Wykres i własności funkcji tangens

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: hert niks, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Znasz już podstawowe własności funkcji $y = \operatorname{tg} x$ związane z obliczaniem wartości; są to wzory redukcyjne. W tym materiale wykorzystamy te własności do konstrukcji wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz opisu jej pozostałych własności.

Twoje cele

- Nauczysz się rysować wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz opisywać jej własności: zbiór wartości, miejsca zerowe, monotoniczność.
- Dowiesz się, jak wykorzystać wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Rozpoczniemy od narysowania wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$.

Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} a$ w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Zaznaczmy w układzie współrzędnych okrąg o promieniu 1. Niech będzie to okrąg o równaniu $(x+2)^2 + y^2 = 1$. Jego środkiem jest punkt $C = (-2, 0)$. Niech punkt D ma współrzędne $(-1, 0)$. Przez punkt D poprowadźmy prostą m prostopadłą do osi X. Jeżeli przez leżący na danym okręgu punkt A oraz przez punkt C poprowadzimy prostą, to przetnie ona prostą m w punkcie E. Niech a oznacza miarę kąta ostrego DCA mierzoną w radianach.

Punkt B ma współrzędne $(a, \operatorname{tg} a)$. Prosta przechodząca przez punkt B i prostopadła do osi X przecina tę w punkcie $F = (a, 0)$.

Zauważamy, że druga współrzędna punktu E to $\operatorname{tg} a$. Zatem odcinki DE i BF mają tę samą długość równą $\operatorname{tg} a$. Ponieważ punkt B ma współrzędne $(a, \operatorname{tg} a)$, a zatem punkt B leży na wykresie funkcji $y = \operatorname{tg} a$. Poruszający się punkt B wyznacza wykres funkcji $y = \operatorname{tg} a$ w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Otwórzmy aplet, aby obserwować całą konstrukcję.

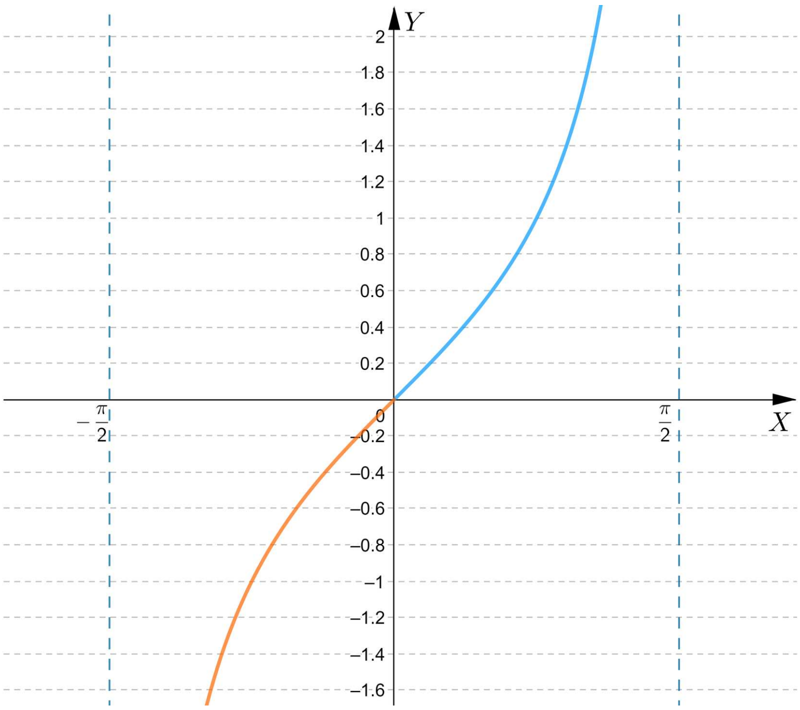
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DWQ3pJ3J9

Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} a$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

W poprzednim punkcie otrzymaliśmy wykres funkcji $y = \operatorname{tg} a$ w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Teraz skonstruujemy wykres $y = \operatorname{tg} a$ dla $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right\rangle$. W tym celu wykorzystamy wzór: $\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wzór $\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$ opisuje własność: środkiem symetrii wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} a$ jest punkt $(0, 0)$. Oznacza to także, że funkcja tangens jest funkcją nieparzystą.



