretację geometryczną układu równań i na tej podstawie określmy liczbę jego rozwiązań.

$$\text{a) } \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

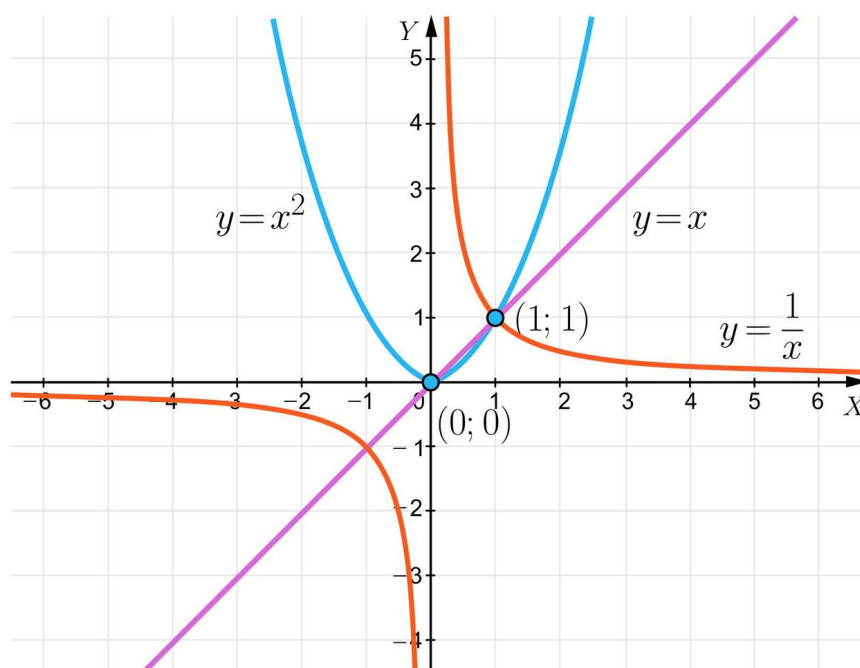


Narysowane wykresy mają dwa punkty wspólne, a zatem **układ równań** ma dwa rozwiązania.

Z wykresu możemy odczytać współrzędne tych punktów – $(0, 0)$ oraz $(1, 1)$.

Podstawiając do równań składowych pary liczb $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ możemy sprawdzić, czy dokładnie odczytaliśmy rozwiązanie.

b)
$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$



Istnieje tylko jeden punkt wspólny tych trzech wykresów, a więc układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Słownik

układ równań

koniunkcja co najmniej dwóch równań

rozwiązanie układu równań

układ liczb spełniających każde z równań składowych w tym układzie

równanie składowe

równanie wchodzące w skład układu równań

sprzeczny układ równań

układ równań, który nie posiada rozwiązania

nieoznaczony układ równań

układ równań, który posiada nieskończenie wiele rozwiązań

Galeria zdjęć interaktywnych

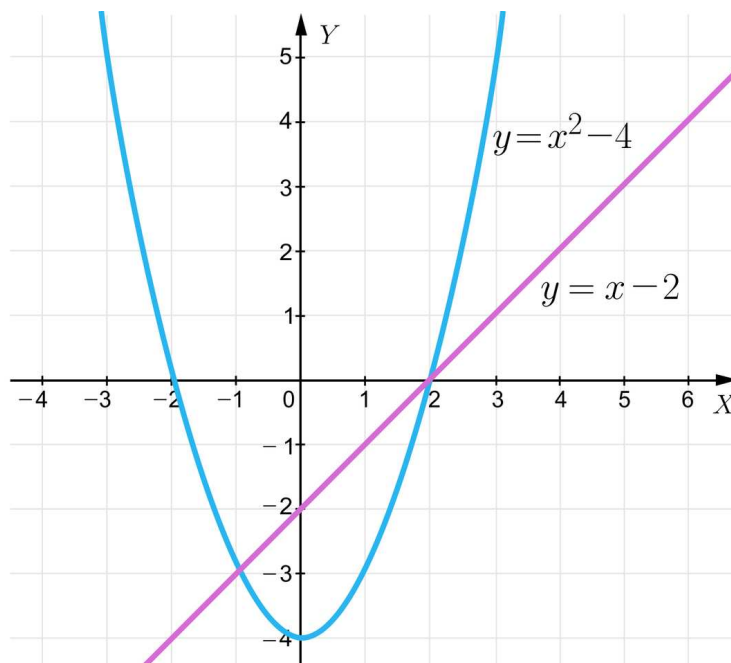
Polecenie 1

Przeanalizuj galerię zdjęć interaktywnych przedstawiającą graficzne interpretacje przykładowych układów równań z dwiema niewiadomymi, w których niewiadome występują w pierwszej lub drugiej potęgze.

