



Pole równoległoboku

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Pole równoległoboku

Źródło: Engin Akyurt, dostępny w internecie: <https://pexels.com/>.



Źródło: KarstenBergmann, domena publiczna, dostępny w internecie: pixabay.com.

Na zdjęciu przedstawiony jest biurowiec w porcie w Hamburgu. Jest to sześciokondygnacyjny budynek o charakterystycznym przekroju w postaci równoległoboku i wystaje nad wodę jak burta statku. Główna ściana tego budynku to równoległobok o długości 134 metrów i wysokości 25 metrów. Kąt rozwarty jaki tworzy ta ściana z poziomym dachem wynosi 136 stopni. Czy potrafisz wyznaczyć pole powierzchni ściany głównej?

W tym materiale omówimy różne sposoby wyznaczania pola równoległoboku i ich zastosowania.

Twoje cele

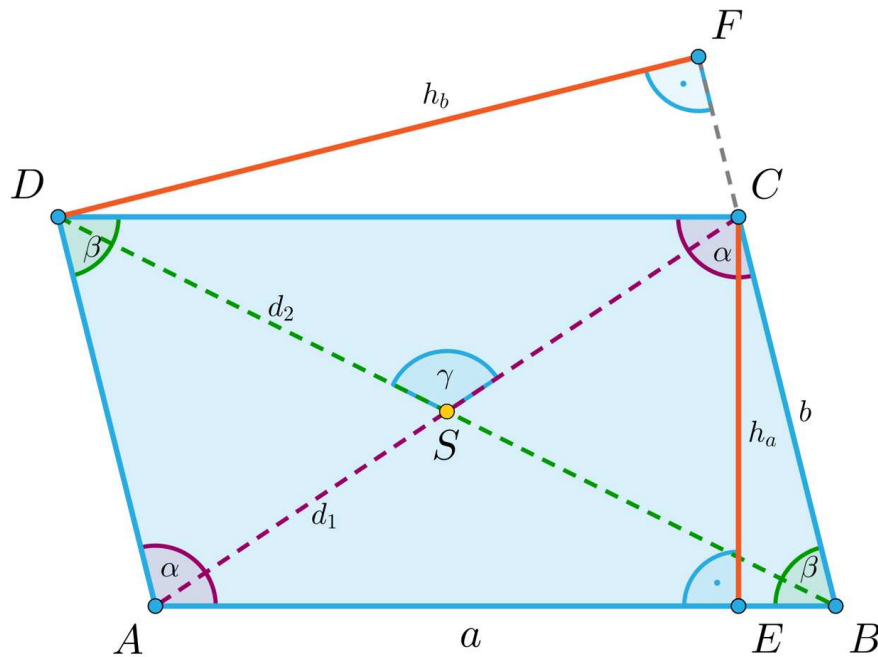
- Wyliczysz pole równoległoboku na podstawie informacji o niektórych elementach tego czworokąta takich jak długości boków, przekątnych, wysokości, miary kątów.
- Zobaczysz powiązanie pól równoległoboków z polami trójkątów i innych wielokątów.
- Zastosujesz własności pola równoległoboku w zadaniach matematycznych i praktycznych.

Przeczytaj

Na początek omówimy własności równoległoboku.

Na rysunku przedstawiony jest równoległobok $ABCD$ z zaznaczonymi przekątnymi i kątami. Oznaczenia z tego rysunku wykorzystamy do opisu własności.

Zastosujemy oznaczenie d_1 na przekątną AC oraz d_2 na przekątną BD . Ponadto, niech h_a oznacza wysokość równoległoboku opuszczoną na bok a i niech h_b oznacza wysokość równoległoboku opuszczoną na bok b .



Własności równoległoboku

1. Równoległobok ma dwie pary boków równoległych: $DC \parallel AB$, $BC \parallel AD$.
2. Boki równoległe mają równe długości: $|DC| = |AB| = a$, $|AD| = |BC| = b$.
3. Kąty przeciwległe mają równe miary: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = \alpha$,
 $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = \beta$.