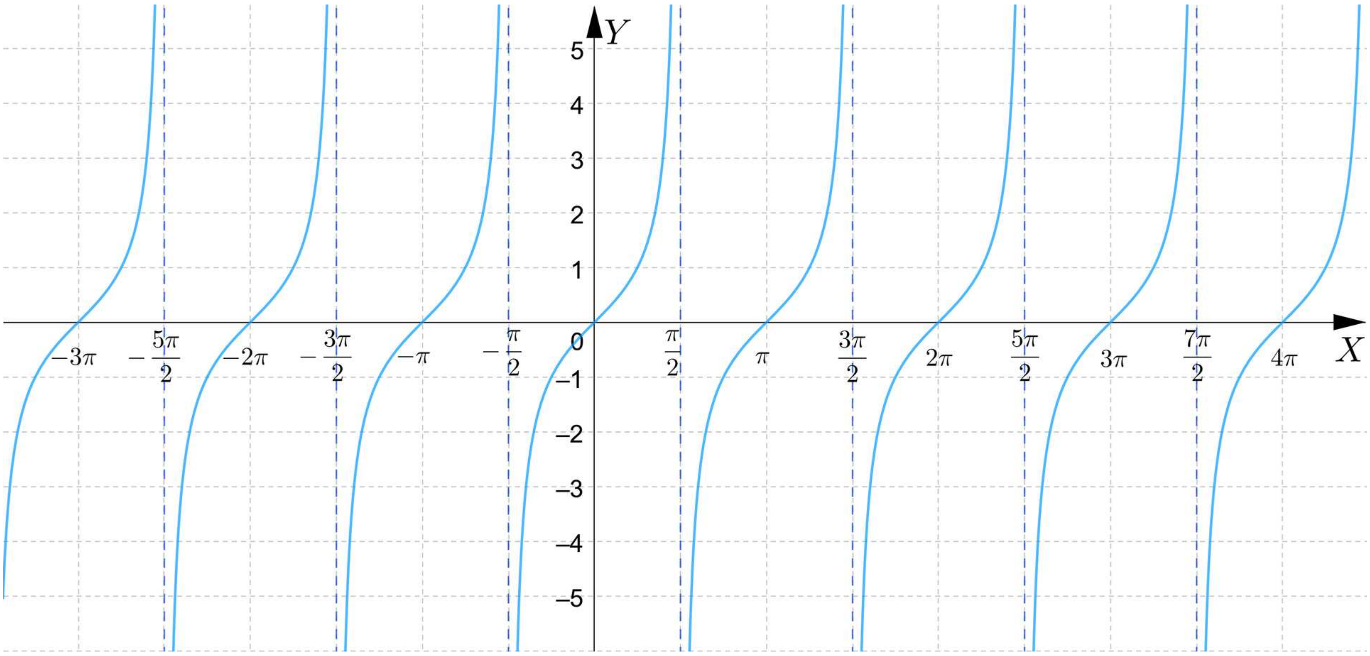
Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} a$ w całej dziedzinie

Zatem otrzymaliśmy wykres $y = \operatorname{tg} a$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Chcemy teraz skonstruować wykres funkcji $y = \operatorname{tg} a$ dla $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
W tym celu skorzystamy z kolejnej własności funkcji tangens: $\operatorname{tg}(a + \pi) = \operatorname{tg} a$, dla $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Własność ta oznacza, że wykres funkcji tangens powtarza się co π. Zatem funkcja tangens jest funkcją okresową o okresie zasadniczym $T = \pi$. Zwróćmy uwagę na to, że okres nie może byc mniejszy niż π, gdyż funkcja w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ o długości π jest rosnąca.

