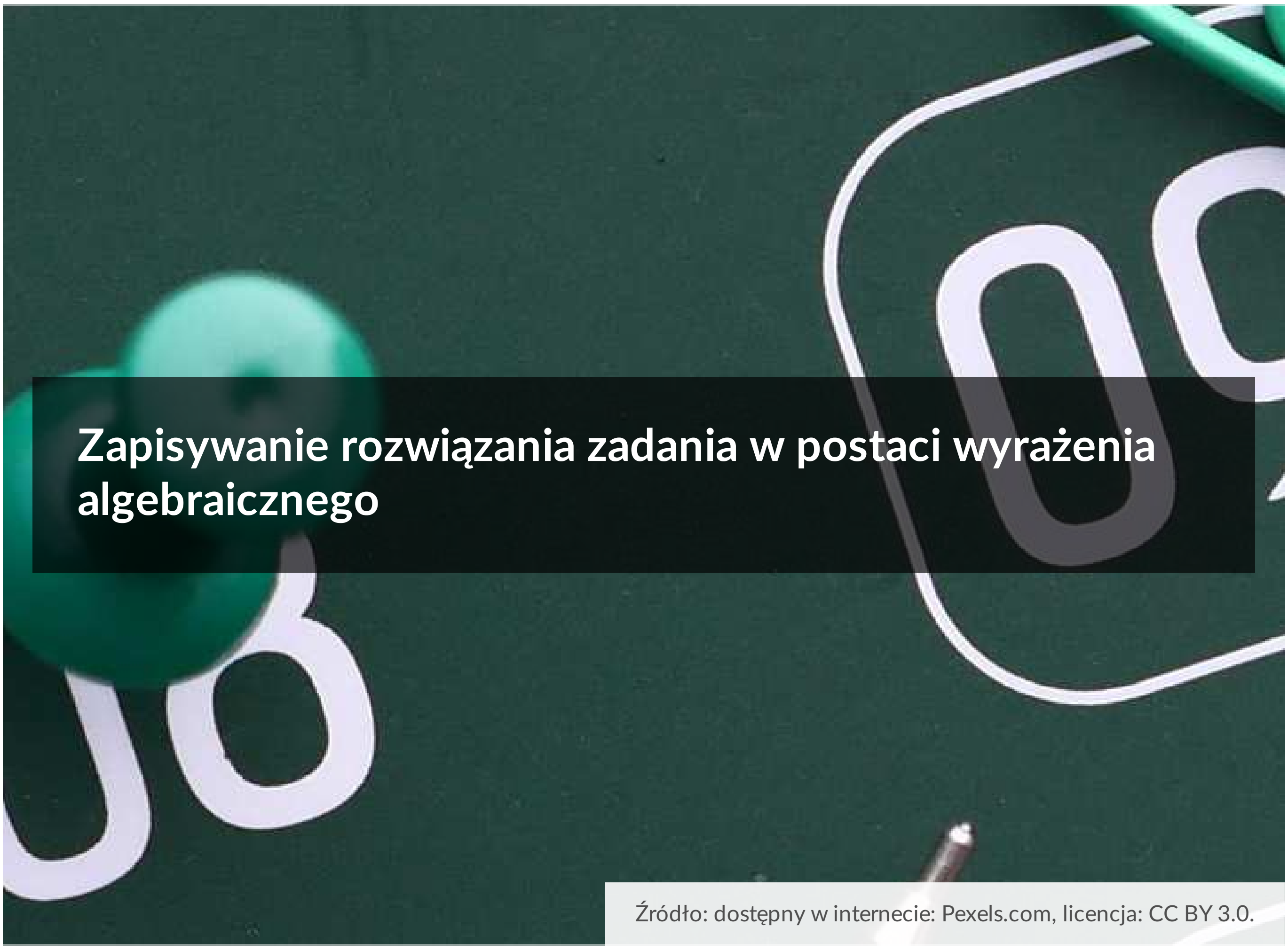
# Zapisywanie rozwiązania zadania w postaci wyrażenia algebraicznego



# Zapisywanie rozwiązania zadania w postaci wyrażenia algebraicznego

Źródło: dostępny w internecie: Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Wikipedia.org, domena publiczna.