4. Suma kątów sąsiednich jest równa 180° : $\alpha + \beta = 180^\circ$.

5. Przekątne przecinają się w połowie: $|AS| = |SC| = \frac{|AC|}{2} = \frac{d_1}{2}$,
 $|BS| = |SD| = \frac{|BD|}{2} = \frac{d_2}{2}$.

6. Własności kątów pod jakimi przecinają się przekątne: $\sphericalangle CSD = \sphericalangle ASB = \gamma$,
 $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC = 180^\circ - \gamma$.

7. Z własności funkcji [sinus](#) wnioskujemy: $\sin \gamma = \sin(180^\circ - \gamma)$ oraz $\sin \alpha = \sin \beta$.

Założmy, że potrafimy wyliczyć pole trójkąta. Pokażemy jak wtedy wyznaczyć pole równoległoboku.

Każda przekątna dzieli równoległobok $ABCD$ na dwa przystające trójkąty na mocy cechy $b - k - b$: ABC przystaje do CDA oraz BAD do BCD .

Stąd pole równoległoboku jest dwa razy większe niż pole jednego z tych trójkątów.

Z powyższych rozważań wyciągniemy wniosek, że dwa trójkąty, które mają boki a i b , gdzie w pierwszym trójkącie kąt między bokami wynosi α , w drugim β spełniają zależność $\alpha = 180^\circ - \beta$ mają równe pola.

Rzeczywiście, pole trójkąta ABC jest równe połowie pola równoległoboku, podobnie pole trójkąta BCD jest równe połowie pola równoległoboku.

Trójkąt ABC ma boki a , b i kąt między tymi bokami równy β , natomiast trójkąt BCD ma również boki a , b a kąt między tymi bokami równy α . Z własności 4, $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Twierdzenie: pole równoległoboku 1

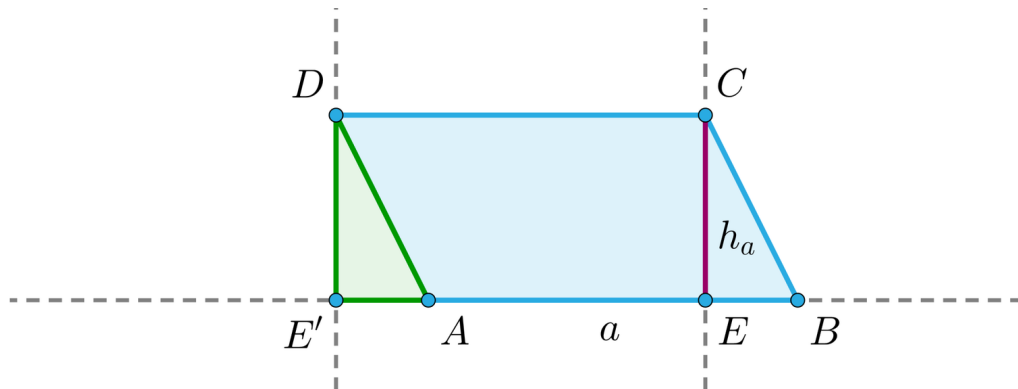
Pole równoległoboku jest równe

$$P = a \cdot h_a,$$

gdzie a jest dowolnym bokiem równoległoboku, a h_a jest wysokością spuszczoną na ten bok.

Dowód

Niech E' będzie punktem przecięcia prostej poprowadzonej z wierzchołka D równoległej do wysokości z prostą zawierająca bok AB . Wtedy czworokąt $DC EE'$ jest prostokątem o polu równym $|DC| \cdot |CE| = a \cdot h_a$.



Trójkąty BCE i ADE' są przystające na mocy cechy przystawania $b - k - b$.