Polecenie 2

Na rysunku przedstawiono ilustrację geometryczną układu równań. Korzystając z rysunku zapisz układ równań, podaj liczbę jego rozwiązań i odczytaj wartości x i y .

Sprawdź algebraicznie poprawność podanych rozwiązań.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz rozwiązanie układu równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ xyz = 4 \\ x^3 + 2y^2 + z = -4 \end{cases}.$$

☐ $(-2, -1, 2)$

☐ $(2, -1, -2)$

☐ $(2, 1, 2)$

☐ $(-2, 1, -2)$

Ćwiczenie 2



Określ prawdziwość zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Rozwiązaniem nieoznaczonego układu równań z dwiema niewiadomymi jest nieskończenie wiele uporządkowanych par liczb.	☐	☐
Rozwiązaniem sprzecznego układu równań z trzema niewiadomymi może być uporządkowana trójka liczb.	☐	☐

Ćwiczenie 3



Który z układów równań ma nieskończenie wiele rozwiązań? Zaznacz właściwe odpowiedzi.

☐
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x + y + z = 5 \\ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 28 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ x = y \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} x - y + z = 24 \\ x + y + z = 10 \\ 2x + 3y - z = 15 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} 2a + 5b = 6 \\ -4a - 10b = -12 \end{cases}$$

Ćwiczenie 4



Który z układów równań jest sprzeczny? Zaznacz właściwą odpowiedź.

☐
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x - y^2 = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x + y = 1 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ x - y + z = 10 \\ 2x + 3y - z = 7 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Przyporządkuj rozwiązanie do układu równań.

$$\begin{cases} y - 3z = 2x - 41 \\ \frac{1}{3}x + z = y + 2 \\ x + z = 30 - y \end{cases}$$

(21, 7, 2)

$$\begin{cases} y = 8 - 2x \\ 2x^2 - 3 = y + 1 \end{cases}$$

(9, 10, 11)

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ 2x - y + 3z = 41 \\ \frac{1}{2} \cdot (x + z) = y \end{cases}$$

(3, 2)

$$\begin{cases} x^3 - 3y^3 = 3 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

(2, 4)

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Znajdź interpretację graficzną równań składowych układu $\begin{cases} y = x^2 + 6x + 6 \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$ i na jej podstawie określ liczbę rozwiązań tego układu równań.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Układy równań – co to takiego?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

IV. Układy równań.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) określa funkcję jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);

7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje punkt wspólny dwóch prostych, jeśli taki istnieje;

2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład

przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);

6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje definicję układu równań
- sprawdza, czy dana para, trójka lub czwórka liczb jest rozwiązaniem układu równań z dwiema, trzema lub czterema niewiadomymi
- zaznacza w układzie współrzędnych wykresy równań składowych układu równań z dwiema niewiadomymi
- odczytuje rozwiązania układu równań na podstawie jego interpretacji geometrycznej

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem galerii zdjęć interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane z rysowaniem wykresów równań danych różnymi wzorami.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” i galerii zdjęć interaktywnych.
2. Nauczyciel kontroluje pracę grup, wyjaśnia wątpliwości.
3. Uczniowie wspólnie z nauczycielem omawiają galerię zdjęć interaktywnych i konsultują wykonanie umieszczonego pod nią polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Układ równań z dwiema niewiadomymi – opisywanie związków między wielkościami za pomocą równań](#)
- [Aplet](#)
- [Wykres funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

Galeria zdjęć interaktywnych może być wykorzystana przez uczniów do utrwalenia wiadomości z lekcji. Może też być pomocna na zajęciach poświęconych własnościom krzywych w układzie współrzędnych.