Algebra to jedna z głównych dziedzin matematyki. W praktyce szkolnej to nauka o wyrażeniach algebraicznych, równaniach, nierównościach.
Korzenie algebry sięgają starożytnej Mezopotamii. Zajmowali się nią matematycy greccy,

indyjscy, europejscy. Słowo algebra (al–dżabr) oznacza „przywrócenie” i pochodzi z książki „O odtwarzaniu i przeciwstawianiu” napisanej w IX wieku przez perskiego matematyka Muhammada ibn Mūsā al–Khwārizmīego [Muhamada ibn Musa al Kwarizmiego].
Analizując przykłady zawarte w tym materiale, poznasz sposoby zapisywania zależności przedstawionych w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych.
Sprawdzisz ukształtowane umiejętności – rozwiązując problemy zawarte w ćwiczeniach.

1. Interaktywna treść merytoryczna
2. Gra edukacyjna
3. Zestaw ćwiczeń interaktywnych
4. Słownik

**Twoje cele**

- Zapiszesz wyrażenie algebraiczne określone słownie.
- Utworzysz wyrażenie algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym.
- Zapiszesz zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych.

Liter używa się nie tylko jako znaków do zapisywania wyrazów. W matematyce z liter, liczb, znaków działań (dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, potęgowania) oraz nawiasów, budujemy wyrażenia algebraiczne.
Choć wyrażeniem algebraicznym jest też pojedyncza liczba, zwykle staramy się, aby w wyrażeniu algebraicznym wystąpiła co najmniej jedna litera.

**Ważne!**

Wyrażeniem algebraicznym nazywamy wyrażenie zbudowane z liczb, liter, znaków działań, nawiasów.

**Miejsce na Twoje notatki**



**Przykład 1**

Przykłady wyrażeń algebraicznych.
$a + 7$ – suma liczb $a$ i 7
$x - 2y$ – różnica liczb $x$ i $2y$
$5 \cdot (6 - x)$ – iloczyn liczby 5 i różnicy liczby 6 i liczby $x$
$\frac{x}{2y}$ – iloraz liczby $x$ przez podwojoną liczbę $y$

Jeśli w wyrażeniu $4 + x$ literę $x$ zastąpimy liczbą, np. 8, to otrzymamy

$$4 + 8 = 12$$

Mówimy, że 12 jest wartością liczbową (krótko – wartością) wyrażenia $4 + x$ dla $x = 8$. Liczby występujące w wyrażeniach zwane są **zmiennymi**.

Podstawiając w wyrażeniach algebraicznych za występujące w nich litery pewne liczby i wykonując wskazane działania, otrzymujemy odpowiadające tym liczbom **wartości** tych wyrażeń.

Wyrażenia algebraiczne można przekształcać podobnie, jak wyrażenia arytmetyczne, uwzględniając właściwą kolejność wykonywania działań.

**Przykład 2**

Zapiszemy w najprostszej postaci wyrażenie $W = (3x)^2 - (3x - 1)(3x + 2)$ i obliczymy jego wartość dla $x = -1$.

| Wyrażenie algebraiczne | Kolejność działań |
|---|---|
| $W = (3x)^2 - (3x - 1)(3x + 2)$ | – |
| $W = 9x^2 - (3x - 1)(3x + 2)$ | Najpierw wykonujemy potęgowanie. |
| $W = 9x^2 - \left(9x^2 + 6x - 3x - 2\right)$ | Wymnażamy nawiasy. |
| $W = 9x^2 - \left(9x^2 + 3x - 2\right)$ | Redukujemy w nawiasie wyrazy podobne. |
| $W = 9x^2 - 9x^2 - 3x + 2$ | Opuszczamy nawiasy. |
| $W = -3x + 2$ | Redukujemy wyrazy podobne. |

Aby obliczyć wartość liczbową tego wyrażenia, podstawiamy w miejsce $x$ liczbę $(-1)$.

$$W = -3 \cdot (-1) + 2 = 3 + 2 = 5$$

**Odpowiedź:**
Wartość liczbowa wyrażenia dla $x = -1$ jest równa 5.

Za pomocą wyrażeń algebraicznych można zapisywać zależności przedstawione w zadaniach. Rozwiązując zadania tekstowe, w których pewne wielkości określone są za pomocą liter, należy zwrócić uwagę, jakie liczby można podstawiać w miejsce tych liter. Zwykle możemy to wywnioskować, analizując treść zadania lub postać otrzymanego wyrażenia (np. nie można dzielić przez zero).

Prześledzimy to, rozwiązując zadania „o liczbach”.