Stąd pole równoległoboku $P = P_{AECD} + P_{BCE} = P_{AECD} + P_{ADE'} = a \cdot h_a$.

Przykład 1

Jedna z wysokości w równoległoboku o polu 10 ma długość 2, druga z wysokości ma długość 4. Wyznamy długości boków.

Rozwiązanie

$$a \cdot h_a = a \cdot 2 = 10, \text{ więc } a = 5$$

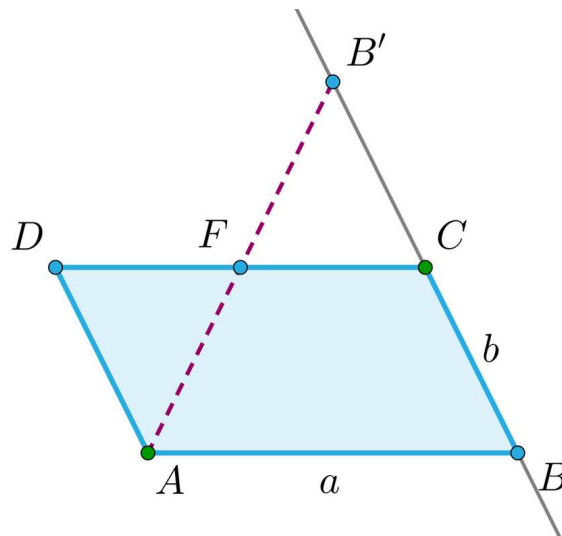
$$b \cdot h_b = b \cdot 4 = 10, \text{ więc } b = 2,5$$

Zatem równoległobok ma boki długości 5 i 2,5.

W dowodzie twierdzenia sprowadziliśmy zadanie policzenia pola równoległoboku do wyznaczenia pola prostokąta. Pokażemy jeden ze sposobów sprowadzenia zadania policzenia pola równoległoboku do wyznaczenia pola trójkąta.

Przykład 2

Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem. Na prostej BC zaznaczamy punkt B' taki, że $|BC| = |CB'|$. Wykażemy, że pole równoległoboku $ABCD$ jest równe polu trójkąta ABB' .



Rozwiązanie

Prowadzimy odcinek $B'A$. Niech punkt F będzie punktem przecięcia odcinka AB' z bokiem DC .

Wtedy, z twierdzenia Talesa wynika, że $|CF| = \frac{|AB|}{2}$ oraz z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy, że trójkąty CFB' i DFA są przystające.

Stąd wynika, że pole równoległoboku $ABCD$ jest równe polu trójkąta ABB' .

Twierdzenie: pole równoległoboku 2

Pole równoległoboku o bokach a , b i kącie α między tymi bokami jest równe

$$P = ab \sin \alpha.$$

Dowód

Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe $P = 2P_{BAD} = 2 \cdot \frac{ab \sin \alpha}{2} = ab \sin \alpha$.

Prostokąt jest równoległobokiem, więc jego pole jest równe

$$P = ab \sin \alpha = ab \sin 90^\circ = ab.$$

Przykład 3

Kąt między dwoma bokami równoległoboku o długościach 5 cm i 6 cm ma miarę równą 30° . Wyznamy pole tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Obliczymy pole tego równoległoboku podstawiając bezpośrednio do wzoru:

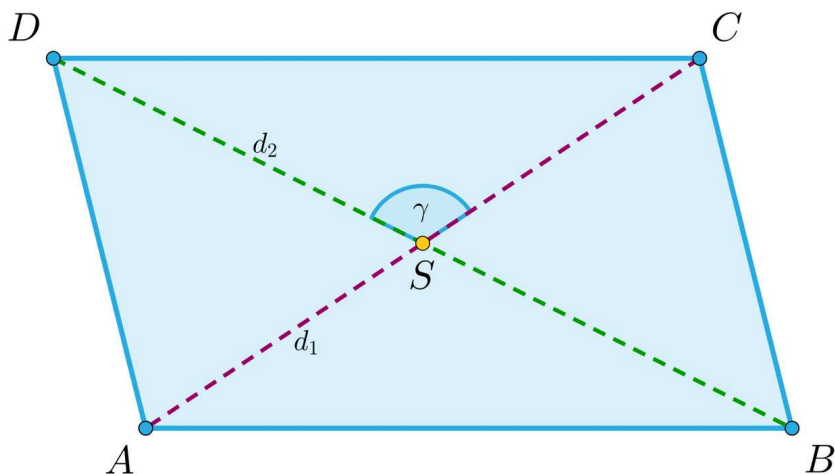
$$P = 5 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