Poniżej przedstawiamy wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ w dziedzinie.



Na podstawie wykresu opiszemy własności funkcji tangens.

Twierdzenie: o własnościach funkcji tangens

Opiszmy własności funkcji $y = \operatorname{tg} x$, gdy $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

1. Funkcja tangens jest funkcją okresową o okresie zasadniczym $T = \pi$.
2. Funkcja tangens jest funkcją nieparzystą.
3. Zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych.
4. Funkcja tangens nie ma wartości największej. Funkcja tangens nie ma wartości najmniejszej.
5. Miejscami zerowymi funkcji tangens są argumenty: $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
6. Funkcja tangens jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
7. Funkcja tangens nie jest rosnąca w swojej dziedzinie.
8. Wykres funkcji posiada asymptoty pionowe o równaniach: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Twierdzenie: o własnościach geometrycznych wykresu funkcji tangens

Opiszmy własności geometryczne wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} x$.

1. Środkiem symetrii wykresu funkcji tangens jest każdy punkt o współrzędnych $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
2. Wykres funkcji tangens nie posiada osi symetrii.

Dowód

Ad. 1. Aby udowodnić tę własność skorzystamy z następującego warunku dotyczącego środka symetrii wykresu funkcji:

Punkt (a, b) jest środkiem symetrii wykresu funkcji $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby x z dziedziny zachodzi równość $2b - f(x) = f(2a - x)$.

Zatem musimy pokazać, że zachodzi równość:

$2 \cdot 0 - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \left(\frac{k\pi}{2}\right) - x\right)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, czyli że

$-\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(k\pi - x)$.

Najpierw skorzystamy z okresowości funkcji tangens: $\operatorname{tg}(k\pi - x) = \operatorname{tg}(-x)$, a następnie z nieparzystości funkcji tangens: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$, co kończy dowód.

Ad. 2. Wykres funkcji tangens nie posiada osi symetrii, gdyż funkcja jest przedziałami rosnąca. Gdyby posiadała oś symetrii, to dla każdego przedziału, w którym funkcja jest rosnąca, istniałby przedział, w którym funkcja jest malejąca.

Twierdzenie: o okresie zasadniczym funkcji $y = c \operatorname{tg}(ax + b)$

Jeżeli $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a > 0$ oraz $c \neq 0$, to okresem zasadniczym funkcji $y = c \operatorname{tg}(ax + b)$ jest $\frac{\pi}{a}$.

Dowód

Najpierw wykażemy, że $\frac{\pi}{a}$ jest okresem funkcji $y = c \operatorname{tg}(ax + b)$.

$c \operatorname{tg}\left(a\left(x + \frac{\pi}{a}\right) + b\right) = c \operatorname{tg}(ax + \pi + b) = c \operatorname{tg}(ax + b)$

Sprawdzimy teraz, że $\frac{\pi}{a}$ jest okresem zasadniczym.

Przypuśćmy, że istnieje liczba $0 < t < \frac{\pi}{a}$, która jest okresem funkcji $y = c\,\mathrm{tg}(ax + b)$.

Wówczas

$$c\,\mathrm{tg}(a(x+t)+b) = c\,\mathrm{tg}(ax + at + b) \neq c\,\mathrm{tg}(ax+b),$$

gdyż $at < \pi$. Sprzeczność.

Przykład 1

Podamy okres zasadniczy funkcji:

1. $y = 2\,\mathrm{tg}\,x$
2. $y = 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$
3. $y = |\mathrm{tg}(3 - 2x)|$

Rozwiązanie:

Wykorzystamy twierdzenie o okresie zasadniczym funkcji $y = c\,\mathrm{tg}(ax + b)$.

1. Okresem zasadniczym funkcji $y = 2\,\mathrm{tg}\,x$ jest $T = \pi$.
2. Okresem zasadniczym funkcji $y = 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$ jest $T = 2\pi$.
3. Okresem zasadniczym funkcji $y = |\mathrm{tg}(3 - 2x)|$ jest $T = \frac{\pi}{2}$.