**Przykład 3**

Zapiszemy za pomocą wyrażenia algebraicznego liczbę naturalną dwucyfrową podzielną przez 5, której cyfrą dziesiątek jest $a$, natomiast cyfrą jedności jest $b$.

Liczbę dwucyfrową, której cyfrą dziesiątek jest $a$, natomiast cyfrą jedności jest $b$, można zapisać w dziesiątkowym układzie pozycyjnym w postaci:
$10a + b$.
Aby liczba była podzielna przez 5, jej cyfrą jedności musi być 0 lub 5.
Aby liczba była dwucyfrowa, jej cyfra dziesiątek nie może być równa 0.

Zatem liczba spełniająca warunki zadania to $10a + b$, dla $b = 0$ lub $b = 5$ i
$a \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.
**Przykład 4**

Wykażemy, że jeżeli od odwrotności liczby naturalnej $n$ odejmiemy odwrotność liczby o 1 większej od $n$, to otrzymamy ułamek właściwy.

Odwrotnością liczby $n$ jest liczba $\frac{1}{n}$.
Odwrotnością liczby o 1 większej od $n$, czyli liczby $n + 1$ jest liczba $\frac{1}{n+1}$.
Aby wyrażenia $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{n+1}$ miały sens liczbowy, mianowniki ułamków muszą być różne od zera.
Czyli musi być spełniony warunek
$n \neq 0$ i $n + 1 \neq 0$, czyli $n \neq -1$.
Ponieważ $n$ jest liczbą naturalną, zatem powyższy warunek będzie spełniony, gdy $n$ będzie liczbą naturalną różną od zera.

Zapisujemy i przekształcamy różnicę wynikającą z treści zadania.
Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika (tak, jak byśmy to robili w przypadku ułamków zwykłych – czyli rozszerzamy odpowiednio ułamki) i odejmujemy.

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Iloczyn $n(n + 1)$ jako iloczyn dwóch liczb naturalnych jest liczbą naturalną. Ponieważ $n \neq 0$, więc liczba $n(n + 1)$ jest większa bądź równa 2.
$2 > 1$ – czyli mianownik ułamka $\frac{1}{n(n+1)}$ jest większy od licznika, a to oznacza, że jest to ułamek właściwy.

Za pomocą wyrażeń algebraicznych możemy opisywać zależności pomiędzy wielkościami przedstawionymi w zadaniach.

W przypadku zadań tekstowych trzeba:

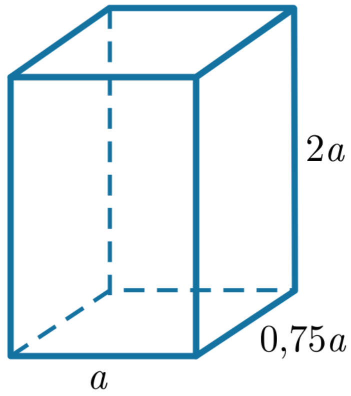
- najpierw uważnie przeczytać treść zadania,

- jeśli można, sporządzić rysunek pomocniczy (np. w zdaniach geometrycznych) lub tabelkę,
- określić wielkości dane, a pozostałe opisać za pomocą wyrażeń algebraicznych,
- ustalić, jakie liczby można podstawić w miejsce zmiennych w zapisanych wyrażeniach.

**Przykład 5**

Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach długości $a$ i $0,75a$. Długość krawędzi bocznej jest równa $2a$. Obliczymy objętość tego prostopadłościanu.

Sporządzamy rysunek pomocniczy.






Aby obliczyć objętość prostopadłościanu, należy pomnożyć pole podstawy prostopadłościanu przez wysokość.

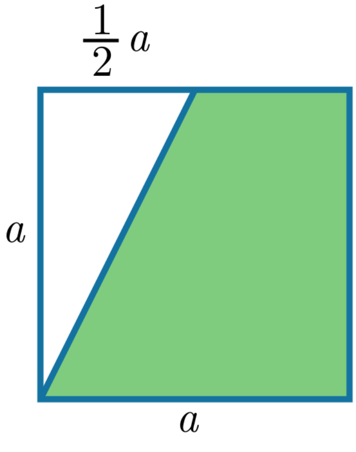
$$V = a \cdot 0,75a \cdot 2a = 1,5a^3$$

Zauważmy przy tym, że $a > 0$.