Twierdzenie: pole równoległoboku 3

Pole równoległoboku o przekątnych d_1, d_2 i kącie γ między przekątnymi jest równe

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin \gamma.$$

Dowód



Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe:

$$\begin{aligned}P &= P_{ASB} + P_{CSD} + P_{ASD} + P_{CSB} = 2P_{ASB} + 2P_{ASD} = \\&= 2 \cdot \frac{\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}}{2} \sin \gamma + 2 \frac{\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}}{2} \sin (180^\circ - \gamma) = \frac{d_1 \cdot d_2}{4} (\sin \gamma + \sin (180^\circ - \gamma)) = \\&= \frac{d_1 \cdot d_2}{4} \cdot 2 \cdot \sin \gamma = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin \gamma\end{aligned}$$

Przykład 4

Przekątne równoległoboku mają długości 14 i 18, a kąt rozwarty między przekątnymi jest 5 razy większy niż kąt ostry. Wyznamy pole tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Niech α będzie miarą kąta ostrego. Wtedy $\alpha + 5\alpha = 180^\circ$, więc $\alpha = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$.

$$\text{Zatem } P = \frac{14 \cdot 18}{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{14 \cdot 18}{2 \cdot 2} = 63.$$

Zanim podamy kolejny wzór na pole równoległoboku przypomnijmy, że dwa niezerowe wektory $[a_x, a_y]$, $[b_x, b_y]$ zaczepione we wspólnym początku wyznaczają równoległobok oraz że niezależnie od punktu zaczepienia, równoległoboki rozpięte na danych wektorach są przystające. Stąd wynika, że do obliczenia pola równoległoboku można zaczepić wektory w początku układu współrzędnych.