Przykład 2

Podamy miejsca zerowe funkcji: $y = 2\,\mathrm{tg}(3x - 2)$.

Rozwiązanie:

Funkcja $y = \operatorname{tg} x$ ma miejsca zerowe postaci $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zatem funkcja $y = 2\operatorname{tg}(3x - 2)$ ma miejsca zerowe postaci $3x - 2 = k\pi$, czyli $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{2}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3

Która wartość jest większa: $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{24}$ czy $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{27}$?

Rozwiązanie:

Ponieważ $\frac{11\pi}{24} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $\frac{13\pi}{27} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to z faktu, że $\frac{11\pi}{24} < \frac{13\pi}{27}$ i tego, że funkcja tangens w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ jest rosnąca wynika, że $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{24} < \operatorname{tg} \frac{13\pi}{27}$.

Przykład 4

Dla jakich wartości liczb ujemnych a, b, c funkcja $y = a\operatorname{tg}(bx + c)$ ma okres zasadniczy równy 4π.

Rozwiązanie:

Zapiszmy funkcję w postaci $y = -a\operatorname{tg}(-bx - c)$. Skorzystamy z twierdzenia o okresie zasadniczym funkcji tangens. Na podstawie twierdzenia stwierdzamy, że okresem zasadniczm naszej funkcji jest $\frac{\pi}{-b}$.

Z warunków zadania otrzymujemy: $\frac{\pi}{-b} = 4\pi$, czyli $b = -\frac{1}{4}$, a a i c są dowolnymi liczbami ujemnymi.

Słownik

oś symetrii wykresu funkcji

prosta $x = a$ jest osią symetrii wykresu funkcji $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby x z dziedziny zachodzi równość $f(x) = f(2a - x)$

radian

jednostka miary łukowej kąta środkowego α wyrażająca stosunek długości łuku, na którym oparty jest ten kąt, do długości promienia okręgu, dla którego kąt α jest kątem środkowym; związek pomiędzy miarą stopniową, a łukową wyraża się wzorem

$$\alpha[^\circ] = \frac{\alpha \cdot \pi}{180}[\text{radian}]$$

środek symetrii wykresu funkcji

punkt o współrzędnych (a, b) jest środkiem symetrii wykresu funkcji $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby x z dziedziny zachodzi równość: $2b - f(x) = f(2a - x)$

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Spróbujemy narysować teraz wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ (czytamy: kotangens), którą możemy opisać jako: $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Zatem $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, dla $x \neq \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Z tej własności będziemy korzystać w toku dalszej pracy.

Wykres funkcji cotangens w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Symulacja interaktywna przedstawia sposób powstawania wykresu funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Polecenie 2

Narysuj **wykres funkcji cotangens w przedziale $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$**.

Polecenie 3

Narysuj **wykres funkcji cotangens w dziedzinie**.

Polecenie 4

Na podstawie wykresu opisz własności funkcji $y = \operatorname{ctg} x$, gdy $x \neq k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Polecenie 5

Wskaż środki symetrii i osie symetrii wykresu funkcji $y = \operatorname{ctg} x$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Uzasadnij, że punkt $\left(-\frac{2\pi}{5}, 1\right)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $y = 2\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) + 1$.

Ćwiczenie 8

Podaj przedziały monotoniczności funkcji $y = -\operatorname{ctg} 2x + 1$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres i własności funkcji tangens

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony 2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;
Zakres rozszerzony 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rysuje wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz opisuje jej własności: zbiór wartości, miejsca zerowe, monotoniczność.
- analizuje i wykorzystuje wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ do rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja za i przeciw;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Wykres i własności funkcji tangens” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Symulacja interaktywna”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Wykres i własności funkcji tangens” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wykres i własności funkcji tangens”).

Materiały pomocnicze:

Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Symulacja interaktywna” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Wykres i własności funkcji tangens”.