**Odpowiedź:**
Objętość prostopadłościanu jest równa $1,5a^3$.

**Przykład 6**

Czworokąt na rysunku to kwadrat. Obliczymy pole zamalowanej figury dla $a = 4$.



Pole zamalowanej figury obliczamy jako różnicę pola kwadratu o boku długości $a$ i pola trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości $a$ i $\frac{1}{2}a$.

$$P = a^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}a$$

$$P = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4} \cdot a^2$$

Obliczamy teraz pole zamalowanej figury dla $a = 4$. W miejsce $a$ podstawiamy do otrzymanego wyrażenia liczbę 4.

$$P = \frac{3}{4} \cdot 4^2 = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$$

**Odpowiedź:**
Dla $a = 4$ pole zamalowanej figury jest równe 12.

Niekiedy w treści zdania nie ma konkretnych liter, oznaczających rozważane wielkości. Można wtedy oznaczać te wielkości dowolnymi literami, jeśli wprowadzenie zmiennych ułatwi rozwiązanie zadania.

**Przykład 7**

W trójkącie miary kątów pozostają w stosunku $1 : 2 : 3$. Wykażemy, że ten trójkąt jest prostokątny.

**Oznaczmy:**
$a$ – miara najmniejszego z kątów.

Wtedy pozostałe kąty tego trójkąta mają miary: $2a$ i $3a$.
Suma miar kątów trójkąta jest równa $180^\circ$, czyli:

$$a + 2a + 3a = 180^\circ$$

$$6a = 180^\circ | : 6$$

$$a = 30^\circ$$

Miary pozostałych kątów:

$$2a = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

$$3a = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$$

Jeden z kątów trójkąta ma miarę $90^\circ$, więc trójkąt jest prostokątny, co należało wykazać.
**Przykład 8**

Obliczymy resztę z dzielenia przez 9 różnicy dowolnej liczby trzycyfrowej $A$ i liczby trzycyfrowej $B$ powstałej z liczby $A$ w wyniku przestawienia cyfry setek i cyfry dziesiątek.

Oznaczmy przez $a$, $b$, $c$ cyfry liczby $A$, gdzie $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

Wtedy:

$$A = 100a + 10b + c$$

oraz

$$B = 100b + 10a + c$$

Wyznaczamy różnicę tych liczb.

$$A - B = (100a + 10b + c) - (100b + 10a + c)$$

$$A - B = 100a + 10b + c - 100b - 10a - c$$

$$A - B = 90a - 90b$$

$$A - B = 9 \cdot (10a - 10b)$$

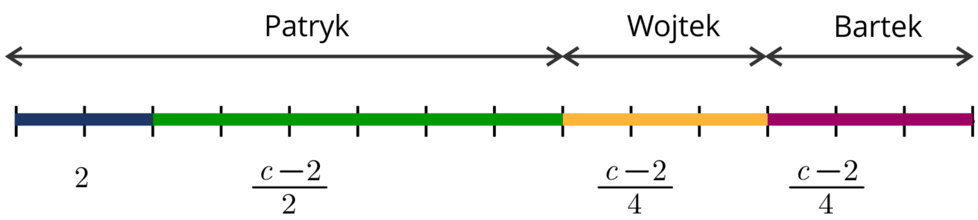
Różnicę liczb $A$ i $B$ zapisaliśmy w postaci iloczynu liczby 9 i liczby całkowitej $10a - 10b$, co oznacza, że jest to liczba podzielna przez 9.

**Odpowiedź:**
Reszta z dzielenia liczby $A - B$ przez 9 jest równa 0.

Sporządzenie rysunku często pomaga zobrazować treść zadania.
**Przykład 9**

W bombonierce było $c$ czekoladek. Patryk, Wojtek i Bartek podzielili między siebie czekoladki. Patryk wziął dwie czekoladki i połowę reszty. Wojtek wziął połowę tego, co zostało. Bartkowi przypadła reszta czekoladek. Ile czekoladek otrzymał Bartek?

Wykonujemy rysunek pomocniczy.




Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

- Patryk wziął dwie czekoladki – zostało $c-2$ czekoladek. Patryk wziął jeszcze połowę reszty, czyli $\frac{c-2}{2}$. Zostało $\frac{c-2}{2}$ czekoladek.
- Wojtek wziął połowę tego, co zostało, czyli $\frac{1}{2} \cdot \frac{c-2}{2} = \frac{c-2}{4}$ czekoladek.
- Obliczamy, ile czekoladek zostało dla Bartka. Zapisujemy i przekształcamy odpowiednie wyrażenie.

$$c - \left(2 + \frac{c-2}{2} + \frac{c-2}{4}\right) = c - 2 - \frac{2c-4+c-2}{4} =$$

$$= \frac{4c-8-3c+6}{4} = \frac{c-2}{4}$$

Zauważmy, że takie rozwiązanie mogliśmy też odczytać z rysunku.