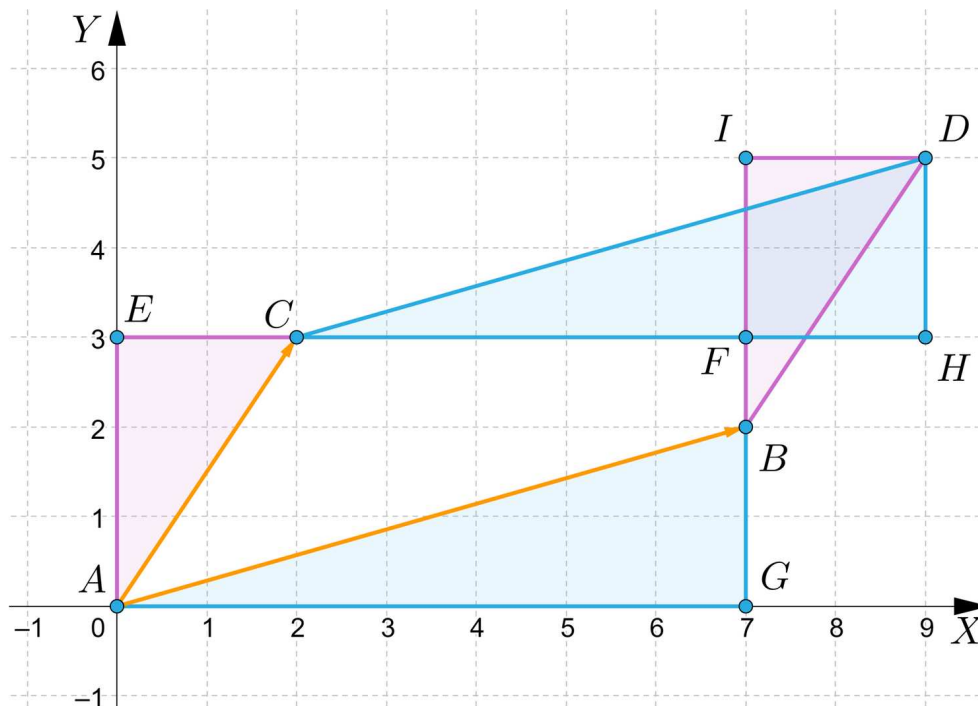
Twierdzenie: pole równoległoboku 4

Pole P równoległoboku wyznaczonego przez dwa niezerowe wektory $[a_x, a_y]$, $[b_x, b_y]$ zaczepione we wspólnym początku jest równe

$$P = |a_x b_y - a_y b_x|.$$

Zamiast dowodu popatrzmy na rysunek:

Na rysunku przedstawiony jest równoległobok $ABDC$ rozpięty na wektorach $AC = [a_x, a_y]$, i $AB = [b_x, b_y]$.



Wtedy pole równoległoboku jest równe polu [prostokąta](#) $AEFG$ pomniejszonego o pole prostokąta $FHDI$, co widać na rysunku.

$$P_{AEFG} = |AG| \cdot |AE| = a_x \cdot b_y, P_{FHDI} = |FI| \cdot |FH| = a_y \cdot b_x$$

Zatem pole równoległoboku jest równe $P = a_x b_y - a_y b_x$.

Może się też zdarzyć, że $a_x b_y - a_y b_x$ będzie liczbą ujemną i wtedy $P = |a_x b_y - a_y b_x|$.

Przykład 5

Na wcześniejszym rysunku wektor AC ma współrzędne $[2, 3]$, a wektor AB ma współrzędne $[7, 2]$. Obliczymy, ile wynosi pole równoległoboku rozpiętego na tych wektorach.

Rozwiązanie

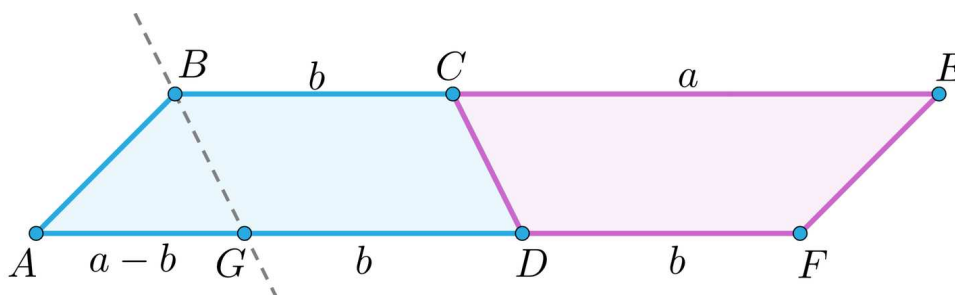
Pole równoległoboku rozpiętego na tych wektorach wynosi $P = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 2 = 17$.

Zastosowania

Przykład 6

Pokażemy, jak wyznaczyć pole trapezu znając pole równoległoboku.

Na rysunku mamy trapez $ABCD$ o podstawach a i b oraz wysokości h , dla którego przedstawimy dwie metody obliczenia pola.



Rozwiązanie

1. Metoda pierwsza polega na dorysowaniu do trapezu drugiego przystającego do niego trapezu (różowy). Wtedy powstaje równoległobok o tej samej wysokości co wysokość trapezu i o boku równym $a + b$. Pole trapezu jest dwa razy mniejsze od pola tego równoległoboku, czyli pole trapezu wynosi:

$$P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h.$$

2. W metodzie drugiej prowadzimy z dowolnego wierzchołka przy krótszej podstawie prostą równoległą do drugiego ramienia. Prosta ta dzieli trapez na równoległobok o wysokości h i boku b oraz trójkąt o wysokości h i podstawie $a - b$. Wtedy pole trapezu wynosi:

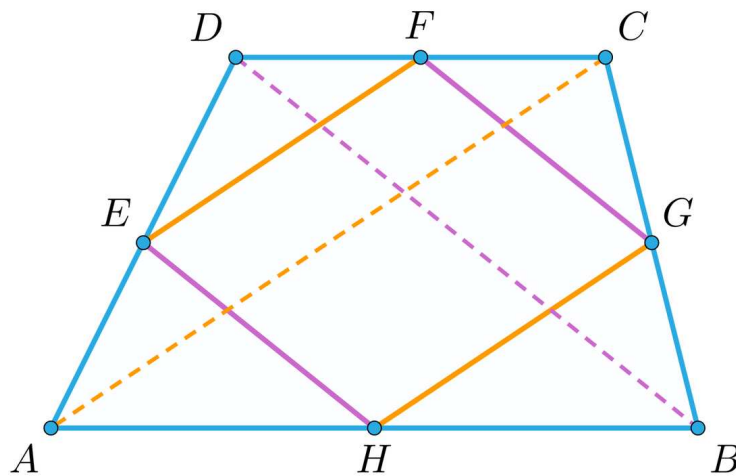
$$P = \frac{1}{2}(a - b) \cdot h + b \cdot h = h\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b\right) = h\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h.$$

Przykład 7

Znane jest twierdzenie, że w dowolnym czworokącie wypukłym czworokąt, którego wierzchołkami są środki jego boków jest równoległobokiem. Pokażemy, że pole tego równoległoboku jest połową pola P tego czworokąta.

Rozwiązanie

Na rysunku widać czworokąt $ABCD$ i czworokąt $EFGH$, który łączy środki boków.



Z własności linii środkowej w trójkątach BCD i BAD wynika, że boki FG i EH są równoległe do przekątnej BD i mają długość równą połowie długości tej przekątnej.

Stąd też wynika, że $P_{HAE} = \frac{1}{4}P_{BAD}$ i $P_{GCF} = \frac{1}{4}P_{BCD}$.

Analogiczne rozważania prowadzą do wniosku, że $P_{EDF} = \frac{1}{4}P_{ADC}$ i $P_{HBG} = \frac{1}{4}P_{ABC}$

Teraz zauważamy, że pole równoległoboku wynosi

$$P_{EFGH} = P - (P_{HAE} + P_{GCF} + P_{EDF} + P_{HBG})$$

Z drugiej strony wiemy, że $P = P_{BAD} + P_{BCD} = P_{ADC} + P_{ABC}$, więc:

$$2P = P_{BAD} + P_{BCD} + P_{ADC} + P_{ABC} = 4P_{HAE} + 4P_{GCF} + 4P_{EDF} + 4P_{HBG}$$

$$\text{Stąd } P_{HAE} + P_{GCF} + P_{EDF} + P_{HBG} = \frac{P}{2}$$

$$\text{Ostatecznie, } P_{EFGH} = P - \frac{P}{2} = \frac{P}{2}$$

Zatem pole równoległoboku $EFGH$ jest połową pola czworokąta $ABCD$.

Słownik

równoległobok

czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych

prostokąt

czworokąt, który ma wszystkie kąty proste

sinus kąta w trójkącie prostokątnym

stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta i długości przeciwprostokątnej

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Na ekranie są trzy przyciski, każdy z nich odpowiada za inny sposób liczenia pola równoległoboku (pole wyznaczone jest z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku).