**Odpowiedź:**
Bartek otrzymał $\frac{c-2}{4}$ czekoladki.
**Przykład 10**

Agata ma 4 lata, a Wanda 10. Ustalimy, za ile lat Wanda będzie dwa razy starsza od Agaty.

I **sposób:**

Sporządzamy pomocniczą tabelkę.

| **Imię** | **Teraz** | **Za $x$ lat** |
|---|---|---|
| Agata | 4 | $4+x$ |
| Wanda | 10 | $10+x$ |

Z danych tabeli otrzymujemy równość

$$2(4+x)=10+x$$

Zatem

$$8+2x=10+x$$

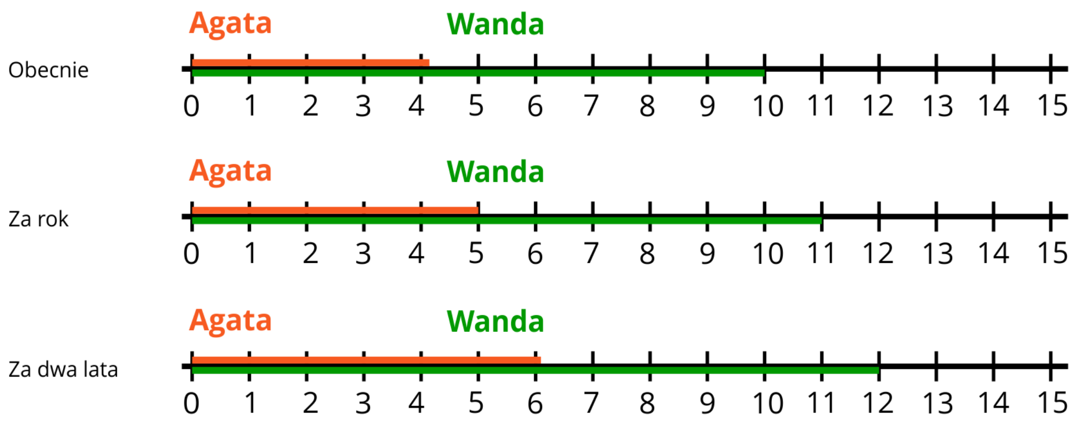
$$2x-x=10-8$$

$$x=2$$

**Odpowiedź:**
Za dwa lata Wanda będzie dwukrotnie starsza od Agaty.

II **sposób:**

W rozwiązaniu może pomóc nam też rysunek.






Na podstawie rysunku wnioskujemy, że Wanda będzie dwa razy starsza od Agaty za dwa lata.
Istotnie – za dwa lata Agata będzie miała $4+2=6$ lat, a Wanda $10+2=12$ lat.

$$6\cdot 2=12$$

**Odpowiedź:**
Za dwa lata Wanda będzie dwukrotnie starsza od Agaty.

## Notatki

**Miejsce na Twoje notatki**

## Gra edukacyjna

**Polecenie 1**

Zagraj w matematyczne domino. Na kartkach domina zapisane są zadania dotyczące wyrażeń algebraicznych. Przeanalizuj uważnie każde z zadań i dopasuj treść zadania do odpowiedzi.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/b/P1B62R69E

**Polecenie 2**

Wzorując się na zadaniach zapisanych na „kostkach” domina, zapisz odpowiedź do poniższego zadania.
Dwa rodzaje cukierków: czekoladowe i śliwkowe zmieszano w stosunku $3:2$. Otrzymano $x\ \mathrm{kg}$ mieszanki. Ile kilogramów cukierków czekoladowych znajduje się w tej mieszance?



**Polecenie 3**

Wzorując się na zadaniach zapisanych na „kostkach” domina, zapisz odpowiedź do poniższego zadania.
Aleksandra kupiła jabłka w cenie $2,40\ \text{zł}$ za kilogram. Ile kilogramów jabłek kupiła Aleksandra, jeśli podała kasjerce banknot $x$ zł i otrzymała $30\ \mathrm{gr}$ reszty.