1. Przycisk „Bok i wysokość”.

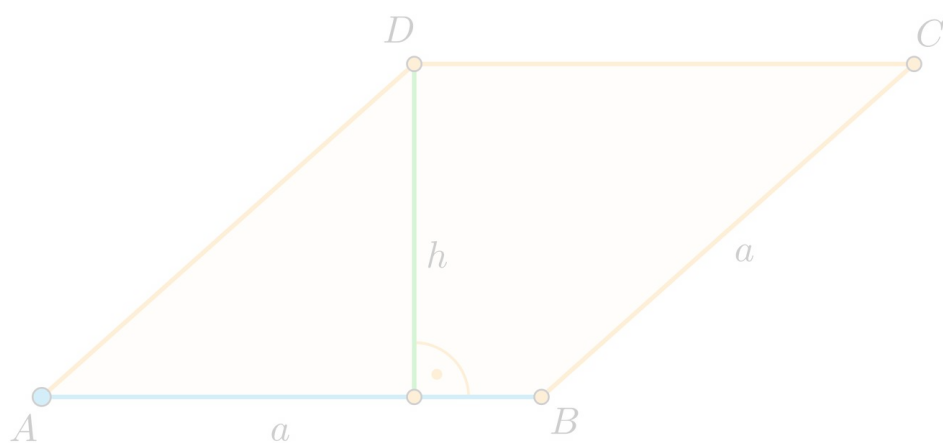
- przy pomocy suwaków wybierz długość boku a i wysokości h .
- zmieniając ustawienia suwaków dostajesz różne równoległoboki, które mają bok długości a i wysokość długości h
- obserwuj wartość pola tego równoległoboku

2. Przycisk „Dwa boki i kąt między nimi”.

- przy pomocy suwaków wybierz długości boków a i b oraz miarę kąta α między bokami
- powstaje równoległobok o podanych długościach boków i kącie między bokami
- obserwuj wartość pola tego równoległoboku

3. Przycisk „Przekątne i kąt między nimi”.




- przy pomocy suwaków wybierz długości przekątnych d_1 , d_2 oraz miarę kąta α między bokami
- powstaje równoległobok o podanych długościach przekątnych i kącie między nimi
- obserwuj wartość pola tego równoległoboku



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DtkolMseW>

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż poprawną odpowiedź.

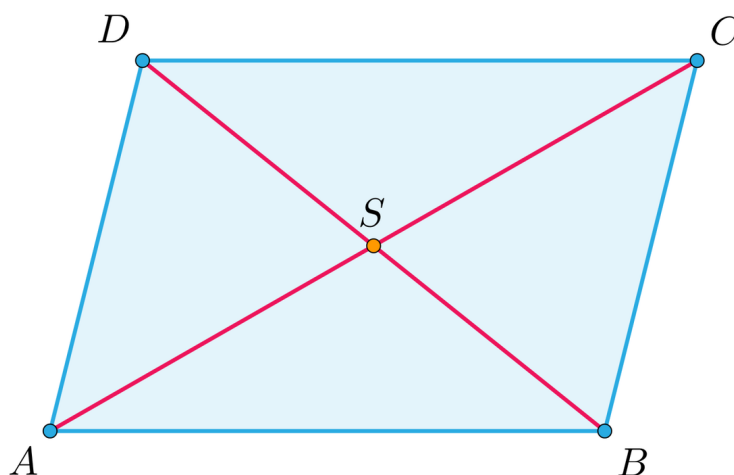
Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Stosując oznaczenia z rysunku wskaż zdania prawdziwe.



Ćwiczenie 4



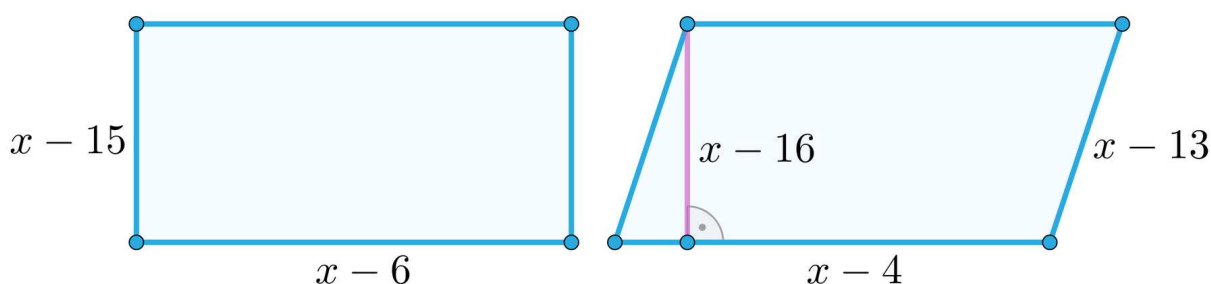
Główna ściana biurowca w porcie w Hamburgu to równoległobok o długości 134 metrów i wysokości 25 metrów. Kąt rozwarty jaki tworzy ta ściana z poziomym dachem wynosi 136 stopni. Wyznacz pole powierzchni ściany głównej oraz drugi bok tego równoległoboku.

Ćwiczenie 5



Długość krótszego boku równoległoboku oraz jednej z jego przekątnych jest równa 8. Oblicz pole tego równoległoboku, jeżeli wiadomo, że drugi z boków jest 1,5 razy dłuższy od pierwszego.

Ćwiczenie 6



Prostokąt i równoległobok na rysunku mają równe pola. Oblicz ich obwody.

Ćwiczenie 7



Pokaż, że jeżeli punkt E leży na boku AB równoległoboku $ABCD$, to pole trójkąta CDE jest połową pola równoległoboku $ABCD$.

Ćwiczenie 8



Punkt E leży na boku BC równoległoboku $ABCD$. Budujemy równoległobok $AEGF$ taki, że AE jest jego bokiem, a punkt D leży na boku równoległym do AE . Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEGF$ mają równe pola.

Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole równoległoboku

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

4. korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
8. korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
9. wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
11. stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
12. przeprowadza dowody geometryczne.

VII. Trygonometria

Zakres podstawowy. Uczeń:

1. wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje i rozpoznaje równoległoboki,
- zna różne wzory na pole równoległoboku, również z wykorzystaniem sinus kąta między bokiem i przekątną i kąta między przekątnymi,

- wykorzystuje własności pola równoległoboku w rozwiązywaniu zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm,
- kognitywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka,
- interaktywna aplikacja,
- analiza pomysłów.

Formy zajęć:

- praca indywidualna,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- Komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Pogadanka na temat cech równoległoboków.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel pokazuje wyprowadzenie wzoru na pole równoległoboku z wykorzystaniem wysokości i podstawy.
2. Następnie nauczyciel prowadzi dyskusję na temat czy długość przekątnej wystarczy do wyznaczenia pola równoległoboku.
3. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują przykłady w sekcji „Przeczytaj” oraz symulację interaktywną analizując wykorzystanie wzoru na pole równoległoboku:
 - gdy znana jest długość przekątnych i kąt między przekątnymi,
 - na podstawie informacji o długości przekątnych i kącie między bokami,
 - rozpiętego na wektorach.
4. Nauczyciel przedstawia zastosowania wyznaczania pola równoległoboku.

Faza podsumowująca:

Uczeń sprawdza nabyte umiejętności i wiedzę rozwiązując ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

Uczniowie mają za zadanie ustalić długości boków równoległoboku. Obliczyć i zapisać pole równoległoboku, dla kątów między bokami od 10 do 170 stopni korzystając z tablic sinusa. Przedstawić na wykresie zależność pola od kąta.

Materiały pomocnicze:

[Pole równoległoboku – wzór](#)

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może być wykorzystana przez uczniów podczas przygotowywania się do zajęć, do utrwalania wiedzy lub przy pracy badawczej zadanej do domu. Może być również wykorzystana jako inspiracja do stworzenia własnej prezentacji lub infografiki.