**Polecenie 4**

Paweł codziennie śpi przez $x$ godzin i $y$ minut. Ile godzin śpi w ciągu tygodnia?

# Zestaw ćwiczeń interaktywnych

**Ćwiczenie 1**

Zaznacz poprawną odpowiedź.
Prostokąt ma boki długości $a$ i $b$. Jeśli długość prostokąta zwiększymy o $1$, a szerokość o $2$, to pole tego prostokąta zwiększy się o:

- $2a + b + 2$
- $3$
- $ab + 2a + b + 2$
- $a + b + 3$



**Ćwiczenie 2**

Zaznacz poprawną odpowiedź.
Leon ma teraz $x$ lat. Leokadia jest od niego o $4$ lata młodsza. Ile lat będą mieli razem za $6$ lat?

- $2(x + 12)$
- $2x - 4$
- $x + 16$
- $2(x + 4)$

### Ćwiczenie 3

Boki prostokąta mają długość $4a$ i $0,5b$.
Wskaż wszystkie poprawne stwierdzenia.

- [ ] Obwód tego prostokąta jest równy $8a+b$.
- [ ] Jeśli $b=2a$ to prostokąt ten jest kwadratem.
- [ ] Jeśli $a=1$ i $b=2$ to obwód tego prostokąta jest równy $10$.
- [ ] Pole tego prostokąta jest równe $2ab$.



### Ćwiczenie 4

Oceń, które stwierdzenie jest prawdziwe, a które fałszywe.

| Zdanie | Prawda | Fałsz |
| --- | --- | --- |
| $10a$ minut to $\frac{a}{6}$ godziny. | ○ | ○ |
| $v\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ to $16\frac{2}{3}v\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$. | ○ | ○ |
| $w\ \mathrm{kg}$ to $100w\ \mathrm{g}$. | ○ | ○ |
| $k\ \mathrm{cm}$ to $0,01\ \mathrm{m}$. | ○ | ○ |

## Ćwiczenie 5

Połącz w pary zadanie z rozwiązaniem.

| | |
|---|---|
| Pan Józef zarabiał przez pierwsze cztery miesiące $k$ złotych miesięcznie, a przez następne 6 miesięcy $n$ złotych miesięcznie. Ile złotych zarobił w ciągu tych dziesięciu miesięcy? | $4n + k$ |
| Edyta ma $n$ książek przygodowych, trzy razy tyle książek historycznych i $k$ książek biograficznych. Ile ma wszystkich książek? | $4k + 6n$ |
| Każda z $n$ osób weszła do pokoju z czwórką swoich dzieci, a każda z $k$ osób weszła do tego pokoju z dwójką rodzeństwa. Ile osób weszło do pokoju? | $4n + 6k$ |
| W pokoju stoi $n$ stolików i $k$ ław. Przy każdym stoliku stoją cztery krzesła, a przy każdej ławie sześć krzeseł. Ile krzeseł jest w tym pokoju? | $5n + 3k$ |



## Ćwiczenie 6

Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie wyrażenia.
Początkowa cena dywanu była równa $x$ zł . Cenę dywanu podwyższono o $25\%$.

- Cenę dywanu podwyższono o ______ zł.
- Po podwyżce dywan kosztuje ______ zł.
- Aby cena towaru była równa początkowej, należy obniżyć ją o ______.

$x + 0,25x$ | $20\%$ | $0,25x$

**Ćwiczenie 7**

Ania waży tyle, ile ważą dwa jej psy. Każdy pies waży tyle, ile cztery koty. Każdy kot waży tyle, ile dwadzieścia myszy. Każda mysz waży $m$ kilogramów.
Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie liczby.

- Ania jest ______ razy cięższa od kota.
- Pies jest ______ razy cięższy od myszy.
- Kot jest ______ razy lżejszy od psa.
- Mysz jest ______ razy lżejsza od Ani.





**Ćwiczenie 8**

Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych nieparzystych jest podzielna przez $4$.

**Ćwiczenie 9**

Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych dodatnich w dzieleniu przez $2$ daje resztę $1$.



## Słownik

**wyrażenie algebraiczne**

nazywamy wyrażenie zbudowane z liczb, liter, znaków działań, nawiasów.

## Bibliografia

*Algebra*, https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/algebra;3867774.html, [dostęp 28. 05. 2023]

Gonick L., (2016), *Algebra w obrazkach*, Warszawa: Prószyński i S-ka.